Processamento Digital de Sinais

Renato da Rocha Lopes e Amauri Lopes
rlopes@decom.fee.unicamp.br

DECOM - Departamento de Comunicações - DECOM
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Conteúdo da Aula

Transformada de Fourier

- $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathrm{e}^{-j\omega n}$
- $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} X(\omega) \mathrm{e}^{j\omega n} \, \mathrm{d}\omega$
- Fórmula fechada só para funções específicas, como seno.
  - Como calcular para um sinal de áudio?
  - Numericamente impossível, teria que calcular para todo ω
- Alternativa: Transformada Discreta de Fourier

DFT: Definição

- Computadores e processadores trabalham com seqüências finitas de dados
  - $x[n], n = 0, 1, \ldots, N-1$
  - Exemplo: arquivo MP3

- DTFT: $X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-j\omega n}$
  - Exagero: representa N valores de $x[n]$ com infinitos valores de $X(\omega)$
  - Como representar com N valores?

- DFT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-j2\pi kn/N}$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$
  - $X[k] = X(2\pi k/N)$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$
  - Amostragem em freqüência

Interpretação: Mudança de Base

Exemplo: $N = 4$

$$
\begin{aligned}
X[0] &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \\
X[1] &= x[0] - jx[1] - x[2] + jx[3] \\
X[2] &= x[0] - x[1] + x[2] - x[3] \\
X[0] &= x[0] + jx[1] - x[2] - jx[3]
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}
$$

DFT Inversa

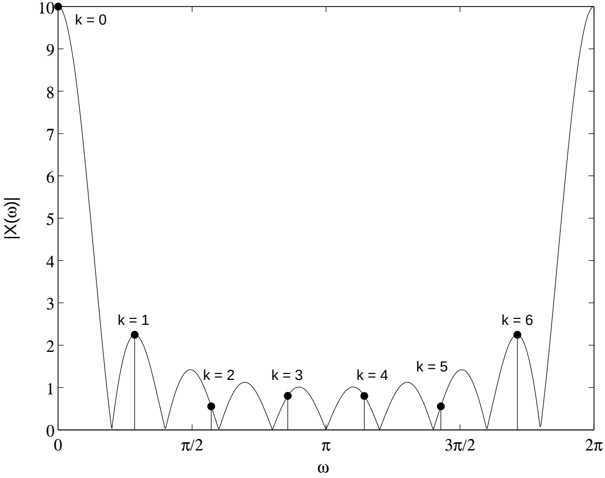
$$\mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1}\mathbf{X}$$

Fato:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(n-r)/N} = \begin{cases} N, & n - r = lN \ (l \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-j2\pi kn/N} \\ x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi kn/N} \end{aligned}}$$

Interpretação: Amostragem em Freqüência

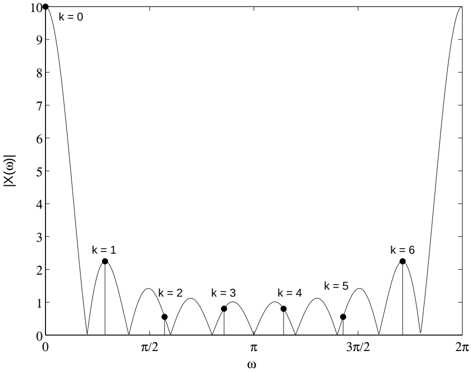


$$\boxed{X[k] = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}$$

Exemplo: N = 7

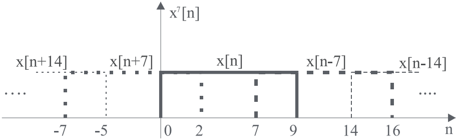
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$X(\omega) = \mathrm{e}^{-j\omega 9/2} \frac{\sin(10\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

