Processamento Digital de Sinais

Renato da Rocha Lopes e Amauri Lopes
rlopes@decom.fee.unicamp.br
www.decom.fee.unicamp.br/∼rlopes

DECOM - Departamento de Comunicações - DECOM
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Conteúdo da Aula

Introdução

Sinais

- Telecomunicações, mídias, potência, biomédicas, eletrodomésticos, equipamentos científicos, etc.

Processamento

Adaptação, compressão, modulação, extração de parâmetros, etc.

- Analógico (tempo contínuo) ou discreto.
- Digital: amplitude também é discreta.

Por que digital?

- Abstração matemática permite generalização.
  - Contexto físico é dado pela aplicação.
- Implementação flexível, robusta e barata.

Objetivos e Bibliografia

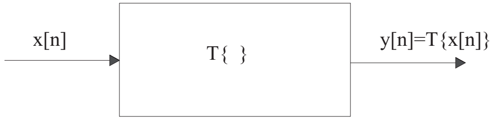
Objetivos:

- Entender relação entre freqüências discretas e contínuas;
- Projetar filtros discretos;
- Entender como filtros discretos atuam em sinais contínuos e discretos;
- Entender e saber usar a DFT (FFT);
- Mudar taxa de amostragem;

Bibliografia

- Apostila do Prof. Amauri
- *Understanding Digital Signal Processing*, Richard Lyons
- *Signal Processing First*, J. M. McClellan, R. W. Schafer e M. A. Yoder

Sistemas



Para permitir análise, restringe a:

Sistema Linear

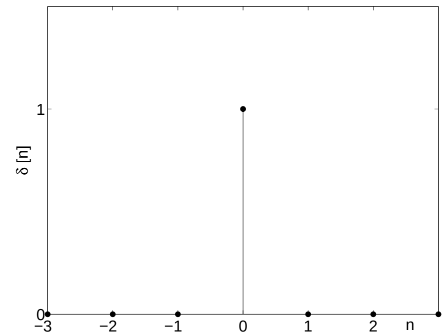
Se $T\{x_1[n]\} = y_1[n]$ e $T\{x_2[n]\} = y_2[n]$, então
$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n].$$

Sistema Invariante no Tempo

$$\text{se} \quad T\{x[n]\} = y[n], \quad \text{então} \quad T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0].$$

Impulso Unitário ou Delta de Kronecker

$$\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0. \end{cases}$$



Resposta ao Impulso

Resposta ao Impulso

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

Sinais são combinações de impulsos deslocados

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Convolução

Usando LIT, $y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} \Rightarrow$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

Entradas senoidais

Resposta a senóides

$$\begin{aligned} T\{e^{j\omega n}\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \\ &= H(\omega)e^{j\omega n} \end{aligned}$$

Resposta em Freqüência

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$$

Fourier

Transformada de Fourier

Sinais são combinações de exponenciais

- $X(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$;
- $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$.

Função de transferência

Convolução no tempo $\leftrightarrow$ Produto em freqüência

$$\Rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Função de Transferência: $\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}$

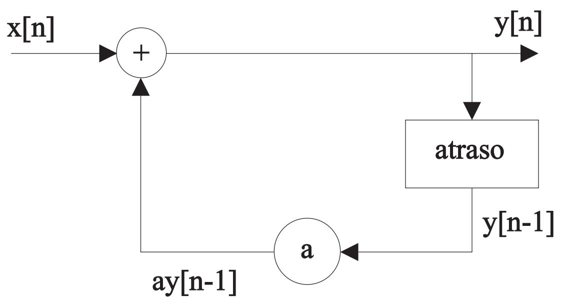
Prova da convolução

Usando LIT

$$\begin{aligned} y[n] &= T\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)T\left\{e^{j\omega n}\right\}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Sistema com um polo



$$y[n] = x[n] + ay[n-1]$$

Condições iniciais nulas: $\cdots y[-2] = y[-1] = 0$.

