

# Capítulo 1

## Introdução

Sinais são manifestações físicas que carregam informação.

Considere, como exemplo, um sistema de amplificação de sinais sonoros mostrado na Figura 1.1.

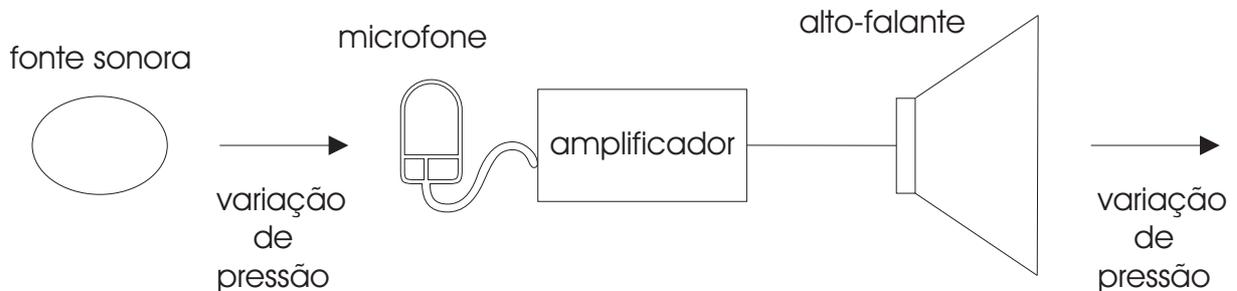


Figura 1.1: Esquema de um sistema de amplificação de som.

A fonte sonora gera uma variação de pressão no ar, a qual, ao atingir o microfone, é transformada em variação elétrica equivalente, de tensão ou de corrente. As variações elétricas são amplificadas e enviadas ao alto-falante que as transforma em ondas de pressão adequadas ao ouvido humano. Com isto conseguimos aumentar o nível de energia das variações acústicas.

A variação de pressão do ar e as variações elétricas são exemplos de sinais. Eles transportam informação, uma mesma informação, ora representada pelas variações acústicas, ora pelas variações elétricas.

Com este exemplo podemos inferir que os sinais estão presentes em uma gama muito ampla de atividades. Destacamos:

1. sinais de voz, de voz de telefonia e de áudio;
2. sinais de imagem (fotografia, radiografia, etc);
3. sinais de vídeo;
4. sinais de telecomunicações;
5. sinais de controle e automação;

6. sinais de monitoração da energia elétrica;
7. sinais biomédicos (eletrocardiograma, eletroencefalograma, tomografia, ressonância magnética, etc);
8. sinais geológicos;
9. sinais astronômicos e de astronáutica;
10. sinais de pesquisas em física, química, biologia;

Os sinais são, em geral, representados por funções de uma ou mais variáveis independentes. Por exemplo, o sinal de voz é uma função da variável tempo. Os sinais de imagem são função de variáveis no espaço bidimensional, como por exemplo dos eixos cartesianos  $x$  e  $y$ . Já os sinais de vídeo dependem não só das variáveis  $x$  e  $y$  mas também do tempo.

Os sinais podem ser classificados em função de seu comportamento ao longo das variáveis independentes. Considerando o caso unidimensional com a variável tempo, apenas por simplicidade, os sinais podem ser contínuos ou discretos. Os sinais contínuos no tempo apresentam valor em cada instante de tempo, ou seja, são funções de uma variável independente contínua. Por outro lado, os sinais discretos no tempo são aqueles que são definidos apenas em instantes discretos do tempo.

Os sinais discretos no tempo podem apresentar amplitudes que variam em uma escala contínua ou em uma escala discreta, dando origem aos sinais discretos com amplitude contínua e aos sinais digitais. Observamos que os sinais digitais apresentam dois graus de discretização: discretização do tempo e da escala de amplitudes.

Vamos estudar estes dois tipos de sinais simultaneamente, de modo a aproveitar os conceitos semelhantes e enfatizar as diferenças.

# Capítulo 2

## Introdução aos Sinais Contínuos e Discretos

### 2.1 Introdução

Vamos tratar aqui da notação e propriedades dos sinais contínuos no tempo e dos sinais discretos no tempo. Iniciaremos com os sinais contínuos.

### 2.2 Sinais contínuos no tempo

Estes sinais serão representados por funções de variáveis contínuas. Por exemplo, sinais de voz, de áudio, eletrocardiograma, etc, serão função de uma variável que é o tempo. Por outro lado, sinais de imagem serão função de suas variáveis espaciais, por exemplo, as coordenadas cartesianas. Os sinais de vídeo serão função de suas coordenadas cartesianas e do tempo.

A Figura 2.1 ilustra um trecho de sinal contínuo no tempo e que é descrito por  $x(t) = \cos(\pi t/10)$ .

A Figura 2.2 ilustra um sinal de voz na saída de um microfone.

Um outro exemplo é um sinal de tensão representando a umidade de um certo local em função do tempo. Este sinal pode ser gerado por um sensor apropriado colocado no local a ser monitorado. Os níveis de umidade são representados por níveis correspondentes de tensão ou de corrente.

### 2.3 Sinais discretos no tempo

São aqueles onde o eixo do tempo foi discretizado, de modo que as amplitudes ocorrem apenas em instantes pré-fixados.

Um exemplo bastante usual é um sinal de voz captado por um microfone e que em seguida é amostrado no tempo, produzindo uma amostra a cada  $T$  segundos. Outro exemplo é o índice semanal de uma bolsa de valores, ou a evolução do saldo de uma conta corrente mês a mês, conforme ilustrado na Figura 2.3. Por fim, uma imagem pode ser discretizada nas direções  $x$  e  $y$ , gerando amostras em um plano bidimensional. Este é o caso das imagens geradas por câmeras digitais para fotografia. As

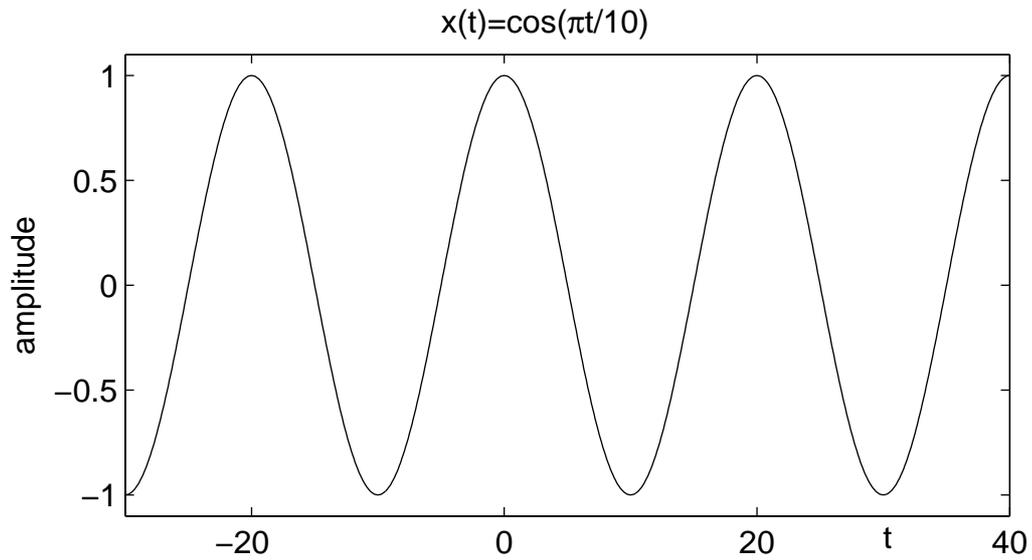


Figura 2.1: Exemplo de um sinal contínuo no tempo.

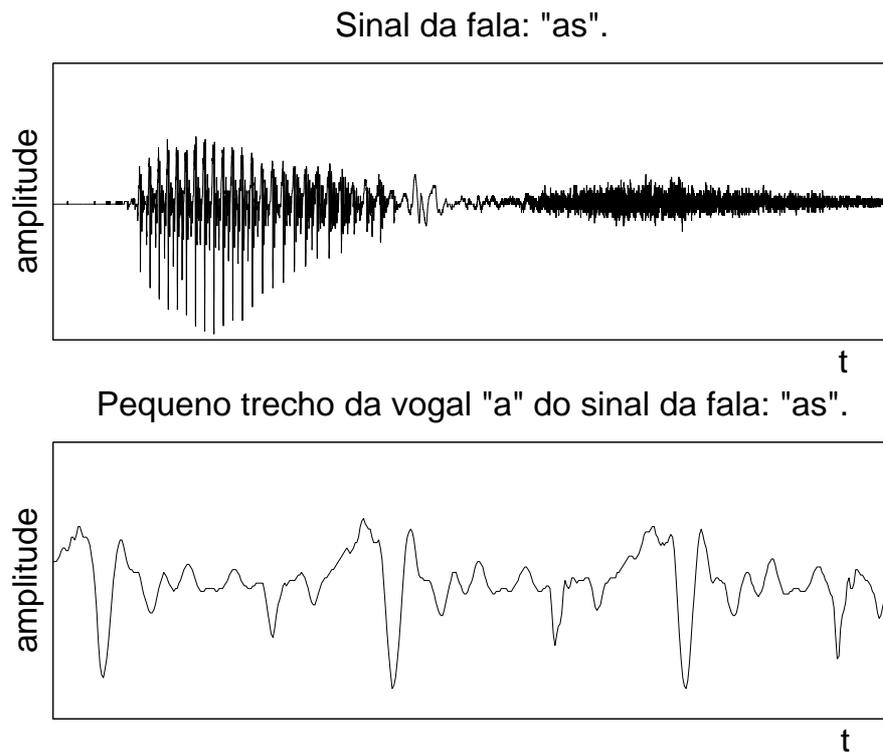


Figura 2.2: Sinal de voz.

imagens de vídeo, como mostradas em um monitor de televisão, são imagens discretizadas que variam com o tempo, gerando então um sinal em três dimensões: duas dimensões espaciais e o tempo.

Trataremos apenas de sinais com uma variável independente, a qual denominaremos genericamente

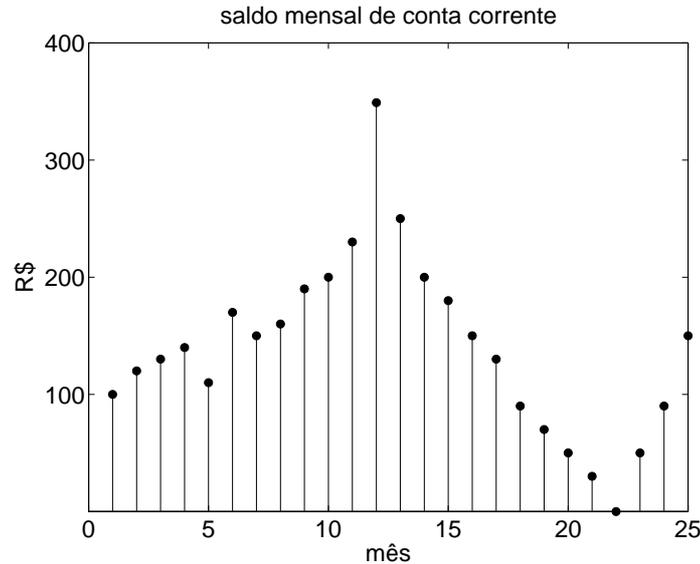


Figura 2.3: Sinal discreto = saldo de uma conta corrente.

de tempo, seja no campo contínuo, seja no discreto.

**Notação:** sinal contínuo =  $x(t)$ ; sinal discreto =  $x[n]$ .

**Observação:**

Os sinais discretos são aqueles onde a variável independente é discreta. Porém, a amplitude é contínua.

Os sinais digitais são um caso particular dos discretos, onde a amplitude também é discreta.

## 2.4 Energia e potência de um sinal

Sejam  $v(t)$  e  $i(t)$  a tensão e a corrente em um dispositivo.

**Definição:**

$$\text{potência instantânea} \triangleq v(t) i^*(t), \quad (2.1)$$

onde  $i^*(t)$  é o complexo conjugado da corrente.

**Definição:**

$$\text{energia no intervalo } t_1 < t < t_2 = \text{energia}(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} v(t) i^*(t) dt. \quad (2.2)$$

**Definição:**

$$\text{potência média no intervalo } t_1 < t < t_2 \triangleq \frac{\text{energia}(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)}. \quad (2.3)$$

**Convenção:** para qualquer tipo de sinal  $x(t)$  definimos:

$$|x(t)|^2 \triangleq \text{potência instantânea normalizada, ou simplesmente potência instantânea.} \quad (2.4)$$

Esta convenção é aplicada a qualquer tipo de sinal, mesmo para aqueles que representam grandezas que não comportam a noção de energia ou potência.

Para o caso em que  $x(t)$  é uma tensão ou uma corrente, a potência normalizada é aquela que seria obtida em um resistor com resistência unitária.

Sempre definimos as demais grandezas como energia, potência média, a partir da potência instantânea.