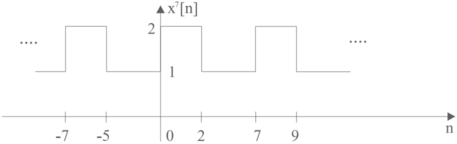


Exemplo: $N = 7$

```
k = 0:6;
X = exp(-j*2*pi*k*9/14).*sin(10*pi*k/7)./sin(pi*k/7)
X(1) = 10;x = ifft(X);
```

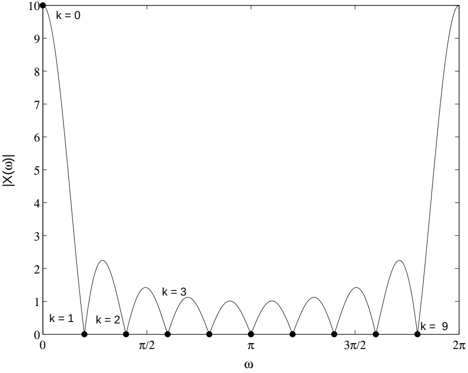


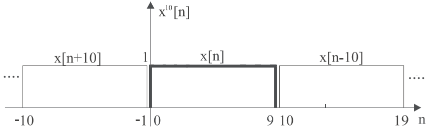
(a)



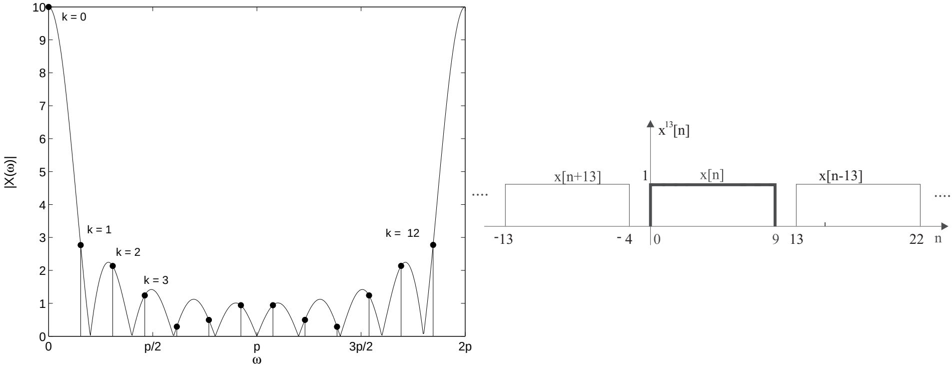
(b)

Exemplo: $N = 10$


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
|X(ω)|
k = 0
k = 1
k = 2
k = 3
k = 9
0
π/2
π
3π/2
2π
ω


x¹⁰[n]
x[n+10]
1
x[n]
x[n-10]
....
....
-10
-1
0
9
10
19
n

Exemplo: $N = 13$



|X(ω)|
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
k = 0
k = 1
k = 2
k = 3
k = 12
0
p/2
p
3p/2
2p
ω
x13[n]
x[n+13]
x[n]
x[n-13]
1
....
-13
- 4
0
9
13
22
n

Extensão Periódica

$$\begin{aligned} \text{DTFT: } X(\omega) &\quad \leftrightarrow \quad x[n] \\ \text{DFT: } X[k] = X(k2\pi/N) &\quad \leftrightarrow \quad x_s[n] \end{aligned}$$

- $x[n]$ não necessariamente de duração finita
- A qual sinal corresponde a DFT?

Extensão Periódica: Prova

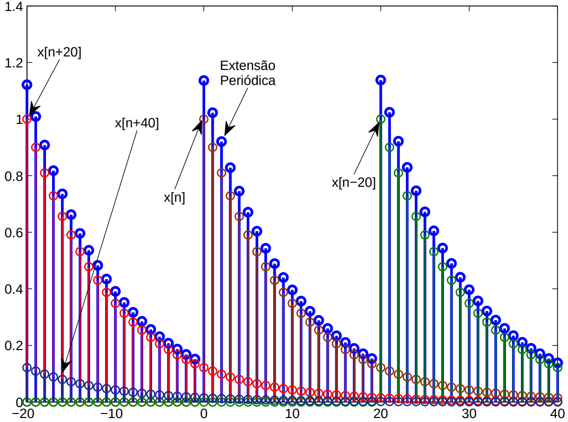
$$\begin{aligned} x_s[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{-j2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(2\pi k/N)\mathrm{e}^{-j2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]\mathrm{e}^{-j2\pi kl/N}\right)\mathrm{e}^{j2\pi kn/N} \end{aligned}$$