Resposta Temporal

Entrada $u[n]$

$$\begin{array}{lcl} y[0] = x[0] + ay[-1] & \rightarrow & y[0] = 1 \\ y[1] = x[1] + ay[0] & \rightarrow & y[1] = 1 + a \\ y[2] = x[2] + ay[1] & \rightarrow & y[2] = 1 + a + a^2 \\ & \vdots & \end{array}$$

$$y[n] = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k.$$

Entrada $\delta[n]$

$$\begin{array}{lcl} h[0] = \delta[0] + ah[-1] = \delta[0] & \rightarrow & h[0] = 1 \\ h[1] = \delta[1] + ah[0] \;= ah[0] & \rightarrow & h[1] = a \\ h[2] = \delta[2] + ah[1] \;= ah[1] & \rightarrow & h[2] = a^2 \\ \vdots & & \end{array}$$

$$h[n] = a^n u[n].$$

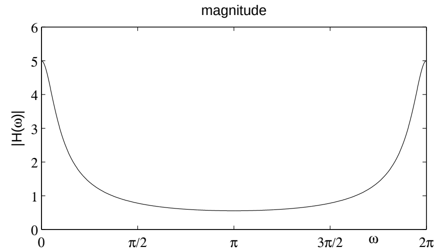
Função de Transferência

$$\begin{aligned} H(\omega) &= = \mathcal{F}\left\{a^n u[n]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \mathrm{e}^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathrm{e}^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a\mathrm{e}^{-j\omega}\right)^k \\ &= \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-j\omega}}, \end{aligned}$$

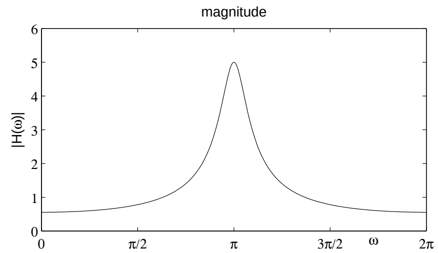
se $|a| < 1$

Resposta em Freqüência

Passa-baixas: $a = 0,8$

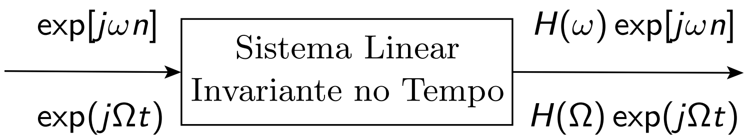


Passa-altas: $a = -0,8$



Domínio da Freqüência

- Representação natural de alguns sinais (som) e sistemas (filtro passa-baixas)
- Fácil de estimar em laboratório
- Pode facilitar cálculos:
  - Integração ⇔ divisão;
  - Convolução ⇔ produto.
  - Permite caracterizar sistemas lineares e invariantes no tempo.



A Transformada de Fourier

- Todo sinal prático pode ser escrito como uma sobreposição de senóides.
- Contínuo (TF):
  - $X_c(\Omega) = \mathcal{F}\{x_c(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \exp(-j\Omega t)\, \mathrm{d}t$
  - $x_c(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_c(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\Omega) \exp(j\Omega t)\, \mathrm{d}\Omega$
  - Ω: freqüência contínua em rad/s.
- Discreto (DFT):
  - $X(\omega) = \mathcal{F} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-j\omega n}$;
  - $x[n] = \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} X(\omega)\mathrm{e}^{j\omega n}\, \mathrm{d}\omega$.
  - ω: freqüência discreta em rad/amostra.