Para sinais discretos definimos:

$$\text{potência} \triangleq |x[n]|^2; \quad (2.5)$$

$$\text{energia no intervalo } n_1 < n < n_2 = \text{energia}(n_1, n_2) \triangleq \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2; \quad (2.6)$$

$$\text{potência média no intervalo } n_1 < n < n_2 \triangleq \frac{\text{energia}(n_1, n_2)}{n_2 - n_1 + 1}. \quad (2.7)$$

Considerando todo o eixo dos tempos, isto é, para  $-\infty < t < \infty$ , bem como  $-\infty < n < \infty$ , temos as seguintes definições:

$$\text{Energia total} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt; \quad (2.8)$$

$$\text{Potência média total} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T |x(t)|^2 dt}{2T}; \quad (2.9)$$

$$\text{Energia total} \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2; \quad (2.10)$$

$$\text{Potência média total} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{-N}^N |x[n]|^2}{2N + 1}. \quad (2.11)$$

## 2.5 Classificação de sinais

### 2.5.1 Sinais de energia

São aqueles que apresentam energia total finita.

Como consequência, sua potência média total é nula.

#### Exemplo 2.1

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0, \quad a > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Neste caso temos

$$\text{Energia total} = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a},$$

$$\text{Potência média total} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T e^{-2at} dt}{2T} = 0.$$

#### Exemplo 2.2

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau; \\ 0, & t < 0 \text{ e } t > \tau. \end{cases}$$

$$\text{Energia total} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\tau} dt = \tau,$$

$$\text{Potência média total} = 0.$$

### 2.5.2 Sinais de potência

São aqueles que apresentam potência média total finita.

Como consequência, a energia total  $\rightarrow \infty$ .

#### Exemplo 2.3

$$x(t) = a; \quad \forall t; \quad a = \text{real e finito.}$$

Neste caso temos

$$\text{Energia total} = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 dt \rightarrow \infty,$$

$$\text{Potência média total} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T a^2 dt}{2T} = a^2.$$

Podemos mostrar que a potência média total é igual à potência média de qualquer intervalo de tempo.

### Exemplo 2.4

$$x(t) = t; \quad \forall t.$$

Neste caso temos

$$\text{Energia total} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \text{Potência média total} \rightarrow \infty.$$

## 2.6 Transformação da variável independente

### 2.6.1 Deslocamento

Dado um sinal  $x(t)$ , o sinal  $x(t - t_0)$  é igual ao sinal  $x(t)$  deslocado no eixo dos tempos. Se  $t_0$  for positivo, então o novo sinal estará atrasado em relação ao original. Logo, se  $t_0$  for negativo o novo sinal estará adiantado.

A Figura 2.4 ilustra esta transformação.



Figura 2.4: Deslocamento de um sinal no eixo dos tempos.

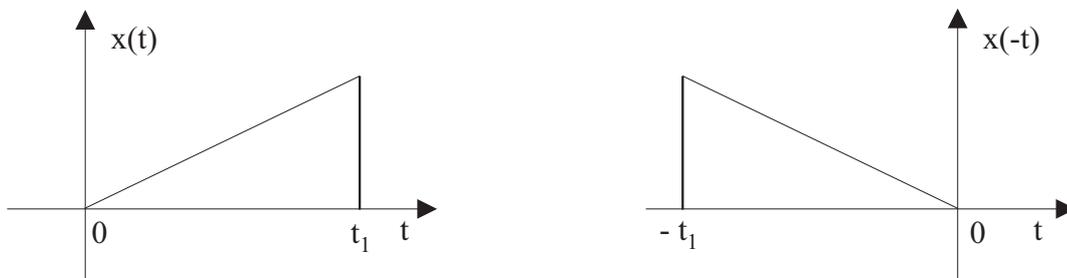


Figura 2.5: Rotação no eixo dos tempos.

## 2.6.2 Inversão no eixo dos tempos

Dado um sinal  $x(t)$ , o sinal  $x(-t)$  é o resultado da rotação de  $x(t)$  ao redor do eixo dos tempos, conforme ilustrado na Figura 2.5.

## 2.6.3 Escalonamento

Dado um sinal  $x(t)$ , o sinal  $x(at)$ ,  $a > 0$ , é uma versão ampliada ou reduzida de  $x(t)$ . A ampliação ocorre quando  $0 < a < 1$ , enquanto que  $a > 1$  provoca a redução. A Figura 2.6 ilustra os dois casos.

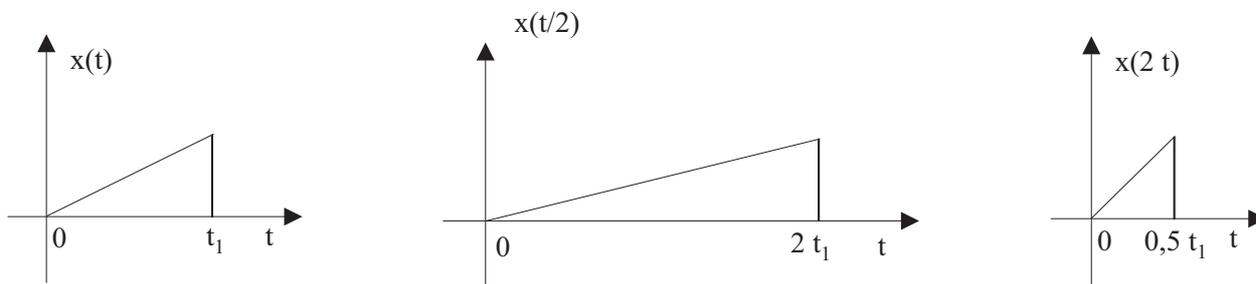


Figura 2.6: Expansão e redução de um sinal.

Estas propriedades também são válidas para os sinais discretos.

## 2.7 Sinais periódicos

### 1- Sinais contínuos

**Definição:** Um sinal contínuo é periódico com período  $T$  se e somente se  $x(t - nT) = x(t)$ ,  $n =$  inteiro,  $\forall t$ .

Se  $x(t) = x(t + T)$ ,  $\forall t$ , então  $x(t) = x(t + nT)$ ,  $\forall t$ . Assim, todos  $\{nT\}$  são períodos.

**Definição:** Período fundamental, é o menor período de  $x(t)$ .

### Exemplo 2.5

$x(t) = \cos(2\pi t/T + \theta)$  é periódico com período fundamental  $T$  segundos.

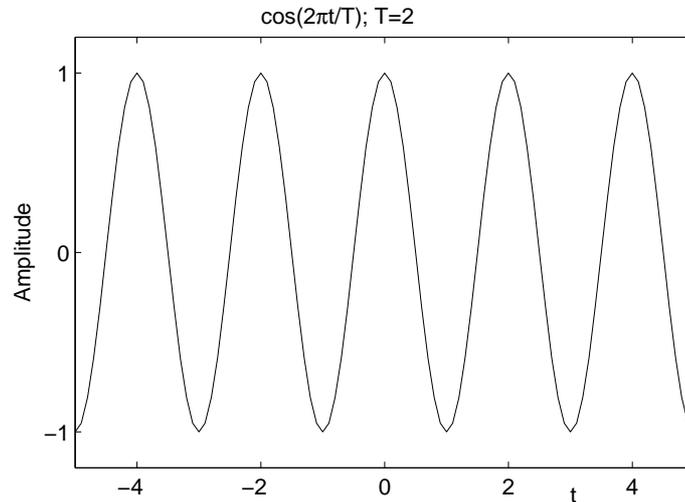


Figura 2.7: Sinal senoidal.

A Figura 2.7 ilustra este sinal. O número de ciclos de oscilação por segundo é  $f = 1/T$  e  $f$  é a frequência em Hertz ( $Hz$ ).

### Exemplo 2.6

$x(t) = \sin(2\pi t/T + \theta)$  é periódico com período fundamental  $T$  segundos. Também,  $x(t) = \sin(2\pi t/T + \theta) = \cos(2\pi t/T + \theta - \pi/2)$ .

### Exemplo 2.7

O trem de pulsos retangulares da Figura 2.8 é um sinal periódico com período fundamental  $T$ .

### Exemplo 2.8

O sinal  $x(t) = a$  ( $a =$  constante real) pode representar o nível de tensão constante de uma bateria. Este sinal pode ser considerado periódico e, neste caso, qualquer número real é um período.

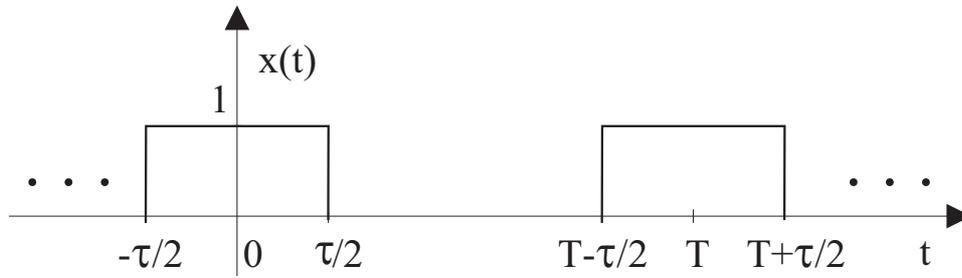


Figura 2.8: Trem de pulsos retangulares.

## 2- Sinais discretos

**Definição:**  $x[n]$  é periódico com período  $N$  se e somente se  $x[n - N] = x[n]$ ,  $N = \text{inteiro}$ ,  $\forall n$ .

### Exemplo 2.9

$x[n] = \cos[\pi n/15]$  é periódico com período com  $N = 30$ , conforme ilustrado na Figura 2.9.

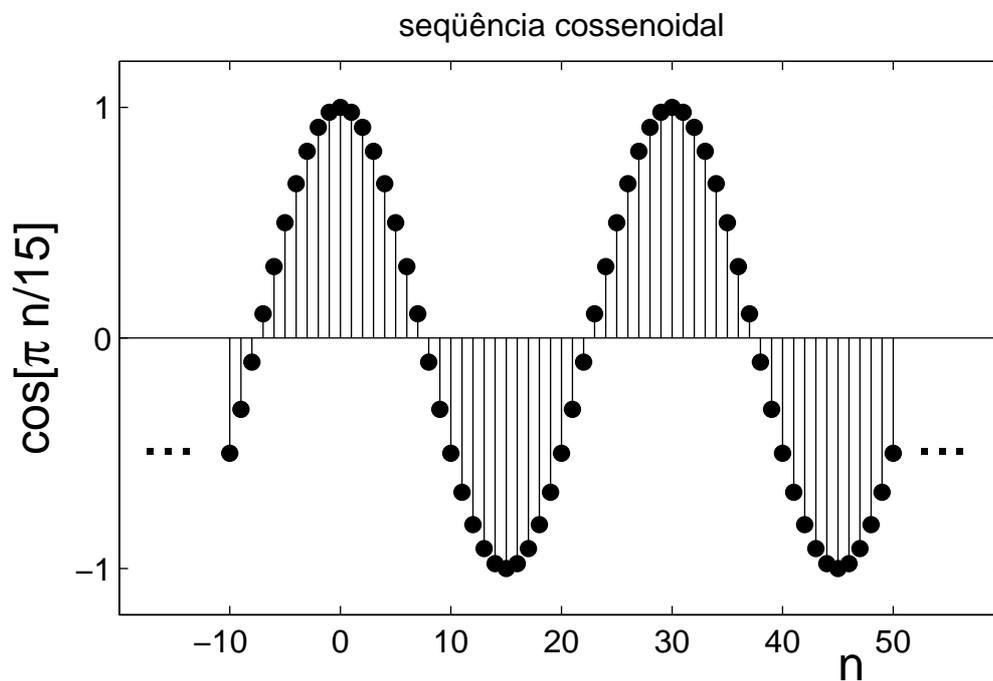


Figura 2.9: Sequência periódica  $x[n] = \cos[\pi n/15]$ .

## 2.8 Sinais pares e ímpares

**Definição:**

- $x(t)$  é par se e somente se  $x(t) = x(-t)$ ,  $\forall t$ .
- $x(t)$  é ímpar se e somente se  $x(t) = -x(-t)$ ,  $\forall t$ .

As mesmas definições são válidas para os sinais discretos

### Exemplo 2.10

$x[n] = \cos[\pi n/15]$  é par, ao passo que  $x[n] = \sin[\pi n/15]$  é ímpar.

Pode-se verificar que se  $x(t)$  ( $x[n]$ ) é ímpar, então  $x(0) = 0$  ( $x[0] = 0$ ).

**Definição:** Para qualquer  $x(t)$ , temos  $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ , onde

- $x_p(t) = \{x(t) + x(-t)\}/2$  é a componente par de  $x(t)$ .
- $x_i(t) = \{x(t) - x(-t)\}/2$  é a componente ímpar de  $x(t)$ .

O mesmo vale para os sinais discretos.

### Exemplo 2.11

Seja  $x[n] = e^{-|n|}$ .

- $x[n] = x[-n]$ ; portanto,  $x[n]$  é par.
- $x_p[n] = x[n]$ ;  $x_i[n] = 0$ .

### Exemplo 2.12

Seja

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 - e^{-t}, & t > 0. \end{cases}$$

- $x(t) \neq \pm x(-t)$ ; portanto,  $x(t)$  não tem simetria.