Mas $\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-j2\pi k(l-n)/N} = \begin{cases} N, & n-l \text{ é múltiplo de } N \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$$\boxed{x_s[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]}$$

Extensão Periódica: Exemplo

$$x[n] = 0{,}9^n u[n]$$



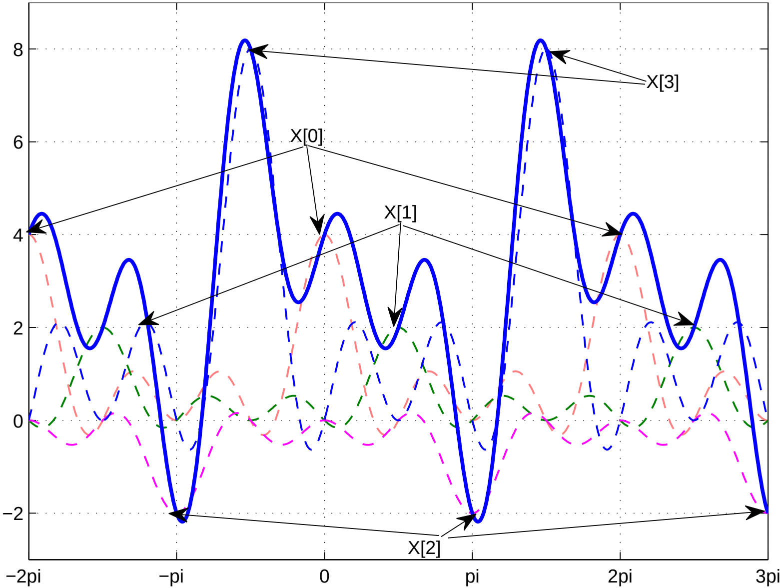
A fórmula

Dado $X[k]$, como calcular $X(\mathrm{e}^{j\omega})$ para um ω qualquer?

$$
\begin{aligned}
X(\mathrm{e}^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi kn/N} \right) \mathrm{e}^{j\omega n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{j2\pi kn/N}\mathrm{e}^{j\omega n}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{1 - \mathrm{e}^{-jN(\omega - 2\pi k/N)}}{1 - \mathrm{e}^{-j(\omega - 2\pi k/N)}}}
$$

A Figura



Periodicidade no Tempo

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-j2\pi kn/N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi kn/N}$$

$$\begin{aligned} x[n+N] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi k(n+N)/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi kn/N}\mathrm{e}^{j2\pi k} \\ &= x[n] \end{aligned}$$

Simetrias

- $x[n]$ real $\Rightarrow X(\omega) = X^*(-\omega)$
  - Magnitude é par: $|X(\omega)| = |X(-\omega)|$
  - Fase é ímpar: $\angle X(\omega) = \angle X(-\omega)$
- $x[n]$ real $\Rightarrow X[k] = X^*[-k]$
  - Magnitude é par: $|X[k]| = |X[-k]|$
  - Fase é ímpar: $\angle X[k] = \angle X[-k]$

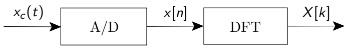
Como $X[N-k] = X[-k]$, $|X[k]| = |X[N-k]|$

Periodicidade em Freqüência

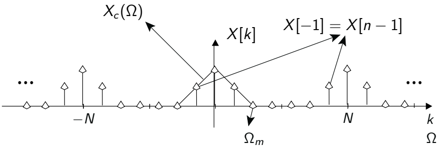
$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-j2\pi kn/N} \\
x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi kn/N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[k+N] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi(k+N)n/N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{j2\pi kn/N}\mathrm{e}^{j2\pi n} \\
&= X[k]
\end{aligned}
$$