Prova da Transformada Inversa

Teorema: $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\, d\omega.$

Prova:

$$\int_0^{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\omega} e^{j\omega n} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_0^{2\pi} e^{j(n-k)\omega} d\omega.$$

$$\text{Mas} \int_0^{2\pi} e^{j(n-k)\omega} d\omega = \begin{cases} 0; & k \neq n \\ 2\pi; & k = n. \end{cases}$$

Linearidade, Parseval e Convolução

Linearidade

$$\mathcal{F}\{ax[n] + by[n]\} \longleftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$$

Parseval

$$\text{Energia de } x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |X(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

Convolução

- Definição: $c[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]$
- Propriedade: $x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$

Deslocamento no Tempo

Se $x[n] \longleftrightarrow X(\omega)$ então $x[n-n_0] \longleftrightarrow X(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega n_0}$

Demonstração:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega(k+n_0)} = X(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega n_0}$$

Aplicação: Função de Transferência

$$y[n] = x[n] + ay[n-1] \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) + a\mathrm{e}^{-j\omega}Y(\omega).$$

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-j\omega}}$$

Deslocamento em Freqüência

Se $x[n] \longleftrightarrow X(\omega)$ então $e^{-j\omega_o n}x[n] \longleftrightarrow X(\omega+\omega_0)$

Demonstração:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_o n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+\omega_0)n} = X(\omega+\omega_0)$$

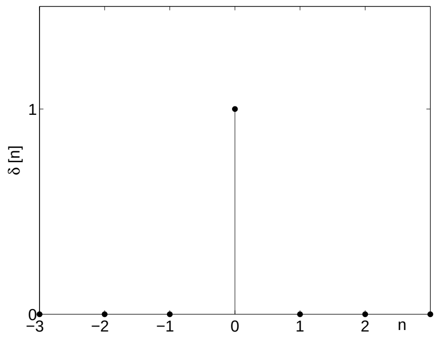
Aplicação: Modulação

$$\text{Como } \cos[\omega_o n] = \frac{e^{j\omega_o n}}{2} + \frac{e^{-j\omega_o n}}{2},$$

$$\text{então } x[n]\cos[\omega_o n] \longleftrightarrow \frac{X(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{X(\omega+\omega_0)}{2}$$

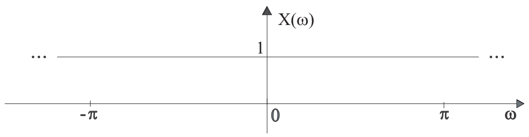
Impulso Unitário ou Delta de Kronecker

$$\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0. \end{cases}$$



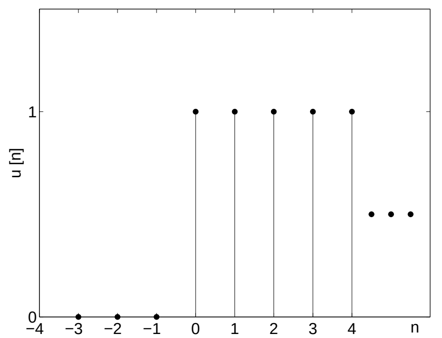
Impulso Unitário ou Delta de Kronecker

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\omega n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] \exp(-j\omega n) \\ &= 1. \end{aligned}$$



Degrau Unitário

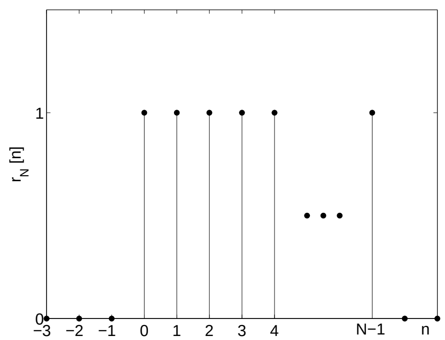
$$u[n] \triangleq \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$



Não possui transformada de Fourier.