•

$$x_p(t) = \begin{cases} (1 - e^t)/2, & t < 0; \\ (1 - e^{-t})/2, & t > 0. \end{cases}$$

•

$$x_i(t) = \begin{cases} (-1 + e^t)/2, & t < 0; \\ (1 - e^{-t})/2, & t > 0. \end{cases}$$

## 2.9 Sinais exponenciais complexos contínuos

A forma geral de um sinal exponencial complexo contínuo é

$$x(t) = ce^{at}, \quad -\infty < t < \infty, \quad c \text{ e } a \text{ complexos.}$$

Formam uma família de sinais, os quais são importantes na descrição dos fenômenos físicos e para a composição de outros sinais.

### 2.9.1 Exponenciais reais

Neste caso as constantes  $c$  e  $a$  são reais, isto é,

$$x(t) = ce^{at}, \quad -\infty < t < \infty, \quad c \text{ e } a \text{ reais.}$$

A Figura 2.10 ilustra este tipo de exponencial.

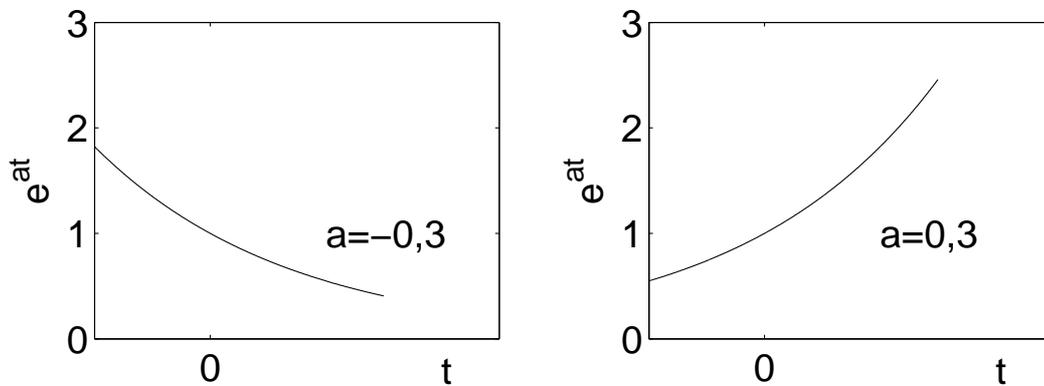


Figura 2.10: Exemplos de exponenciais reais.

### 2.9.2 Exponenciais complexas periódicas e sinais senoidais

Neste caso  $c = 1$  e  $a = j\omega_0$ , isto é,

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Este tipo de exponencial é periódica com período  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , pois

$$e^{j\omega_0(t+2\pi/\omega_0)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 2\pi/\omega_0} = e^{j\omega_0 t}$$

Usando a Fórmula de Euler:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\text{sen}(\omega_0 t),$$

concluimos que  $\cos(\omega_0 t)$  e  $\text{sen}(\omega_0 t)$  também são periódicas com período  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

O período  $T_0$  é dado em segundos, enquanto que a frequência  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  é dada em radianos/segundos. Também,  $\omega_0 = 2\pi f_0$  onde  $f_0$  é a frequência em Hertz.

A Figura 2.11 mostra cossenóides nas frequências  $\omega_0 = \pi/2$  e  $\omega_0 = 2\pi$ . Podemos notar que enquanto o período  $T_0$  decresce de  $T_0 = 4$  para  $T_0 = 1$  a frequência  $f_0$  cresce de  $f_0 = 1/4$  para  $f_0 = 1$ , fazendo com que a cossenóide oscile mais rapidamente.

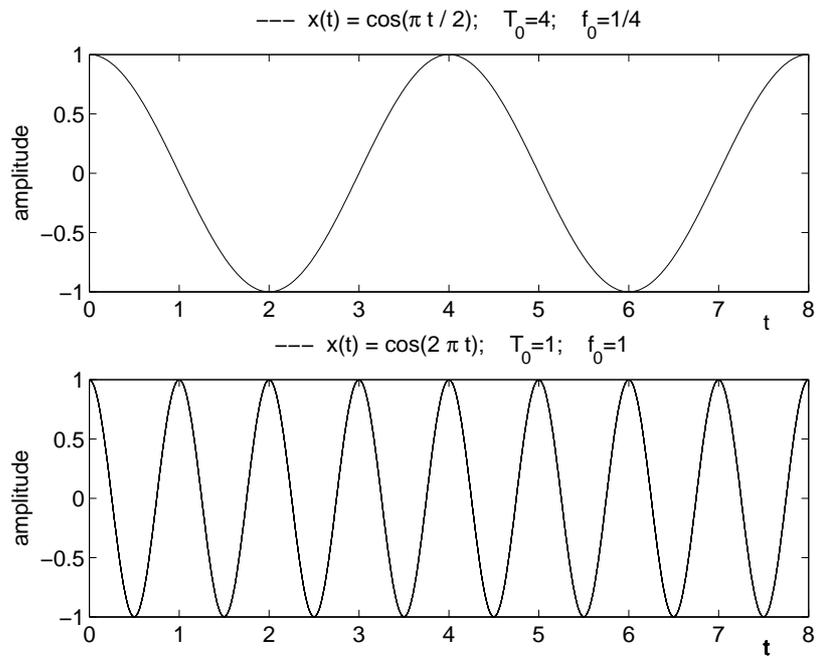


Figura 2.11: Exemplos de sinais senoidais reais.

### Energia e potência de $e^{j\omega_0 t}$

A energia de um período é dada por

$$\begin{aligned} \text{Energia de um período} &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = T_0. \end{aligned}$$

Obviamente a energia total é ilimitada.

A potência média de um período é dada por

$$\text{Potência média de um período} = (\text{Energia de um período})/T_0 = 1.$$

Como a potência média total é a média das potências médias dos períodos, temos

$$\text{Potência média total} = 1.$$

### Exemplo 2.13

Seja  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ . Para este sinal temos:

$$\begin{aligned}
\text{Potência média total} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |A \cos(\omega_0 t + \theta)|^2 dt \\
&= \frac{A^2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt \\
&= \frac{A^2}{2T_0} \int_0^{T_0} \{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)\} dt \\
&= A^2/2.
\end{aligned}$$


---

### 2.9.3 Exponenciais complexas gerais

São do tipo

$$x(t) = ce^{at}; \quad c = |c|e^{j\theta}; \quad a = r + j\omega,$$

ou seja,

$$x(t) = |c|e^{rt}e^{j(\omega t + \theta)},$$

onde  $|c|e^{rt}$  é a amplitude com uma variação exponencial e  $e^{j(\omega t + \theta)}$  é periódica.

Esta exponencial pode também ser escrita como

$$x(t) = |c|e^{rt}\{\cos(\omega t + \theta) + j\text{sen}(\omega t + \theta)\}.$$

de onde obtemos as definições de cossenóide e senóide com amplitude variando exponencialmente.

A Figura 2.12 ilustra a cossenóide com amplitude amortecida ( $r < 0$ ).

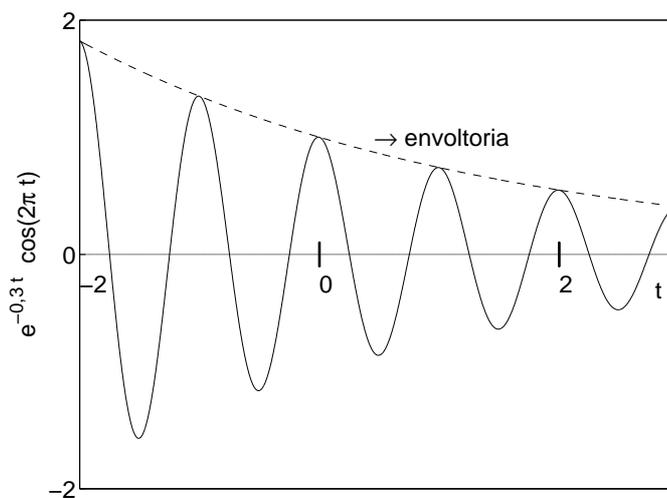


Figura 2.12: Cossenóide amortecida.

**Exemplo 2.14**

Vamos mostrar que

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t} = 2 e^{j2,5t} \cos(0,5t).$$

Para isto, coloque em evidência um termo exponencial com expoente igual à média aritmética dos expoentes:

$$x(t) = e^{j2,5t} \{e^{-j0,5t} + e^{j0,5t}\} = 2 e^{j2,5t} \{0,5e^{-j0,5t} + 0,5e^{j0,5t}\} = 2 e^{j2,5t} \cos(0,5t) \text{ cqd.}$$

## 2.10 Seqüências exponenciais

Vamos usar duas formas de representação:

$$x[n] = c\alpha^n = ce^{\beta n}, \quad -\infty < n < \infty, \quad e^\beta = \alpha. \quad (2.12)$$

### 2.10.1 Seqüências exponenciais reais

Neste caso  $c$  e  $\alpha$  (ou  $\beta$ ) são reais.

Temos vários casos, conforme o valor de  $\alpha$ , como mostrado na Figura 2.13.

### 2.10.2 Seqüências exponenciais complexas com amplitude constante e seqüências senoidais

São obtidas de (2.12) fazendo  $c = 1$  e  $\beta = j\omega_0$ , resultando em

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}. \quad (2.13)$$

Como  $e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\text{sen}(\omega_0 n)$ , temos que

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 n) &= \Re e^{j\omega_0 n}, \\ \text{sen}(\omega_0 n) &= \Im m(e^{j\omega_0 n}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

A energia e a potência de uma seqüência exponencial complexa são:

$$\begin{aligned} \text{Energia total} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{j\omega_0 n}|^2 \longrightarrow \infty, \quad \text{pois } |e^{j\omega_0 n}| = 1; \\ \text{Potência média total} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |e^{j\omega_0 n}|^2 = 1. \end{aligned}$$

Por fim, a seqüência exponencial complexa, bem como as seqüências senoidais, não são necessariamente periódicas, como veremos logo adiante.

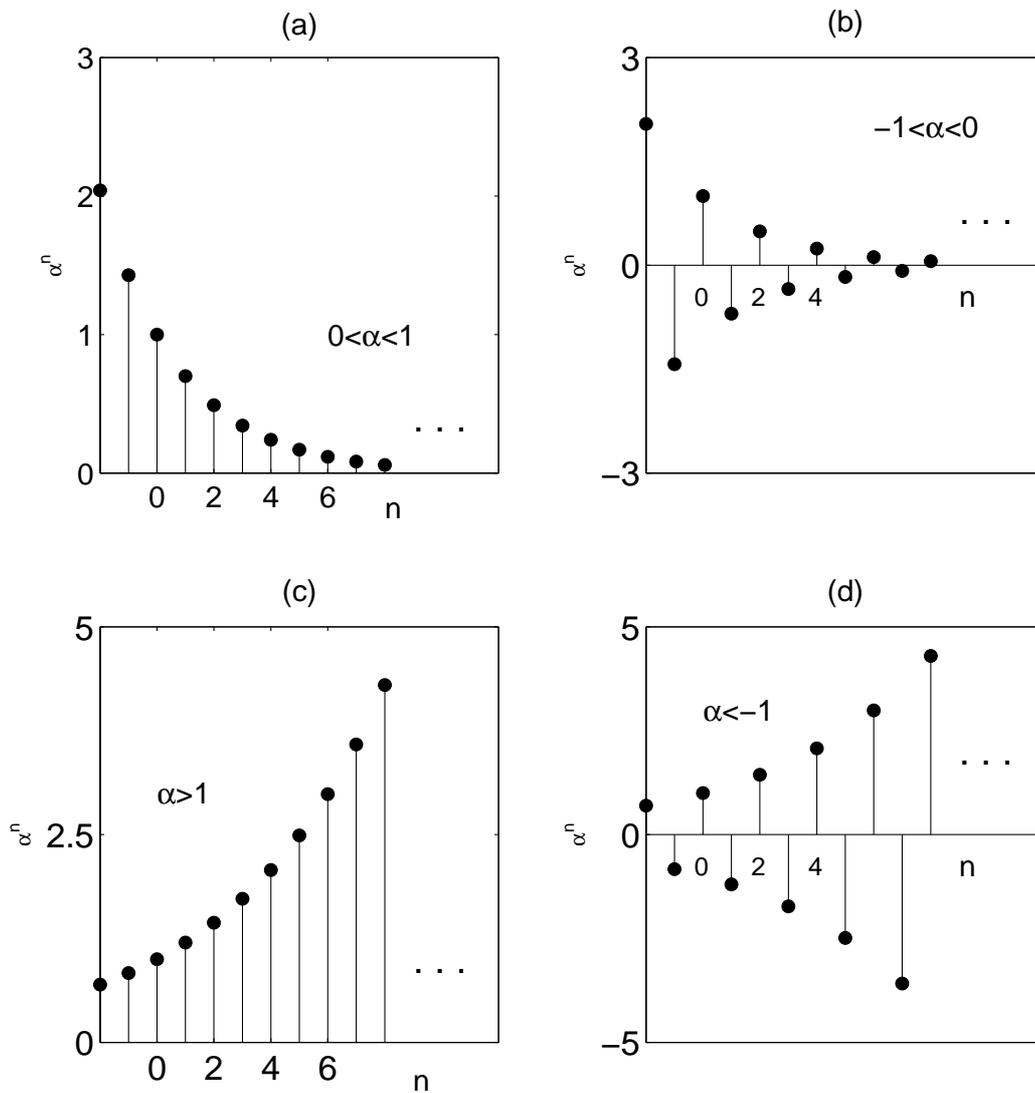


Figura 2.13: Seqüências exponenciais reais.