Relação entre Freqüências



$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= X_c\left(\frac{\omega f_s}{2\pi}\right)\\
X[k] &= X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\\
X[k] &= X_c\left(\frac{k f_s}{N}\right)
\end{aligned}
$$



Entrada Senoidal

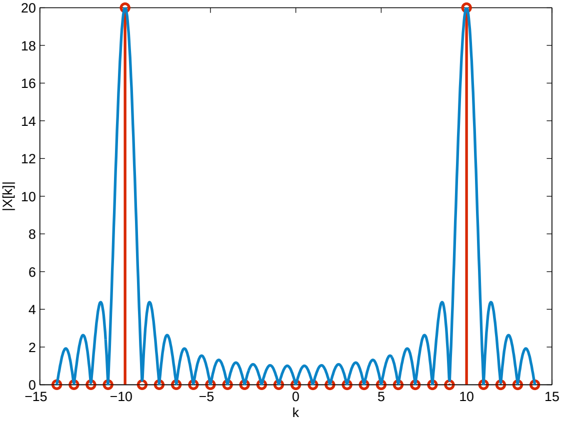
- DFT calcula espectro em $2k\pi/N$
  - Sinais de duração N só contêm essas freqüências
  - Freqüência "desejada" pode ter outra forma.

$$x[n] = e^{j\omega n}, n = 0, 1, \ldots, N-1 \leftrightarrow |X[k]| = \left| \frac{\sin((\omega - 2k\pi/N)N/2)}{\sin((\omega - 2k\pi)/2)} \right|$$

- Se $\omega - 2k\pi/N = l2\pi/N$, então
  - $X[k] = N$ se l é múltiplo de N,
  - $X[k] = 0$ caso contrário.
- Caso contrário, $X[k] \neq 0$.

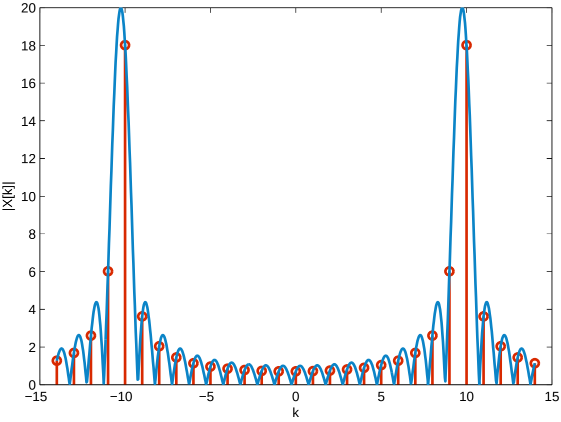
Exemplo sem Vazamento

- $N = 20$
- $\omega = \pi = 2 * \pi * 10/N$

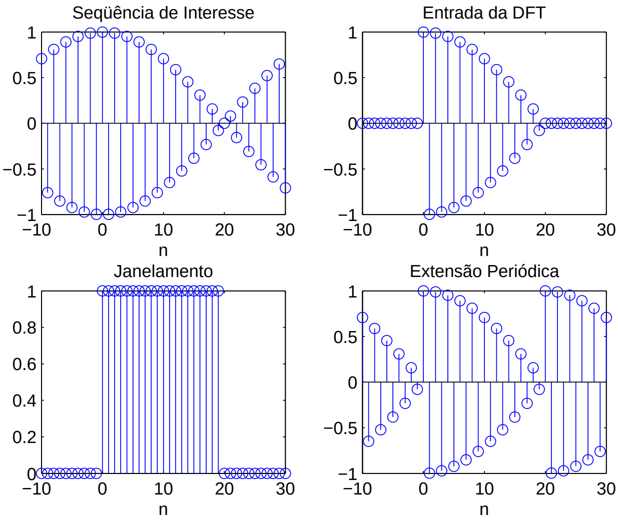


Exemplo com Vazamento

- $N = 20$
- $\omega = \pi - 2\pi * 9{,}75/N$



Vazamento Explicado



- Sinal de interesse: $x_\infty[n]$
- Janela: $w[n]$
- DFT: espectro de $x[n] = x_\infty[n]w[n]$