Pulso Retangular

$$r_N[n] = u[n] - u[n-N] \triangleq \begin{cases} 1; & 0 \leqslant n < N-1 \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

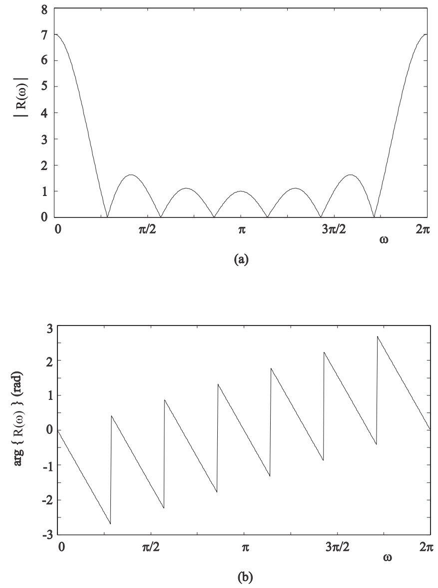


Pulso Retangular

$$
\begin{aligned}
R_N(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_N[n] \exp(-j\omega n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-j\omega n) \\
&= \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= \frac{e^{-jN\omega/2}\left(e^{jN\omega/2} - e^{-jN\omega/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)} \\
&= e^{-j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}
\end{aligned}
$$

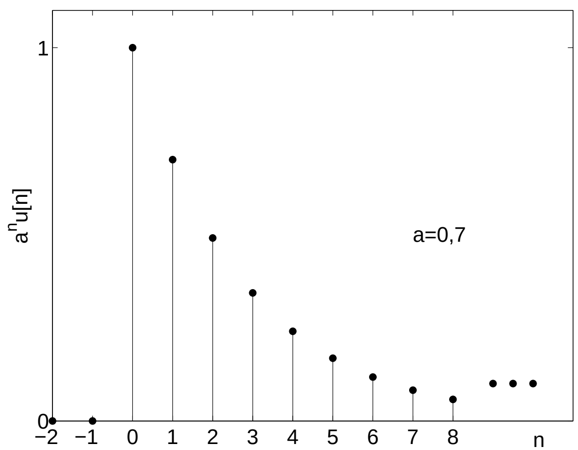
$$\boxed{\text{Soma de PG: } S = \frac{\text{elemento inicial} - \text{elemento final} \times \text{razão}}{1 - \text{razão}}}$$

Pulso Retangular



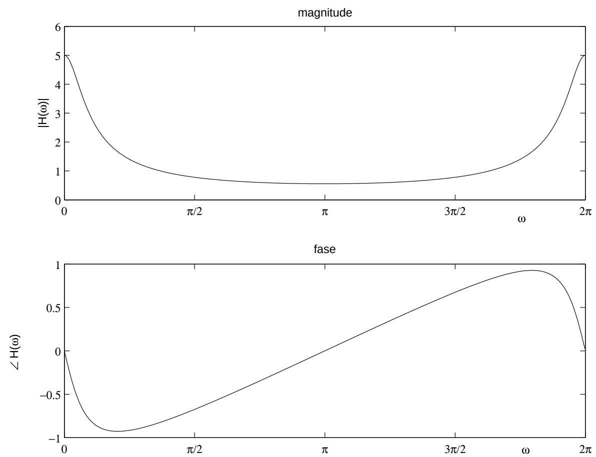
Exponencial

$$x[n] = a^n u[n]; \qquad \begin{cases} a = \text{constante} \\ \text{e} \\ |a| < 1 \end{cases}$$