### 2.10.3 Seqüência exponencial complexa geral

São dadas por  $c = |c|e^{j\theta}$  e  $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ , ou seja

$$x[n] = |c||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}. \quad (2.15)$$

A partir deste tipo de seqüência definimos as seqüências senoidais amortecidas como a parte real ou a imaginária da seqüência geral.

## 2.11 Propriedades de periodicidade da seqüência exponencial

Há similaridades e diferenças entre  $e^{j\omega_0 t}$  e  $e^{j\omega_0 n}$ . A seguir estão analisadas estas questões.

- $e^{j\omega_0 t}$  é distinta para cada valor distinto de  $\omega_0$ .

Entretanto,

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}.$$

Logo,  $e^{j\omega_0 n}$  é periódica em relação ao parâmetro  $\omega_0$  com período fundamental igual a  $2\pi$ .

Assim, todas as versões distintas de  $e^{j\omega_0 n}$  são descritas com

$$\theta \leq \omega_0 < \theta + 2\pi,$$

ou seja, os valores de  $\theta$  em um intervalo de tamanho  $2\pi$  são suficientes para obtermos a descrição de todas as exponenciais discretas.

É comum usar  $\theta = 0$  ou  $\theta = -\pi$  na expressão anterior.

Estas mesmas observações se aplicam às seqüências senoidais derivadas da seqüência exponencial. A Figura 2.14 ilustra esta propriedade para amostras colhidas de dois sinais senoidais.

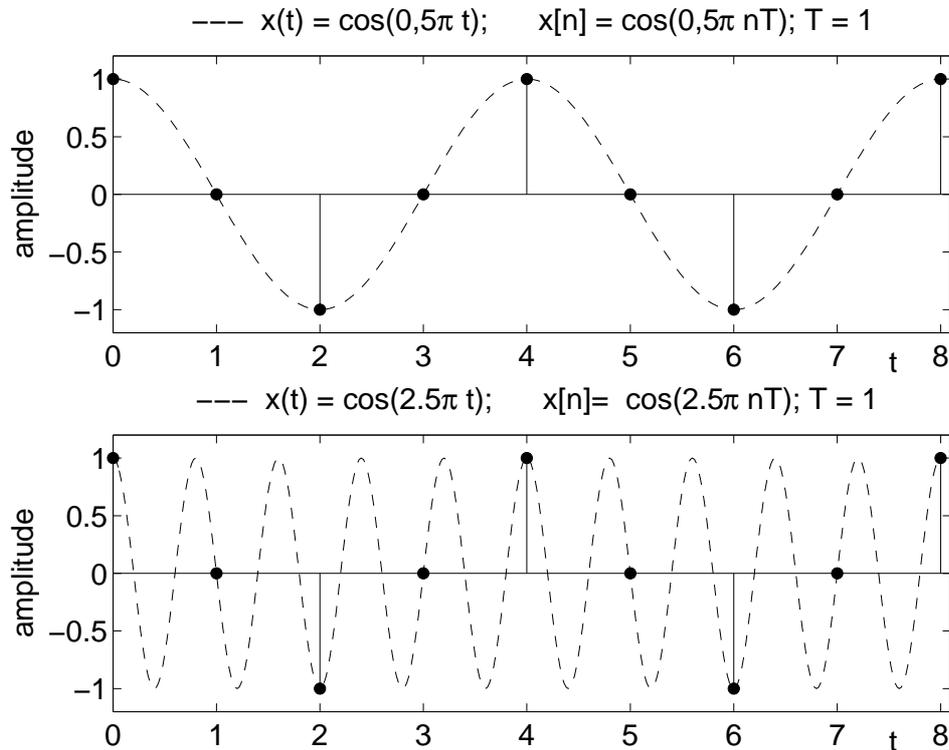


Figura 2.14: Ilustração de seqüências senoidais com  $\omega_0$  e  $\omega_0 + 2k\pi$ .

- $e^{j\omega_0 t}$  é periódica em  $t$  para qualquer valor de  $\omega_0$ . O período fundamental é  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

Porém,  $e^{j\omega_0 n}$  nem sempre é periódica em  $n$ , pois a periodicidade exige que exista um inteiro  $N$  tal que

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}, \quad \forall N.$$

Isto somente será verdade se  $e^{j\omega_0 N} = 1$ , ou seja, se  $\omega_0 N = 2m\pi$ , para algum  $m =$  inteiro. Mas para que esta última igualdade se verifique para  $n$  e  $m$  inteiros, é preciso que

$$\omega_0 = \frac{m}{N}2\pi, \quad (2.16)$$

ou seja, que  $\omega_0$  seja um número racional vezes o número  $\pi$ .

Portanto,

$$e^{j\omega_0 n} \text{ é periódica em } n \text{ se e somente se } \omega_0 = \text{racional} \times \pi$$

**Exemplo 2.15**

$e^{j5\pi n/3}$  é periódica no eixo  $n$  com período fundamental  $N_0 = 6$  pois  $\omega_0 = 5\pi/3$ . Comprovando,

$$e^{j5\pi(n+N_0)/3} = e^{j5\pi n/3} \cdot e^{j5\pi N_0/3}$$

e, fazendo  $5\pi N_0/3 = 2\pi m$ ,  $m = \text{inteiro}$ , para  $m = 5$  obtemos  $N_0 = 6$  e  $e^{j5\pi N_0/3} = 1$ . Logo,

$$e^{j5\pi(n+6)/3} = e^{j5\pi n/3} \text{ para todo } n.$$

**Exemplo 2.16**

$e^{j5n/3}$  não é periódica no eixo  $n$ , pois  $\omega_0 = 5/3$ . Comprovando,

$$e^{j5(n+N_0)/3} = e^{j5n/3} \cdot e^{j5N_0/3}$$

e  $5N_0/3 \neq 2\pi m$ ,  $m = \text{inteiro}$ . Logo,  $e^{j5N_0/3} \neq 1$ .

- $e^{j\omega_0 t}$  oscila com a frequência  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Quanto maior o valor de  $\omega_0$ , maior o número de oscilações por segundo e menor o período  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

Porém, para  $e^{j\omega_0 n}$ ,  $\omega_0 = \text{racional} \times \pi$ , isto é, para  $e^{j\omega_0 n}$  periódica, a frequência de oscilação cresce com  $\omega_0$  para  $0 \leq \omega_0 \leq \pi$ . Mas decresce com  $\omega_0$  para  $\pi < \omega_0 \leq 2\pi$ , pois a exponencial é periódica com  $\omega_0$  com período  $2\pi$  e o comportamento ao redor de  $\omega_0 = 2\pi$  é igual ao comportamento ao redor de  $\omega_0 = 0$ .

O mesmo comportamento vale para os sinais senoidais correspondentes.

- O período fundamental  $N_0$  de  $e^{j\omega_0 n}$ ,  $\omega_0 = \text{racional} \times \pi$ , pode ser determinado como se segue.  $N_0$  é período. Então  $N_0\omega_0 = \text{inteiro positivo} \times 2\pi$ . Além disto,  $N_0$  é período fundamental se  $N_0$  é o menor inteiro positivo que satisfaz esta relação. Logo,

$$N_0 \triangleq \text{menor inteiro tal que } N_0\omega_0 = \text{inteiro positivo} \times 2\pi.$$

Ou

$$N_0 \triangleq \text{menor inteiro tal que } N_0 = \text{inteiro positivo} \times 2\pi/\omega_0.$$

Portanto,

$$N_0 = \min_{\{\text{inteiros} > 0\}} \left\{ \text{inteiro positivo} \times \frac{2\pi}{\omega_0} \right\}. \quad (2.17)$$

**Exemplo 2.17**

$e^{j2\pi n/5}$  é periódica com  $N_0 = 5$ , pois

$$N_0 = \min_{\{\text{inteiros} > 0\}} \left\{ \text{inteiro positivo} \times \frac{2\pi}{2\pi/5} \right\} = 5.$$

**Exemplo 2.18**

$e^{j4\pi n/5}$  é periódica com  $N_0 = 5$ , pois

$$N_0 = \min_{\{\text{inteiros} > 0\}} \left\{ \text{inteiro positivo} \times \frac{2\pi}{4\pi/5} \right\} = 5.$$

Esta forma de se determinar o período fundamental também se aplica aos sinais senoidais discretos.

**Exemplo 2.19**

$x[n] = e^{j2\pi n/3} + e^{j3\pi n/4}$  é periódica com período fundamental  $N_0 = 24$ , pois  $e^{j2\pi n/3}$  tem período 3,  $e^{j3\pi n/4}$  tem período 8 e o mínimo múltiplo comum entre 3 e 8 é 24. Observe que após 24 amostras ocorre uma repetição de cada parcela de  $x[n]$  e que este é o menor número onde esta repetição ocorre simultaneamente.

## 2.12 Seqüência impulso unitário e seqüência degrau

Esta seção apresenta dois tipos de seqüências teóricas que são importantes para o desenvolvimento de conceitos de sinais e sistemas discretos.

### 2.12.1 Seqüência impulso unitário

**Definição:**

$$\text{Seqüência impulso unitário} = \delta[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

A Figura 2.15a) ilustra a seqüência  $\delta[n]$ , enquanto que a Figura 2.15b) ilustra a seqüência  $\delta[n-4]$ .

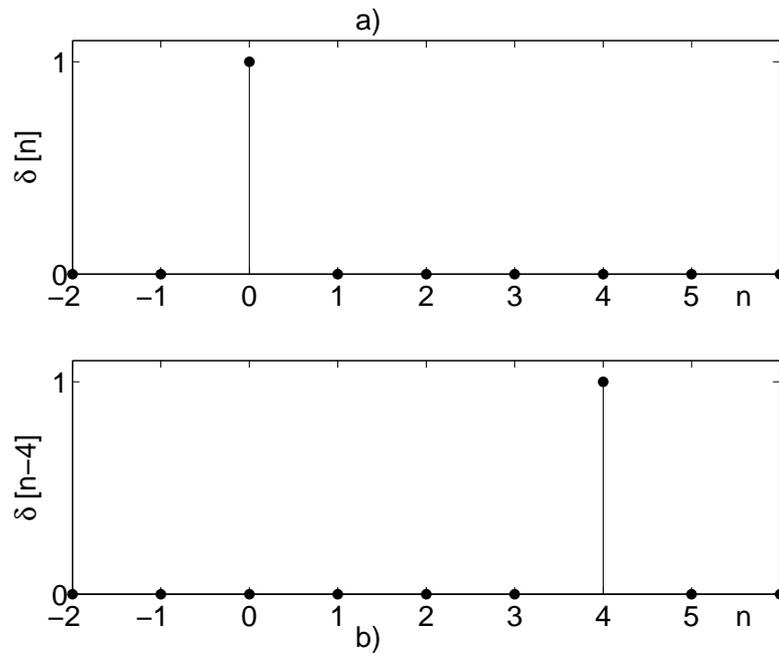


Figura 2.15: Seqüências impulso unitário: (a)  $\delta[n]$ ; (b)  $\delta[n - 4]$ .

### 2.12.2 Seqüência degrau unitário

Definição:

$$\text{Seqüência degrau unitário} = u[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

A Figura 2.16 ilustra a seqüência  $u[n]$ .

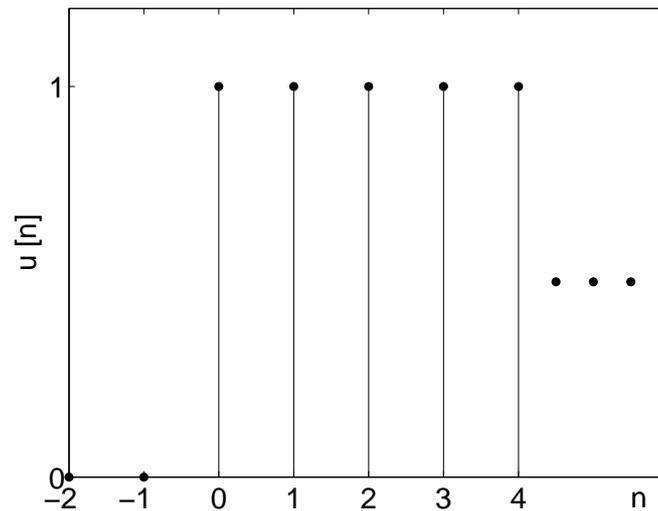


Figura 2.16: Seqüência degrau unitário.

Relações entre  $\delta[n]$  e  $u[n]$  :

- 1)  $\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$ ;
- 2)  $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$ ;
- 3)  $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]$ ;

Propriedade amostradora da seqüência  $\delta[n]$  :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (2.20)$$

## 2.13 Função degrau e impulso unitário

### 2.13.1 Função degrau

Definição:

$$\text{Função degrau} = u(t) \triangleq \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

A Figura 2.17 ilustra a função  $u(t)$ .