Vazamento Explicado

Resumo:

DFT calcula amostras do espectro de sinal janelado:

$$X[k] = X(e^{j2\pi k/N})$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n] = x_\infty w[n]\}$$

Conseqüência

Convolução em freqüência:

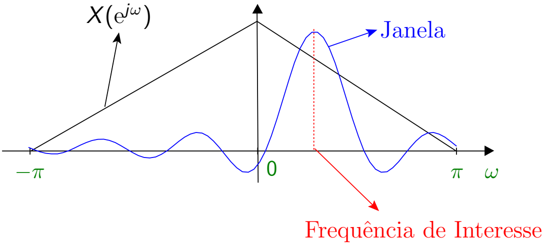
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_\infty(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

Prova da Convolução em Freqüência

Seja $z[n] = x[n]y[n]$. Então

$$
\begin{aligned}
Z(\mathrm{e}^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\mathrm{e}^{j\theta})\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{e}^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\mathrm{e}^{j\theta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-j(\omega-\theta)n}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\mathrm{e}^{j\theta})X(\mathrm{e}^{-j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

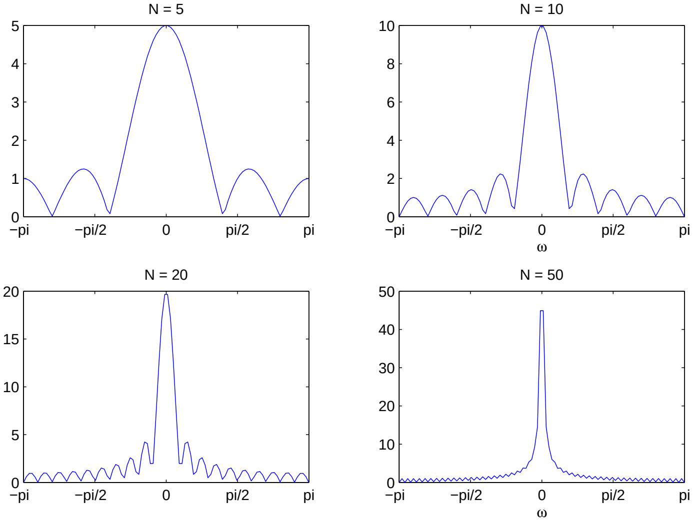
Vazamento em Freqüência



- DFT calcula componente em freqüência como área sob a curva
- Comportamento desejado da janela em freqüência:
  - Valores nulos em freqüências diferentes da de interesse
  - Extrai apenas freqüência de interesse $\Rightarrow$ resposta em freqüência concentrada em torno da origem.

Melhorando Janela

Aumenta tamanho da janela, diminui vazamento



Melhorando Janela

Usa outras formas de onda, com freqüência mais concentrada na origem

- Retangular:

$$w[n] = 1, 0 \leq n \leq N-1$$

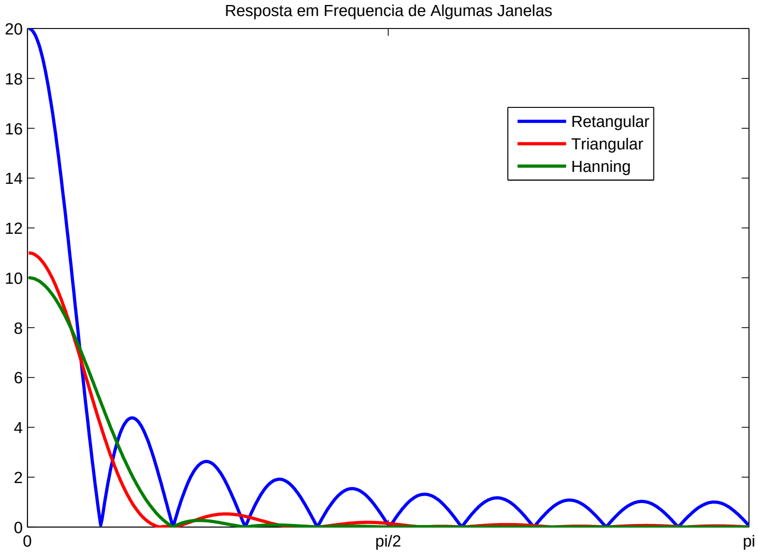
- Triangular:

$$w[n] = \frac{|n|}{N/2}, |n| \leq N/2$$

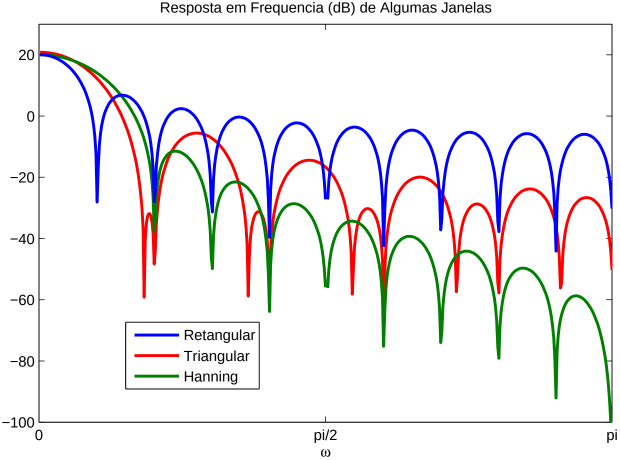
- Hanning:

$$w[n] = 0{,}5 - 0{,}5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

Janelas em Freqüência



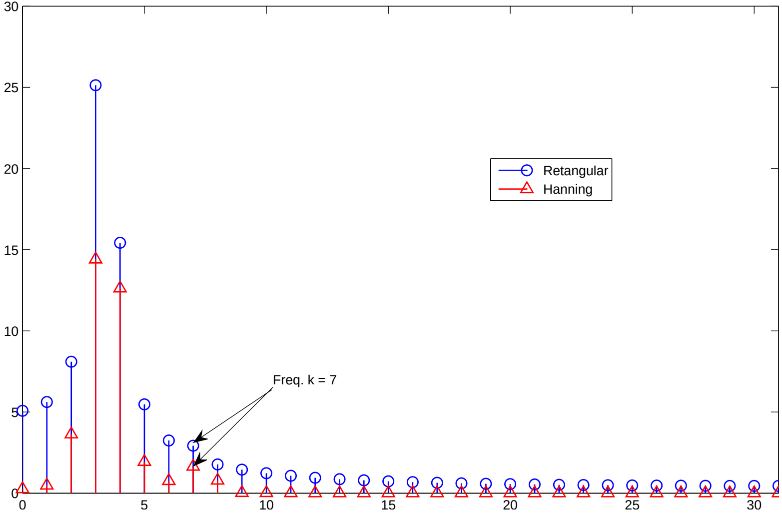
Janelas em Freqüência



Melhora vazamento de freqüências distantes.
Piora influência de freqüências vizinhas (perda de resolução).

Exemplo do Efeito das Janelas

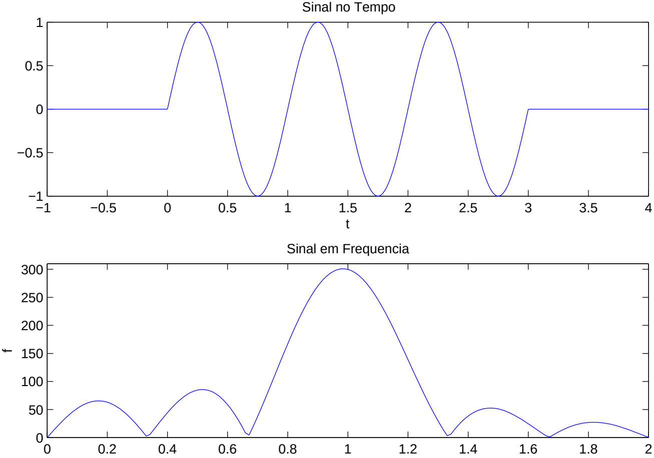
$N = 64$ pontos, $x[n] = \sin(2\pi 3{,}4 n/64) + 0{,}1 \sin(2\pi 7 n/64)$