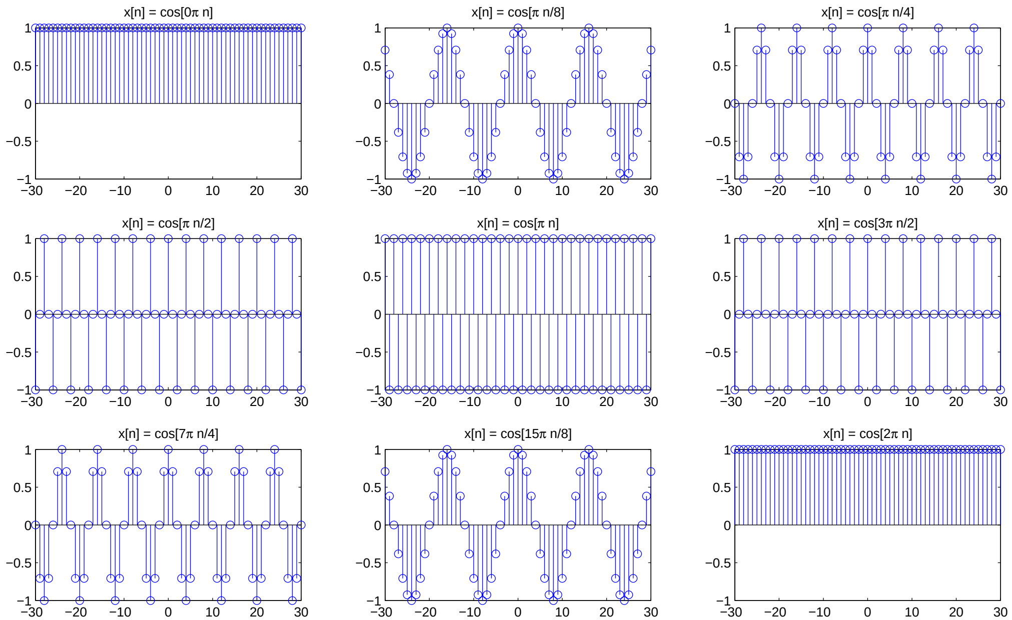


Exponencial

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$



Senóide Discreta



Senóide Discreta

- $\exp[j(\omega + 2\pi)n] = \exp[j\omega n]\exp[j2\pi n] = \exp[j\omega n]$

$\Rightarrow$ Freqüências discretas separadas de 2π são iguais

$\Rightarrow$ Só temos freqüências discretas entre 0 e 2π, ou entre $-\pi$ e π.

  - De fato, $X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$.

- Maior freqüência discreta: π

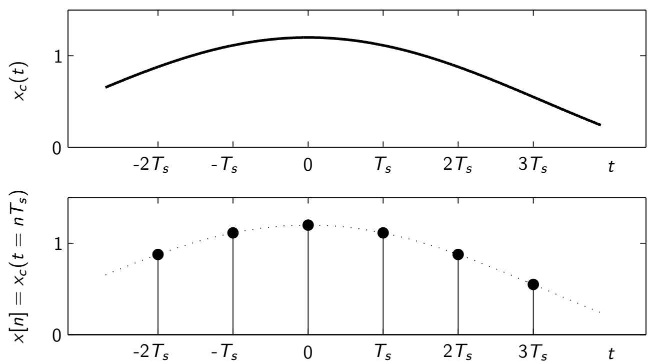
Transformada da Senóide

- Deve ter impulso em ω_0.
- Deve ser periódica em ω, com período 2π.

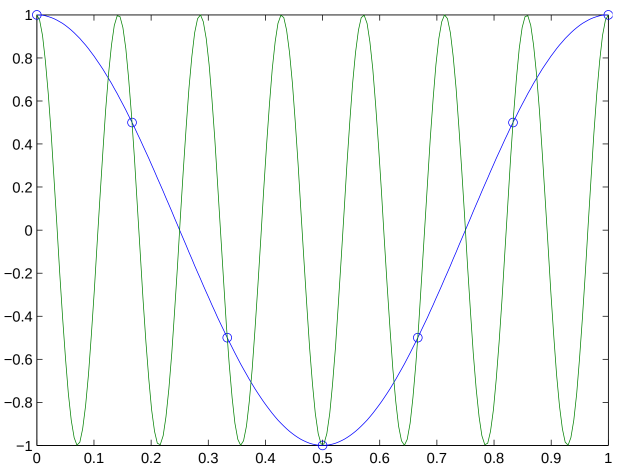
$$\boxed{\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 n}\right\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)}$$

Amostragem

- $x[n] = x_c(nT_s)$
- T_s: Período de amostragem.
- Como relacionar $X(\omega)$ com $X_c(\Omega)$?