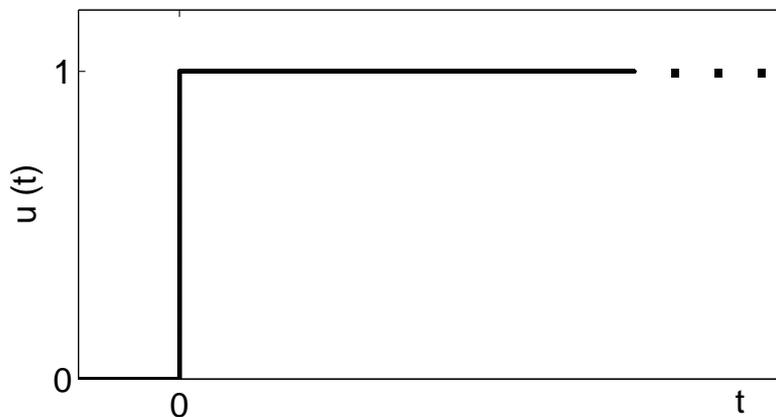


Figura 2.17: Função degrau.

$u(t)$  é descontínua em  $t = 0$ , pois o limite à esquerda de  $u(t)$  é diferente do limite à direita.

### 2.13.2 Impulso unitário

Não é uma função pois não tem valor definido para todos os valores da variável  $t$ . É definida como o limite de funções como será mostrado a seguir.

Considere  $\tau > 0$  e

$$u_\tau(t) \triangleq \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t/\tau, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (2.22)$$

conforme mostrado na Figura 2.18.

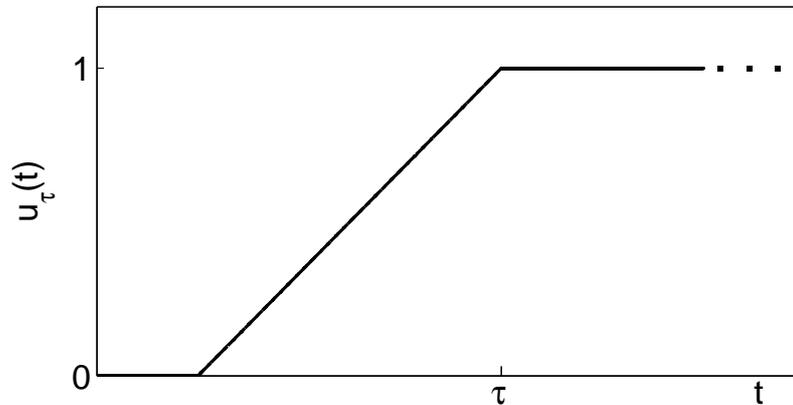


Figura 2.18: Função  $u_\tau(t)$ .

Observe que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u_\tau(t) = u(t). \quad (2.23)$$

Seja agora a função  $\delta_\tau(t)$

$$\delta_\tau(t) \triangleq \frac{du_\tau(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ e } t > \tau; \\ 1/\tau, & 0 < t < \tau. \end{cases} \quad (2.24)$$

A Figura 2.19 ilustra a função  $\delta_\tau(t)$ .

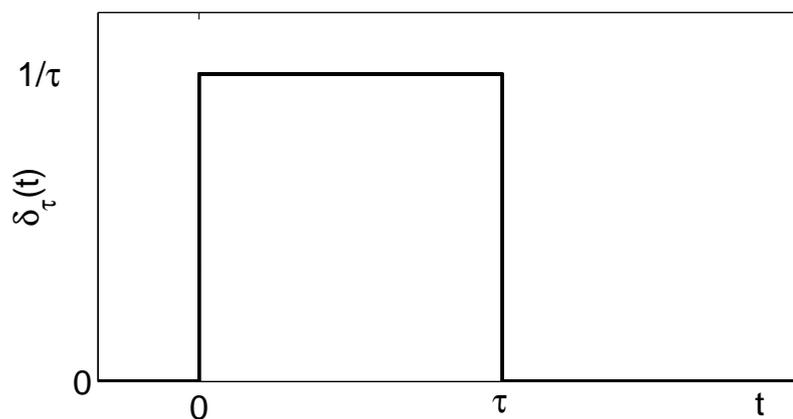


Figura 2.19: Função  $u_\tau(t)$ .

**Definição:**

$$\text{impulso} = \delta(t) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t). \quad (2.25)$$

O impulso possui as seguintes propriedades:

- o impulso só é diferente de zero em  $t = 0$ .
- a amplitude do impulso diverge, tendendo a  $\infty$ .
- a área do impulso é igual a 1. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

onde  $\epsilon$  é qualquer número real positivo.

- o impulso não é função pois não tem amplitude definida em  $t = 0$ . É definida sempre como o limite de uma função apropriada.

O impulso é representado como nas Figuras 2.20a) e 2.20b). Observe que o número ao lado da seta

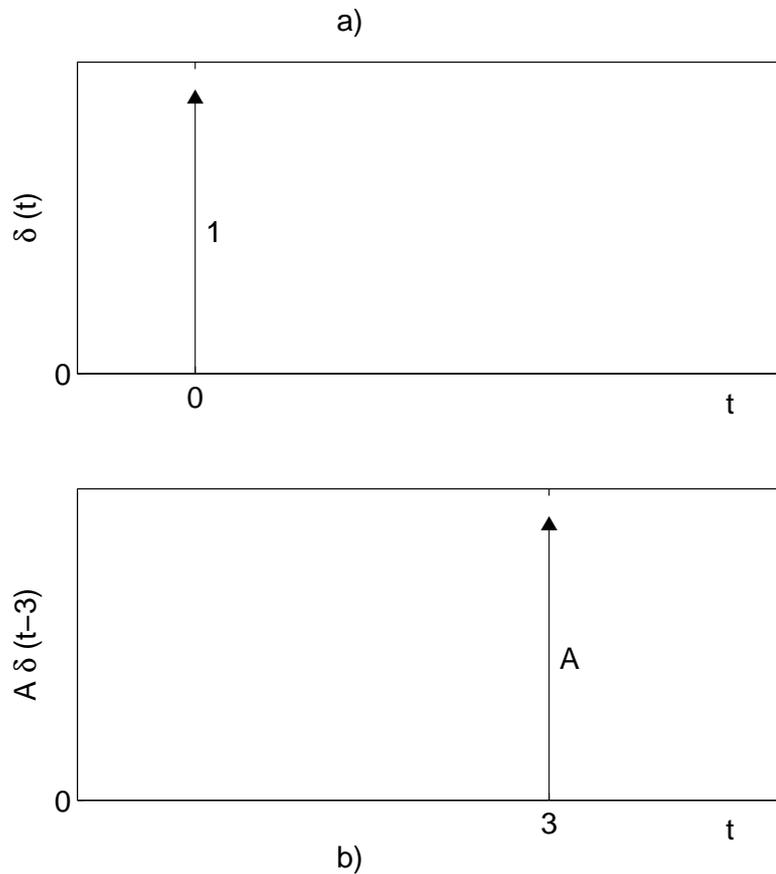


Figura 2.20: Impulso: a)  $\delta(t)$ ; b)  $A\delta(t - 3)$ .

representa a área do impulso. Observe também que não tem sentido falar da amplitude do impulso pois esta não tem valor finito.

### Propriedades

- 

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t_0 \text{ e } t_1 > 0 \text{ ou } t_0 \text{ e } t_1 < 0; \\ 1, & t_0 < 0 \text{ e } t_1 > 0; \\ -1, & t_0 > 0 \text{ e } t_1 < 0. \end{cases}$$

- 

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{du_\tau(t)}{dt} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow 0} u_\tau(t) \right\} = \frac{du(t)}{dt}.$$

Logo,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (2.26)$$

- Seja “a” uma constante arbitrária. Podemos calcular:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} a\delta_\tau(t) = a \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t) = a\delta(t).$$

Portanto,  $a\delta(t)$  é um impulso com área igual a “a”.

- 

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t - t_0) = \delta(t - t_0).$$

- 

$$\delta(t) = \delta(-t).$$

- 

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (2.27)$$

- 

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(\sigma - t) d\sigma. \quad (2.28)$$

- 

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0). \quad (2.29)$$

- 

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0). \quad (2.30)$$

**Exemplo 2.20**

Seja o sinal  $x(t)$  mostrado na Figura 2.21a). Este sinal é dado por  $x(t) = 2u(t - 1) - 3u(t - 2) + 2u(t - 3)$ .

A Figura 2.21b) mostra que a derivada de  $x(t)$  é  $y(t) = 2\delta(t - 1) - 3\delta(t - 2) + 2\delta(t - 3)$ , ou seja, é composta por impulsos. Este resultado pode ser demonstrado usando a propriedade da derivada da função degrau.

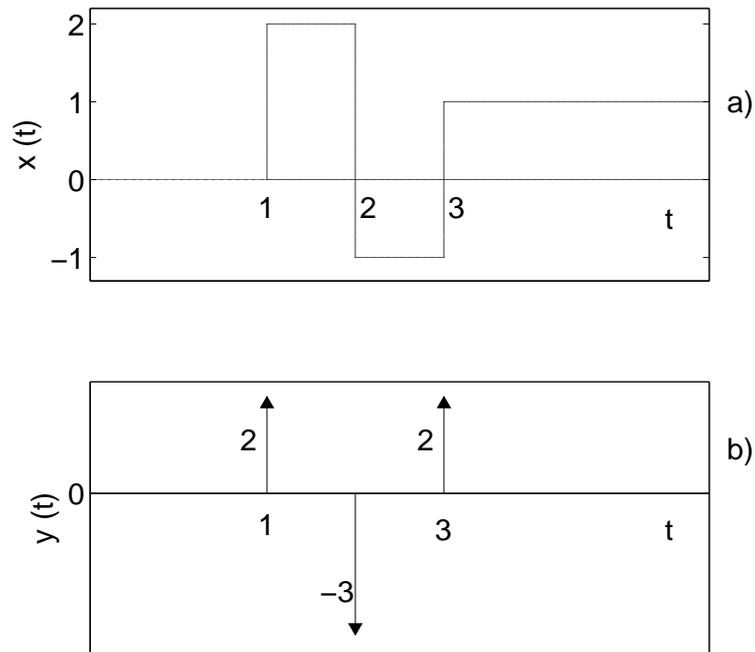


Figura 2.21: a) Sinal  $x(t)$ ; b)  $y(t)$ =derivada de  $x(t)$ .

## 2.14 Exercícios

1. Determine a potência média total e a energia total dos sinais a seguir. Classifique cada um deles como sinal de energia ou de potência.

a)  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ;    b)  $x(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$ ;    c)  $x(t) = \cos(t)$ ;  
 d)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ ;    e)  $x[n] = e^{j(\pi n/2+\pi/8)}$ ;    f)  $x[n] = \cos(\pi n/4)$ .

2. Determine a potência média e a energia dos seguintes sinais nos intervalos indicados:

a)  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ,  $0 < t < 1$ ;    b)  $x(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$ ,  $0 < t < \pi$ ;    c)  $x(t) = \cos(t)$ ,  $\pi < t < 3\pi$ ;  
 d)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ ,  $0 \leq n \leq 4$ ;    e)  $x[n] = e^{j(\pi n/2+\pi/8)}$ ,  $0 \leq n < 4$ ;  
 f)  $x[n] = \cos(\pi n/4)$ ,  $8 \leq n < 16$ .

3. Seja  $x[n]$  tal  $x[n] = 0$  para  $n < -2$  e  $n > 4$ . Determine os valores de  $n$  para os quais os sinais a seguir são, com certeza, nulos.

a)  $x[n-3]$ ;    b)  $x[n+4]$ ;    c)  $x[-n]$ ;    d)  $x[-n+2]$ ;    e)  $x[-n-2]$ .

4. Seja  $x(t)$  tal  $x(t) = 0$  para  $t < 3$ . Determine os valores de  $t$  para os quais os sinais a seguir são, com certeza, nulos.

a)  $x(1-t)$ ;    b)  $x(1-t) + x(2-t)$ ;    c)  $x(1-t)x(2-t)$ ;    d)  $x(3t)$ ;    e)  $x(t/3)$ .

5. Determine os valores da variável independente para os quais a parte par dos sinais a seguir é com certeza nula.

a)  $x[n] = u[n] - u[n-4]$ ;    b)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n-3]$ ;    c)  $x(t) = \text{sen}(0,5t)$ ;    d)  $x(t) = e^{-5t}u(t+2)$ .

6. Seja o sinal

$$x(t) = \begin{cases} t/T, & 0 \leq t < T; \\ (-t/T + 2), & T \leq t < 2T; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

conforme mostrado na Figura 2.22. Esboce  $x(-3t+1)$ .

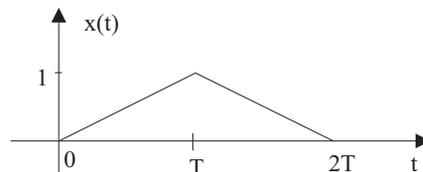


Figura 2.22: Sinal  $x(t)$ .