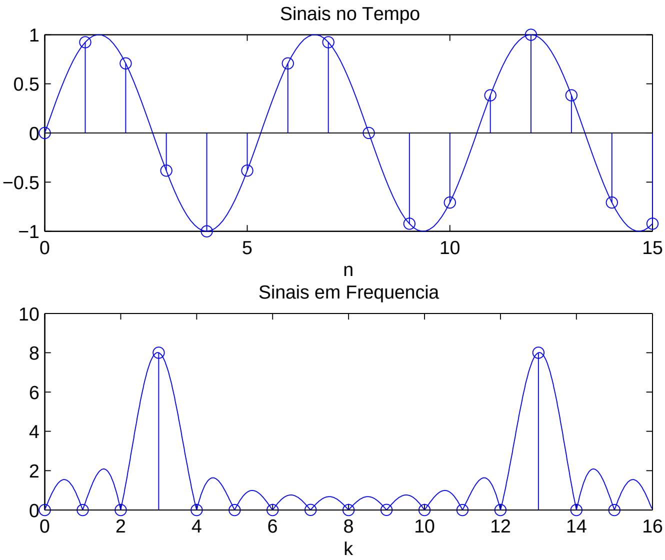
Melhorando Aproximação da DFT

- DFT calcula espectro nas freqüências $2\pi k/N$
- Aumentando N, calculamos espectro em mais pontos.
  - melhor aproximação do espectro contínuo do sinal.
- Exemplo: senóide amostrada 16 vezes em 3 períodos

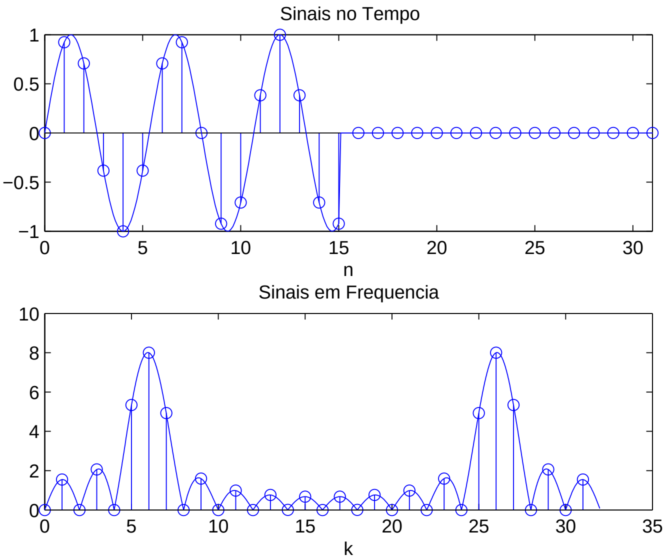
Sinal Contínuo



Sem preencher com zeros

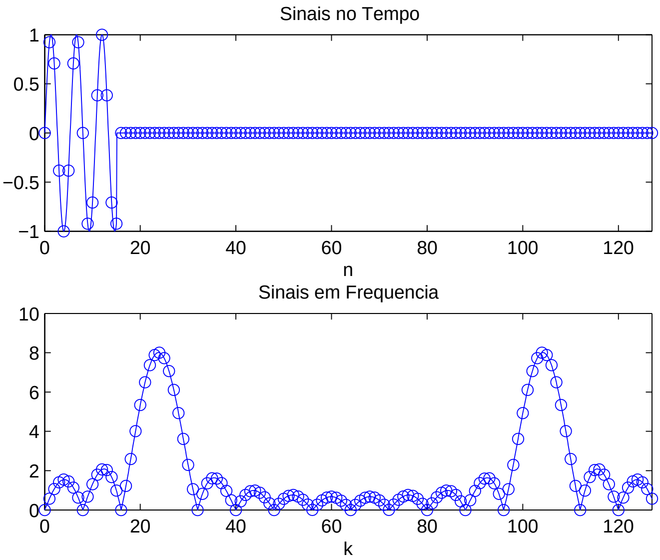


16 zeros



Sinais no Tempo
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
n
Sinais em Frequencia
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
k