Alias



Efeito estroboscópico, roda de carros em filmes.

Alias

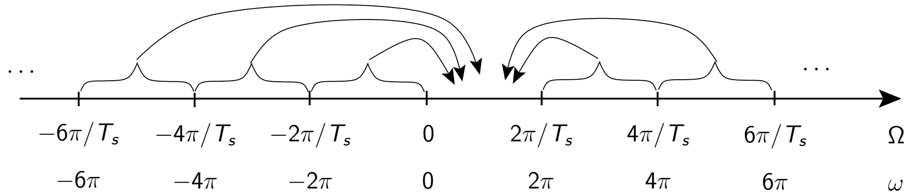
Exemplo: $T_s = 1$

- $x_1(t) = \cos(\pi t)$ e $x_2(t) = \cos(3\pi t)$.
  - Amostragem: $x_2[n] = \cos[3\pi n] = \cos[\pi n + 2\pi n] = \cos[\pi n] = x_1[n]$
  - Após amostragem, 3π aparece como seu *alias* (codinome) π.

Caso geral: freqüência de amostragem $f_s = 1/T_s$

- $x(t) = \exp(j(\Omega + 2\pi/T_s)t)$
  $\rightarrow x[n] = \exp[j(\Omega + 2\pi/T_s)T_s n] = \exp[j\Omega T_s n]$

$\Rightarrow$ Freqüências contínuas separadas de $2\pi/T_s = \omega_s$ são indistinguíveis.

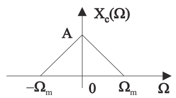


Relação entre transformadas

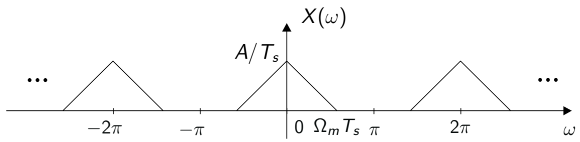
- $x(t) = \exp(j\Omega t) \rightarrow x[n] = \exp[j\Omega T_s n]$
  $\Rightarrow$ freqüência discreta $\omega = \Omega T_s$, ou seja, $\Omega = \omega f_s$.
- $x(t) =$ constante $\rightarrow x[n] =$ constante.
  $\Rightarrow$ freqüência contínua 0 = freqüência discreta 0.
- $x(t) = \exp(j2\pi/T_s t) \rightarrow x[n] = \exp(j2\pi n)$
  $\Rightarrow$ freqüência contínua $2\pi/T_s$ = freqüência discreta 2π.
- *Aliasing*: $X(\omega)$ tem contribuição de $X_c(\omega f_s)$, $X_c(\omega f_s + 2\pi f_s)$, etc.

$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left((\omega - 2k\pi)\frac{1}{T_s}\right)}$$

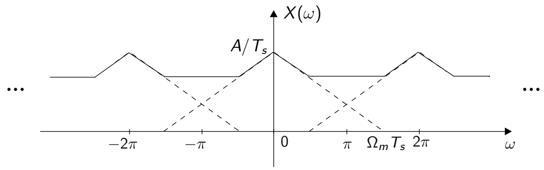
Relação entre Transformadas



Sem *aliasing*



Com *aliasing*

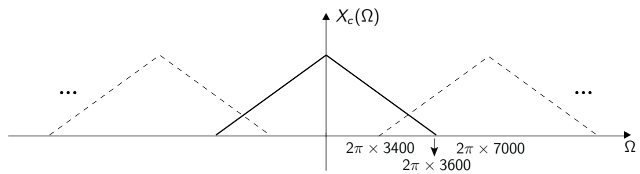


Condição para evitar *aliasing*: $\Omega_m T_s < \pi$, ou $\boxed{\Omega_m < \omega_s/2}$

Exemplo com *aliasing*

Exemplo:

- Freqüência máxima do sinal: $\Omega_m = 2\pi \times 3600$
- Freqüência de amostragem $f_s = 7000$ Hz.