7. Esboce os sinais  $u(-t)$ ,  $u(-t+5)$ ,  $u(-t/3-5)$ .

8. Mostre como um pulso retangular com amplitude  $A$ , largura  $\tau$  e centrado em  $t = t_0$  pode ser escrito em termos da função degrau unitário.
9. Considere o sinal  $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k]$ . Determine os valores dos inteiros  $M$  e  $n_0$  tais que  $x[n]$  possa ser expresso como  $x[n] = u[Mn - n_0]$ .
10. Expresse a parte real de cada um dos sinais a seguir na forma  $Ae^{-at} \cos(\omega t + \phi)$ , onde  $A$ ,  $a$ ,  $\omega$  e  $\phi$  são números reais com  $A > 0$  e  $-\pi < \phi \leq \pi$ .
- a)  $x(t) = -2$ ; b)  $x(t) = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \cos(3t+2\pi)$ ; c)  $x(t) = e^{-t} \operatorname{sen}(3t+\pi)$ ; d)  $x(t) = j e^{(-2+j100)t}$ .
11. a) Demonstre que se  $x[n]$  é uma seqüência ímpar, então  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$ .
- b) Demonstre que se  $x_1[n]$  é uma seqüência ímpar e  $x_2[n]$  é par, então  $x_1[n]x_2[n]$  é ímpar.
- c) Seja  $x[n]$  uma seqüência arbitrária com componentes par  $x_p[n]$  e ímpar  $x_i[n]$ . Demonstre que
- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2[n]$$
- d) Repita os itens anteriores tomando sinais contínuos no tempo.
12. Demonstre se cada um dos sinais a seguir é periódico ou não. Se for periódico, calcule o período fundamental.
- a)  $x(t) = e^{j(t+\pi/4)}u(t)$ ; b)  $x(t) = j e^{j10t}$ ; c)  $x(t) = e^{(-1+j)t}$ ; d)  $x(t) = u(t) + u(-t)$   
e)  $x(t) = 3 \cos(4t + \pi/3)$ ; f)  $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$ ; g)  $x(t) = [\cos(2t - \pi/3)]^2$ ;  
h)  $x(t) =$  componente par de  $\cos(4\pi t)u(t)$ ; i)  $x(t) =$  componente par de  $\operatorname{sen}(4\pi t)u(t)$ ;  
j)  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}u(2t - n)$ ;
- k)  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k]$ ; l)  $x[n] = e^{j7\pi n}$ ; m)  $x[n] = 3e^{j3\pi(n+0,5)/5}$ ;  
n)  $x[n] = 3e^{j3(n+0,5)/5}$ ; o)  $x[n] = \operatorname{sen}(6\pi n/7+1)$ ; p)  $x[n] = \cos(n/8-\pi)$ ; q)  $x[n] = \cos(\pi n^2/8)$ ;  
r)  $x[n] = \cos(\pi n/2) \cos(\pi n/4)$ ; s)  $x[n] = 2 \cos(\pi n/4) + \operatorname{sen}(\pi n/8) - 2 \cos(\pi n/2 + \pi/6)$   
t)  $x[n] = u[n] + u[-n]$ .
13. Determine o período fundamental dos sinais:
- a)  $x(t) = 2 \cos(10t + 1) - \operatorname{sen}(4t - 1)$ ; b)  $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ .
14. Considere  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ , com período fundamental  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Considere a seqüência  $x[n]$  composta por amostras de  $x(t)$ , isto é,  $x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}$ .
- a) Mostre que  $x[n]$  é periódica se e somente se  $T/T_0$  for um número racional.
- b) Suponha que  $T/T_0$  é racional, isto é,  $T/T_0 = p/q$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros. Calcule o valor do período fundamental de  $x[n]$  e expresse em função de  $\omega_0 T$ .
- c) Nas condições do item b), calcule quantos períodos de  $x(t)$  são necessários para obter as amostras de um período de  $x[n]$ .

15. Demonstre, analiticamente ou graficamente, que  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ .
16. Demonstre, analiticamente ou graficamente, que  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$ .
17. Demonstre, analiticamente ou graficamente: 1)  $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m)$ ; 2)  $u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n - m)$ .
18. Considere o sinal  $x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2)$ . Calcule a energia total do sinal

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

19. Esboce a função  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ . No mesmo esboço, desenhe uma função genérica  $x(t)$ . Baseado nestes esboços, faça um outro desenho representando a função  $y(t) = x(t) \delta_T(t)$ . Modifique a expressão de  $y(t)$ : coloque  $x(t)$  no interior da soma e use as propriedades do impulso unitário.

Justifique a seguinte afirmação:  $y(t)$  contém informação sobre as amostras de  $x(t)$  tomadas a intervalos  $T$ .

20. Seja o sinal  $x(t) = \begin{cases} 0, & t < -2; \\ 1, & -2 < t < 0; \\ 1 - t/2, & 0 \leq t \leq 2; \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

- a) Esboce  $x(\frac{-3t + 1}{2})$ .
- b) Calcule a energia total de  $x(t)$ ;
- c) Calcule a potência média de  $x(t)$  no intervalo  $-2 < t < 2$ ;
- d) Calcule a potência média de  $x(t)$  para  $-\infty < t < \infty$ ;
- e) Calcule a derivada de  $x(t)$  expressando-a em função de  $\delta(t)$  e de  $u(t)$ .
- f) Calcule e esboce a componente par,  $x_p(t)$ , e a componente ímpar,  $x_i(t)$ , de  $x(t)$ .
- g) Calcule  $\int_{-2}^2 x(t) \delta(t - 1) dt$ .



# Capítulo 3

## Sistemas Contínuos e Discretos no Tempo

### 3.1 Introdução

Vamos tratar aqui da notação e das propriedades básicas dos sistemas, com ênfase para os sistemas lineares, causais e invariantes no tempo.

### 3.2 Introdução a sistemas

**Definição:** Sistema é qualquer transformação que, ao ser aplicada em um sinal (entrada), produz um novo sinal (saída).

A Figura 3.1 mostra a representação de um sistema genérico, contínuo ou discreto no tempo.

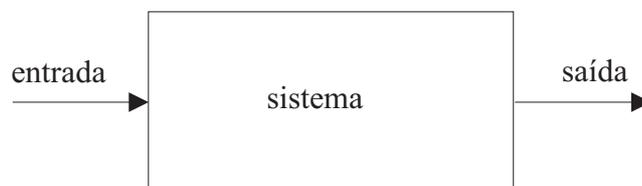


Figura 3.1: Representação de um sistema.

Os circuitos compostos por capacitores, indutores e resistores são exemplos de sistemas contínuos no tempo.

A Figura 3.2 mostra um exemplo de um sistema discreto no tempo. Observe que a seqüência de entrada é enviada a um somador. A seqüência de saída sofre um atraso de uma unidade, gerando  $y[n - 1]$ , a qual é multiplicada por uma constante “a” e enviada ao somador. A saída do somador é a seqüência  $y[n]$  de saída. Logo,  $y[n]$  pode ser escrita como

$$y[n] = x[n] + ay[n - 1].$$

A parcela  $ay[n - 1]$  representa uma realimentação da entrada para o interior do sistema.

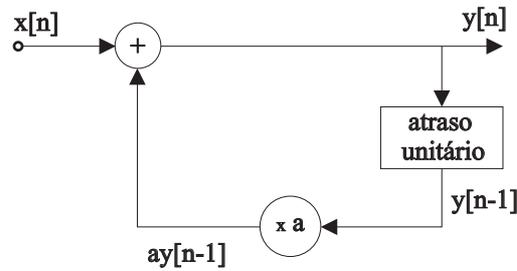


Figura 3.2: Exemplo de um sistema discreto.

### 3.3 Propriedades básicas de sistemas

#### 3.3.1 Causalidade

**Definição:** Um sistema é causal se e somente se a saída em um dado instante não depende de valores futuros da entrada.

- um sistema causal não é antecipativo, isto é, a saída depende apenas de valores atuais e passados da entrada e de valores passados da saída.
- todo sistema que opera em tempo real (isto é, a saída é produzida à medida que a entrada evolui no tempo) é causal.
- sistemas que operam em tempo não-real podem ser não-causais, como, por exemplo, os sistemas cuja entrada tenha sido armazenada em alguma memória como fita magnética, discos ou memória RAM. Este é caso de reprodutores de som a partir de fitas ou discos.

#### Exemplo 3.1

1-  $y[n] = x[n] + x[n - 1]$  representa um sistema causal;

2-  $y[n] = x[n] + x[n + 1]$  representa um sistema não-causal;

3-  $y(t) = x(t) + x(t - t_0)$  representa um sistema causal se  $t_0 > 0$  e não-causal se  $t_0 < 0$ .

#### 3.3.2 Estabilidade BIBO (Bounded Input - Bounded Output, BIBO)

**Definição:** Um sistema é estável se e somente se qualquer entrada com amplitude limitada produz uma saída com amplitude limitada.

De outra forma, seja  $x(t)$  a entrada,  $y(t)$  a saída e  $M_e$  e  $M_s$  dois números finitos. Se  $|x(t)| < M_e, \forall t$ , então um sistema é do tipo BIBO se e somente se existe  $M_s$  tal que  $|y(t)| < M_s, \forall t$ .

**Exemplo 3.2**

- 
- 1-  $y(t) = c x(t - t_0)$  representa um sistema estável desde que  $|c| < \infty$ ;
  - 2-  $y[n] = n x[n]$  representa um sistema instável;
  - 3-  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  representa um sistema instável.
- 

**3.3.3 Invariância com o tempo**

**Definição:** Um sistema é invariante com o tempo se e somente se suas características não variam com o tempo, isto é, se a entrada  $x(t)$  produz a saída  $y(t)$ , então o sistema é invariante com o tempo se e somente se a entrada  $x(t - t_0)$  produz a saída  $y(t - t_0)$ .

A mesma definição vale para os sistemas discretos.

**Exemplo 3.3**

- 
- 1-  $y(t) = c x(t)$  é invariante com tempo pois a entrada  $x(t - t_0)$  produz a saída  $y(t - t_0)$ ;
  - 2-  $y[n] = x[n] + b x[n - 1]$  representa um sistema invariante com o tempo pois para  $x_1[n] = x[n - n_0]$  temos a saída  $y_1[n] = x_1[n] + b x_1[n - 1]$ , ou seja,  $y_1[n] = x[n - n_0] + b x[n - n_0 - 1] = y[n - n_0]$
- 

**3.3.4 Linearidade**

**Definição:** Um sistema é linear se e somente se a sua resposta a uma combinação linear de entradas é a combinação linear das respectivas saídas, isto é, se

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t),$$

então o sistema é linear se e somente

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t).$$

A mesma definição vale para os sistemas discretos.

**Exemplo 3.4**

- 
- 1-  $y(t) = a x(t) + b$  é linear se e somente se  $b = 0$ ;
  - 2-  $y[n] = \frac{1}{2M + 1} \sum_{k=-M}^M x[n - k]$ ,  $M \in \mathbb{Z}$ , representa um sistema linear.
-

## 3.4 Sistema linear e invariante com tempo (LIT)

Vamos analisar as propriedades especiais dos sistemas que são simultaneamente lineares e invariantes com o tempo.

### 3.4.1 Sistemas LIT discretos. Soma de convolução

#### Resposta ao impulso

Suponha um sistema genérico que, em resposta à entrada  $x[n]$ , forneça a saída  $y[n]$ . Considere a entrada particular  $x[n] = \delta[n]$ , ou seja, a entrada é a seqüência impulso unitário. A resposta  $y[n]$  correspondente será denominada de  $y[n] = h[n]$ . Assim,  $h[n]$  é a resposta de um sistema ao impulso unitário.

É preciso ter claro que  $h[n]$  é a resposta ao impulso centrado em  $n = 0$ .

Tomando agora uma seqüência genérica  $x[n]$ , de acordo com os resultados do Capítulo 2, podemos escrever

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k],$$

ou seja,  $x[n]$  pode ser escrita como uma combinação linear de impulsos unitários.

Esta seqüência  $x[n]$  será a entrada do sistema, produzindo  $y[n]$  na saída.

**Suponha que o sistema é linear.** Então, como  $x[n]$  é uma combinação linear de impulsos, podemos escrever  $y[n]$  como uma combinação linear de respostas ao impulso, ou seja:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n],$$

onde  $h_k[n]$  é a resposta do sistema linear ao impulso  $\delta[n-k]$ . Observe que  $h_k[n]$  não é igual a  $h[n]$  pois o impulso correspondente não está centrado na origem do eixo  $n$ .

**Suponha que o sistema, além de linear, é também invariante com o tempo.**

Neste caso temos  $h_k[n] = h[n-k]$ . Logo, a saída do sistema pode ser reescrita como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (3.1)$$

Esta é uma das propriedades mais importantes dos sistemas lineares e invariantes no tempo: a saída, em resposta a uma entrada qualquer, pode ser calculada usando a entrada e a resposta  $h[n]$  do sistema ao impulso.