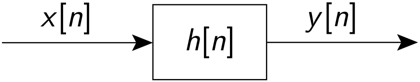
112 zeros


Sinais no Tempo
1
0.5
0
−0.5
−1
0
20
40
60
80
100
120
n
Sinais em Frequencia
10
8
6
4
2
0
0
20
40
60
80
100
120
k

Notas

- Resolução não melhora com zero-padding
  - Largura do lóbulo central não se altera
  - Resolução depende do número de amostras original
- Eixo x da DFT: $2\pi k/N \leftrightarrow$ freqüência analógica kf_s/N
  - Pico sempre ocorre em $f = 3f_s/16$
  - Como $f_s = 16$, senóide de freqüência 3.
- Contradição:
  - Amostragem exige $x(t)$ limitado em freqüência
  - DFT exige $x(t)$ limitado no tempo
  - Teoria proíbe que ambos sejam verdade.
  - Prática: sinais são **quase** limitados no tempo e na freqüência

Motivação



- Duração de $x[n]$: N_x amostras

- Duração de $h[n]$: N_h amostras

$\Rightarrow$ Cálculo da saída envolve $\approx N_x N_h$ somas e $\approx N_x N_h$ produtos

FFT

- Calcula DFT em $N \log(N)$ operações!
- É possível calcular saída com DFT?

Convolução Circular

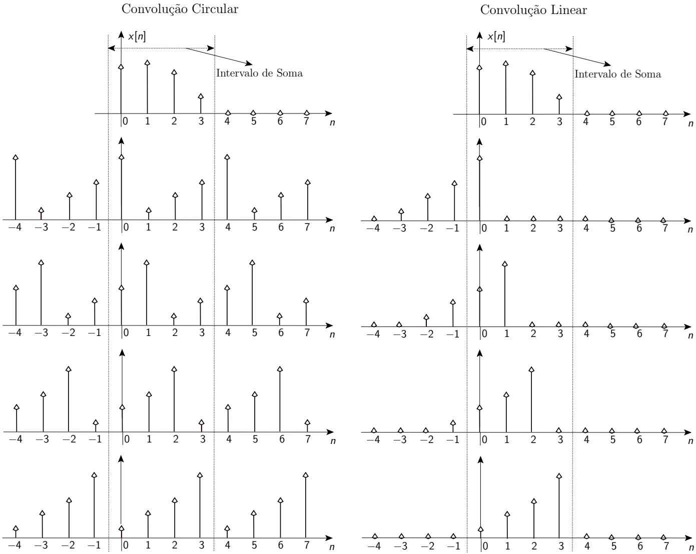
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

O que dá $X[k]H[k] = Z[k]$? Exemplo com $N = 4$:

$$\begin{aligned}
z[0] &= x[0]h[0] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] \\
z[1] &= x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[3] + x[3]h[2] \\
z[2] &= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] + x[3]h[3] \\
z[3] &= x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0]
\end{aligned}$$

Convolução Circular *Versus* Linear



Convolução Circular e Zero-Padding

- Duração de $x[n]$: N_x amostras
- Duração de $h[n]$: N_h amostras

$\Rightarrow$ Duração de $y[n]$: $N_y = N_x + N_h - 1$ amostras

$$\boxed{\text{DFTs envolvidas devem ter comprimento } N_y \Rightarrow \textit{Zero-Padding}}$$

Nesse caso, convolução circular = convolução linear.

Convolução Circular com Zero-Padding