Efeitos de amostragem

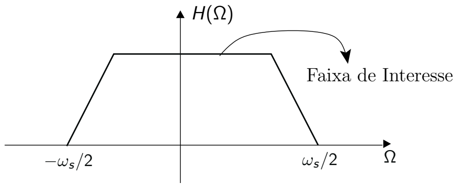
- Maior freqüência possível é 3500 Hz.
  - Freqüências acima de 3500 Hz somem.
- Freqüências entre 3400 Hz e 3500 Hz sofrem interferência por *aliasing*

Lidando com *aliasing*: Filtro Passa-Baixas

Freqüências acima de $f_s/2$ não podem mesmo ser representadas.
Filtro passa-baixas: evita que *alias* interfira com freqüências $< f_s/2$.
Elimina também ruído em altas freqüências.

Filtro Passa-Baixas

- Sem distorção na faixa de interesse
- Não passa freqüências $> f_s/2$



Superamostragem: aumentar f_s

$\Rightarrow$ Aumenta faixa de transição do filtro
$\Rightarrow$ Simplifica filtro

Prova da Relação entre Transformadas

Transformada inversa:

$$x_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega nT_s}d\Omega$$

Divida a integral em intervalos de $k\omega_s$ a $(k+1)\omega_s$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega nT_s}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{k\omega_s}^{(k+1)\omega_s} X(\Omega)e^{j\Omega nT_s}d\Omega$$

Em cada integral, mude a variável de integração para $v = \Omega - k\omega_s$:

$$x_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\omega_s} X(v+k\omega_s)e^{j(v+k\omega_s)nT_s}dv$$

Prova da Relação entre Transformadas

Mas $e^{jk\omega_s nT_s} = 1$.
Mude a variável de integração para $\omega = vT_s$

$$x_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boxed{\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega/T_s + k\omega_s)}e^{j\omega n}d\omega$$

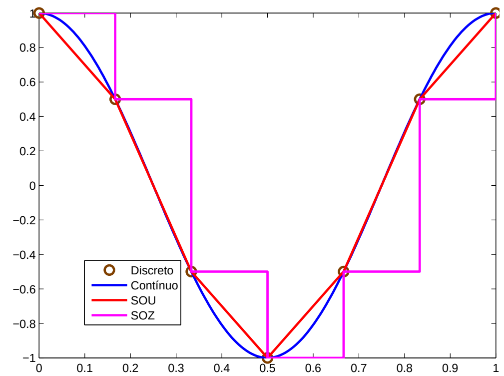
Finalmente, usando inversa da DFT,

$$x_c(nT_s) = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boxed{X(\omega)}e^{j\omega n}d\omega$$

Transformada é única, $\boxed{X(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left((\omega - 2k\pi)\frac{1}{T_s}\right)}$