Portanto, **a resposta  $h[n]$  de sistema linear e invariante com o tempo caracteriza completamente o sistema.**

O cálculo expresso em (3.1) se chama **soma de convolução** e é representado por

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (3.2)$$

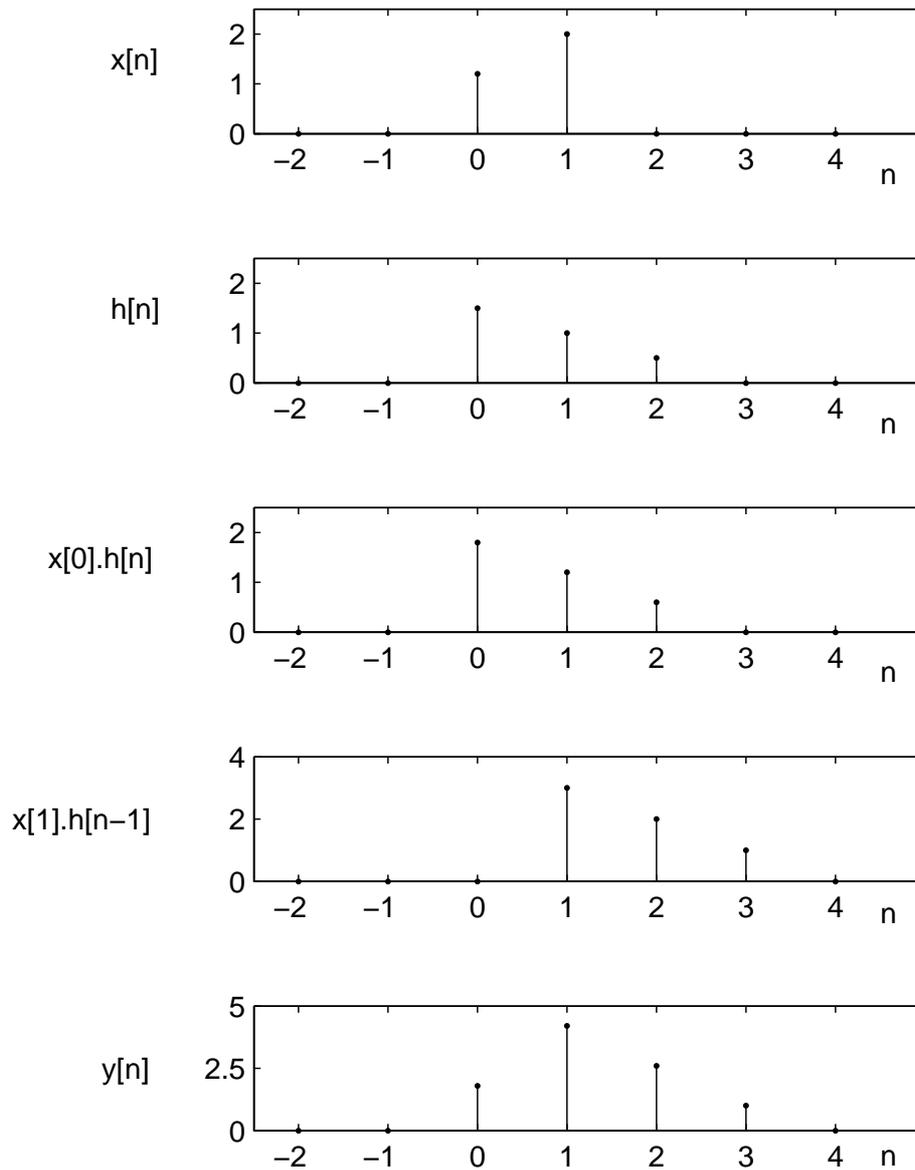


Figura 3.3: Cálculo da seqüência de saída  $y[n]$ .

### Cálculo da soma de convolução

Para calcular a soma de convolução podemos interpretar a operação como uma soma de seqüências deslocadas de  $k \in \mathbb{Z}$  no eixo  $n$  e ponderadas por  $x[k]$ . Isto é ilustrado na Figura 3.3 onde são mostradas todas as parcelas do tipo  $x[k]h[n-k]$  a serem somadas para produzir a seqüência resultante  $y[n]$ .

Uma forma alternativa de cálculo da convolução consiste em interpretar tanto  $x[k]$  como  $h[n-k]$  como seqüências. Ambas serão consideradas em um eixo  $k$ . Assim,  $x[k]$  é igual à sua versão  $x[n]$ , conforme mostrado na Figura 3.4. Porém,  $h[n-k]$ , ou seja,  $h[-k+n]$  é a seqüência  $h[k]$  invertida no eixo  $k$  e deslocada de  $n$  unidades. A Figura 3.4 mostra a seqüência  $h[-k]$ . Mostra também a seqüência  $h[-k-1]$  como um exemplo de  $h[-k+n]$ , para  $n = -1$ .

Podemos concluir que valores negativos de  $n$  deslocam a a seqüência  $h[-k]$  para a esquerda.

Esta interpretação permite afirmar que o cálculo da convolução, a cada valor de  $n$ , consiste em multiplicar as seqüências  $x[k]$  e  $h[-k+n]$ , obtendo uma seqüência  $p[k,n]$  igual ao produto das duas. O valor da convolução no ponto  $n$ ,  $y[n]$ , é igual à soma das amostras de  $p[k,n]$ .

A Figura 3.4 permite observar que o produto  $p[k,n]$  para  $n < 0$  tem todas suas amostras iguais a

zero. Logo, como o valor de  $y[n]$  é igual à soma das amostras de  $p[k, n]$ , concluímos que  $y[n]$  é igual a zero para  $n < 0$ .

A Figura 3.4 mostra também que o produto  $p[k, n]$  para  $0 \leq n \leq 3$  não será nulo, o que se reflete nos valores correspondentes de  $y[n]$ .

Finalmente, a convolução será nula para  $n > 3$ .

Resumindo, a soma de convolução pode ser calculada através dos seguintes passos:

- desenhamos a seqüência  $x[k]$  no eixo  $k$ ;
- desenhamos a seqüência  $h[k]$  no eixo  $k$ ;
- invertemos a seqüência  $h[k]$  no eixo  $k$  de modo a desenhar  $h[-k]$ ;
- deslocamos  $h[-k]$  no eixo  $k$  segundo o valor do parâmetro  $n$  desejado de modo a desenhar  $h[n - k]$ ;
- multiplicamos  $h[n - k]$  por  $x[k]$  gerando  $p[k, n]$ ;
- somamos as amostras de  $p[k, n]$  obtendo o valor da convolução no ponto  $n$ .
- repetimos os cálculos acima para todos os valores de  $n \in \mathbb{Z}$

### Exemplo 3.5

Vamos calcular a convolução entre  $x[n] = a^n u[n]$ ;  $|a| < 1$  e  $h[n] = u[n]$ , ou seja,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] u[n - k].$$

Podemos demonstrar que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]. \quad (3.3)$$

Portanto, podemos escolher tanto  $x[n]$  como  $h[n]$  para ser invertida no eixo  $k$  e deslocada segundo o valor de  $n$ .

No caso em questão, escolhemos inverter  $h[n] = u[n]$ , conforme ilustra a Figura 3.5.

Em seguida iniciamos o deslocamento de  $u[-k]$  segundo o valor de  $n$ . Conforme já discutido, valores negativos de  $n$  produzem o deslocamento de  $u[-k]$  na direção dos valores negativos do eixo  $k$ .

Na Figura 3.5 podemos constatar que o deslocamento de  $u[-k]$  com valores negativos de  $n$  faz com que as amostras de  $p[k, n] = x[k] h[n - k]$  sejam nulas e que, portanto, o resultado da convolução será nulo para  $n < 0$ .

Em seguida tratamos dos deslocamentos produzidos pelos valores positivos de  $n$ . Através da Figura 3.5 podemos notar que o produto apresentará amostras diferentes de zero apenas na região  $0 \leq k \leq n$ . Logo, a soma de convolução para os valores positivos de  $n$  pode ser reescrita como

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k u[k] u[n - k] = \sum_{k=0}^n a^k, \quad (3.4)$$

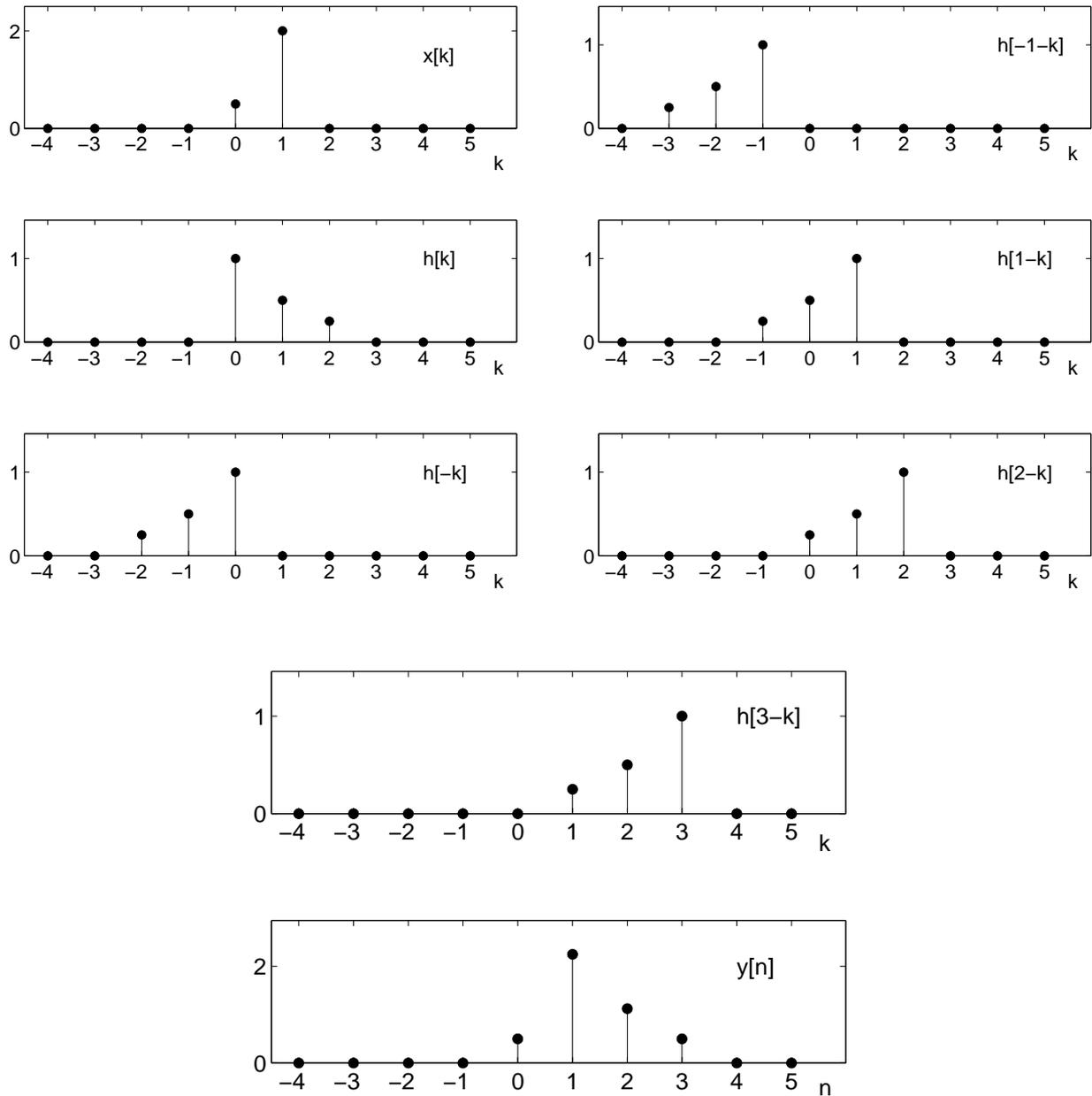


Figura 3.4: Cálculo da seqüência de saída  $y[n]$ .

onde foi possível dispensar a participação dos termos  $u[k]u[n - k]$  devido à restrição que foi estabelecida para os valores de  $k$  na soma.

Observamos que a soma na equação (3.4) pode ser calculada por ser a soma de uma progressão geométrica com  $n + 1$  termos e razão  $a$ .