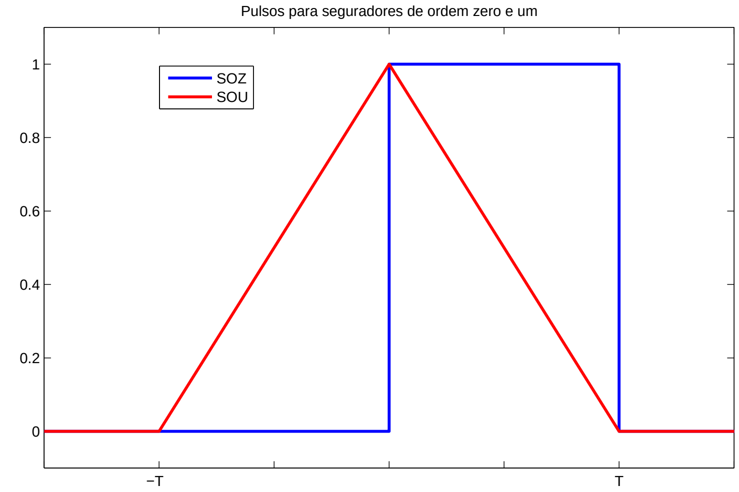
Reconstrução

Conversor DA é baseado em seguradores



Reconstrução

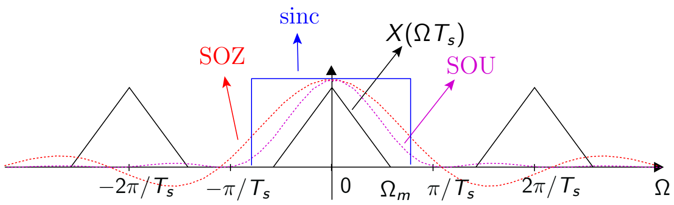
Sinal reconstruído: $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]p(t - nT_s)$,
$p(t)$ é o pulso de reconstrução



Reconstrução na Freqüência

$$\begin{aligned} X_r(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathcal{F}\{p(t-nT_s)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]P(\Omega)e^{-j\Omega n T_s} \\ &= P(\Omega)X(\Omega T_s) \end{aligned}$$

Reconstrução na Freqüência



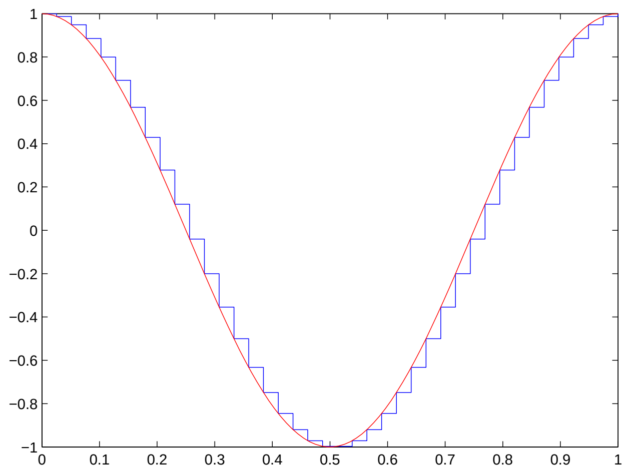
Pulsos práticos

- Distorção na faixa de freqüência de interesse.
- Introdução de componentes de alta freqüência.

Pulso sinc

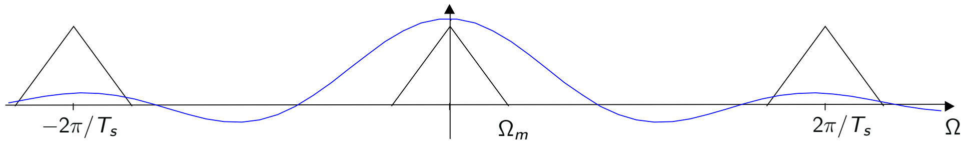
- Permite recuperação perfeita do sinal se $\Omega_m < 2\omega_s$.

Superamostragem e reconstrução



Superamostragem melhora reconstrução!

Superamostragem e freqüência



- Aumenta distância entre Ω_m e $2\pi/T_s$
- Diminui distorção na faixa de interesse
- Melhora atenuação nas altas freqüências

Resumo de Amostragem

- Freqüências analógicas $\Omega + 2k\pi \leftrightarrow$ freqüência digital ΩT_s.
- Freqüência analógica $f_s/2 \leftrightarrow$ freqüência digital π.
- Se $\Omega_m < \omega_s/2$, não há *aliasing*.
  - Reconstrução ideal (sinc) pode recuperar perfeitamente o sinal.
  - Freqüência de Nyquist: $2\Omega_m$.
- Reconstrução prática introduz
  - distorções na faixa de interessse.
  - componentes de alta freqüência.
- Superamostragem:
  - Simplifica filtro passa-baixa antes do A/D
  - Melhora desempenho de D/A simples.