A soma dos termos de uma progressão geométrica pode ser calculada como

$$\text{soma} = \frac{\text{primeiro termo} - \text{último termo} \times \text{razão}}{1 - \text{razão}}, \quad (3.5)$$

ou seja,

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} r^k = \frac{r^{k_1} - r^{k_2} \times r}{1 - r}. \quad (3.6)$$

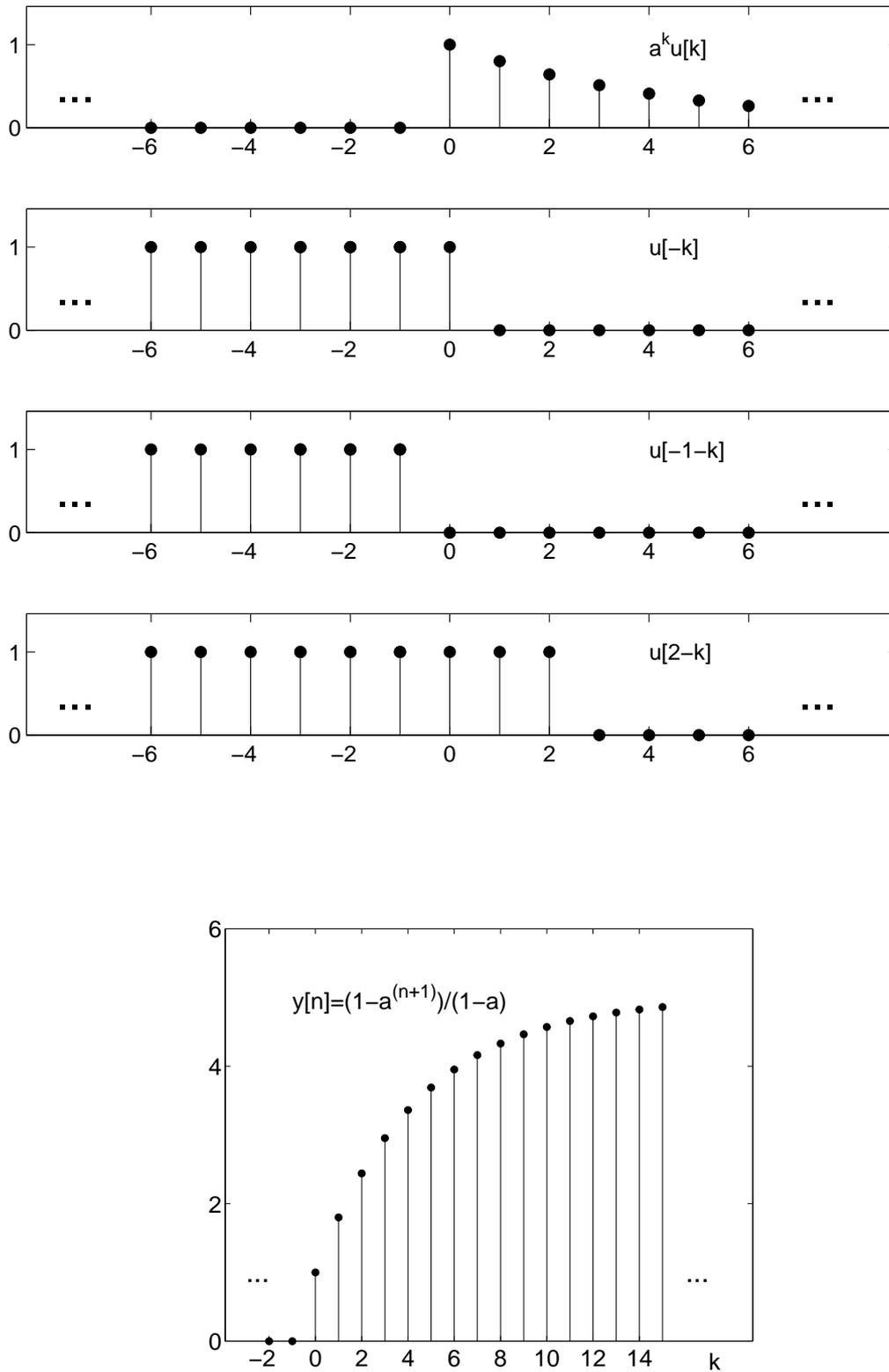


Figura 3.5: Cálculo de  $y[n] = a^n u[n] * u[n]$ .

Aplicando este resultado no cálculo da equação (3.4), obtemos

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Podemos então resumir o resultado do cálculo da soma de convolução  $y[n] = a^n u[n] * u[n]$  como

$$y[n] = a^n u[n] * u[n] = \begin{cases} 0; & n < 0 \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}; & n \geq 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

A função  $y[n]$  está mostrada na Figura 3.5.

### Exemplo 3.6

Vamos calcular a convolução entre  $x[n] = u[n] - u[n - 5]$  e  $h[n] = u[-n] - u[-n - 10]$ , ou seja,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{u[k] - u[k - 5]\} * \{u[k - n] - u[k - 10 - n]\}$$

A Figura 3.6 mostra as seqüências  $x[k]$ ,  $h[k]$  e  $h[-k]$ .

Os valores negativos de  $n$  deslocam  $h[n - k]$  para a esquerda. Neste caso, o produto  $p[k, n] = x[k]h[n - k] = 0$  para  $n < -9$ , conforme se pode observar através da Figura 3.6. Portanto, a convolução será nula para  $n < -9$ .

Para  $-9 \leq n \leq -5$ , o produto  $p[k, n]$  será diferente de zero. Neste caso podemos escrever

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n+9} \{u[k] - u[k - 5]\} = n + 10.$$

Para  $-5 \leq n \leq 0$ , o produto  $p[k, n]$  será diferente de zero e apresentará 5 amostras iguais a 1. Neste caso podemos escrever

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \{u[k] - u[k - 5]\} = 5.$$

Para  $0 \leq n \leq 4$ , o produto  $p[k, n]$  será diferente de zero. Neste caso podemos escrever

$$y[n] = \sum_{k=n}^4 \{u[k] - u[k - 5]\} = 5 - n.$$

Por fim, para  $n > 4$ , o produto  $p[k, n]$  será nulo. Logo, a convolução será nula.

Podemos, finalmente, resumir o resultado do cálculo da soma de convolução entre  $x[n] = \{u[n] - u[n - 5]\}$  e  $h[n] = \{u[-n] - u[-n - 10]\}$  como

$$y[n] = \{u[n] - u[n - 5]\} * \{u[-n] - u[-n - 10]\} = \begin{cases} 0; & n < -9 \\ n + 10; & -9 \leq n \leq -5 \\ 5; & -5 \leq n \leq 0 \\ 5 - n; & 0 \leq n \leq 4 \\ 0; & n > 4. \end{cases} \quad (3.8)$$

A função  $y[n]$  está mostrada na Figura 3.6.

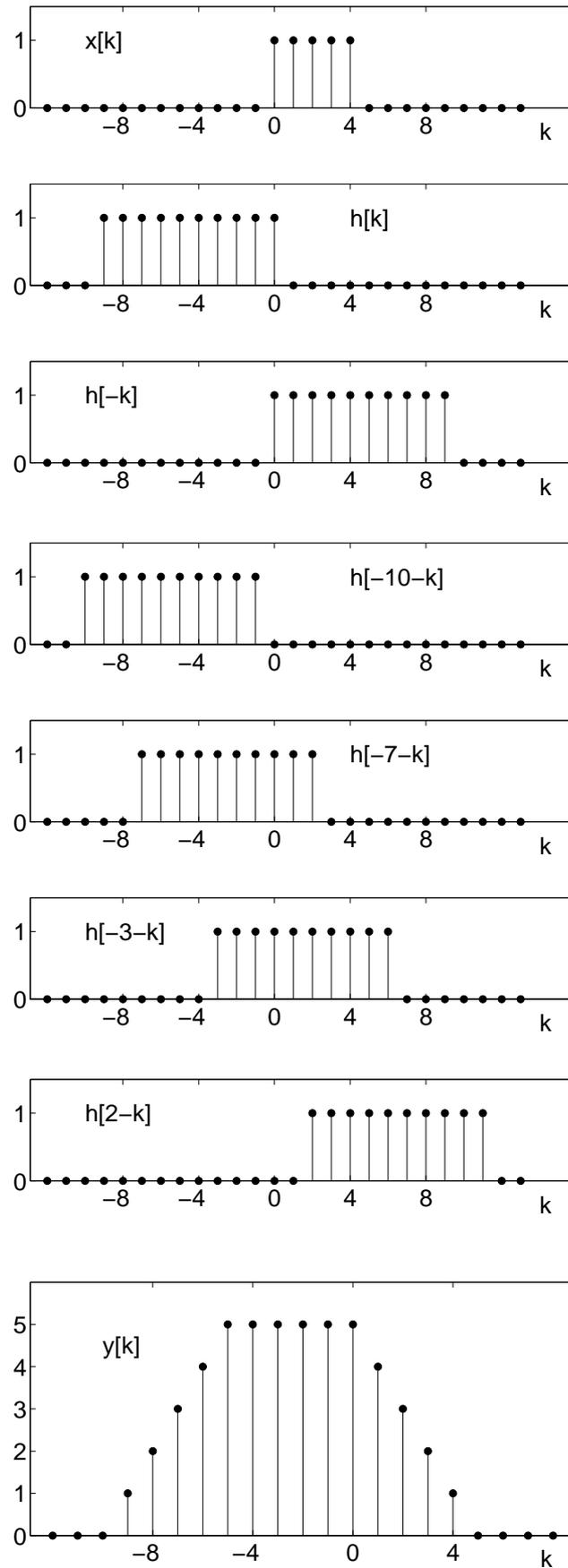


Figura 3.6: Cálculo de  $y[n] = \{u[n] - u[n - 5]\} * \{u[-n] - u[-10 - n]\}$

### 3.4.2 Sistemas LIT contínuos. Integral de convolução

#### Resposta ao impulso

Vamos deduzir uma relação entre a resposta ao impulso, a entrada e a saída de um SLIT contínuo semelhante àquela deduzida para os sistemas discretos. Para isto precisamos da expressão (2.30) do capítulo 2, repetida a seguir, a qual explicita a propriedade da amostragem do impulso unitário.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t). \quad (3.9)$$

Para deduzir a relação (3.9) precisamos do seguinte resultado.

Considerando a Figura 3.7, a aproximação  $x_{\Delta}(t)$  da função  $x(t)$  pode ser escrita como

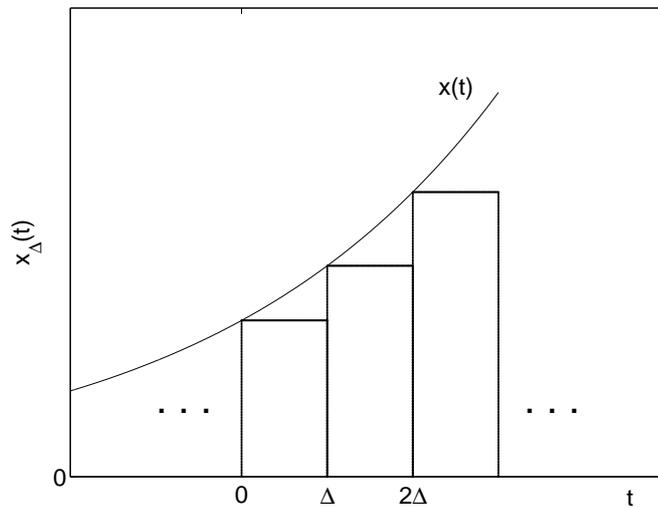


Figura 3.7: Aproximação de uma função  $x(t)$ .

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta, \quad (3.10)$$

onde  $\delta_{\Delta}(t)$  é a função usada no Capítulo 2 para definir o impulso unitário.

Demonstra-se que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t) = x(t). \quad (3.11)$$

Portanto,

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta.$$

Porém, no limite temos  $k\Delta \rightarrow \tau$ ,  $\Delta \rightarrow d\tau$ ,  $\delta_{\Delta}(t - k\Delta) \rightarrow \delta(t - \tau)$  e  $\sum \rightarrow \int$ . Portanto,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad \mathbf{c.q.d.}$$

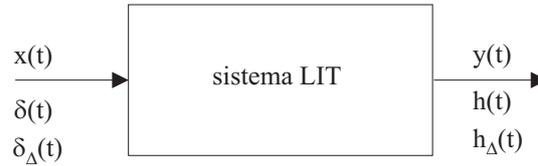


Figura 3.8: Sistema linear contínuo invariante no tempo com entradas e saídas correspondentes.

Considere o sistema LIT mostrado na Figura 3.8. Como a entrada  $\delta_\Delta(t)$  produz a saída  $h_\Delta(t)$ , então, pela hipótese de invariância no tempo, podemos afirmar que a entrada  $\delta_\Delta(t - k\Delta)$  produzirá a saída  $h_\Delta(t - k\Delta)$ .

Suponha que  $x_\Delta(t)$  de (3.10) produz  $y_\Delta(t)$  na saída do sistema. Como  $x_\Delta(t)$  é uma combinação linear das funções  $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ , então a propriedade da linearidade permite escrever

$$y_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_\Delta(t - k\Delta) \Delta.$$

onde  $h_\Delta(t - k\Delta)$  é a resposta a  $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ .

Mas

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x_\Delta(t) = x(t),$$

o que implica em

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} y_\Delta(t) = y(t),$$

pois, por hipótese,  $x(t) \rightarrow y(t)$ .

Portanto,

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_\Delta(t - k\Delta) \Delta.$$

No limite temos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Concluimos que a saída de qualquer sistema contínuo linear e invariante no tempo pode ser calculada conhecendo-se a sua resposta ao impulso. A operação de integral envolvendo esta resposta e a entrada é chamada de **integral de convolução**.

Este é o resultado mais importante para os SLIT contínuos, da mesma forma que ocorreu com os sistemas discretos.

Dada a importância da integral de convolução, criou-se uma representação especial compacta para a mesma. A integral de convolução entre o sinal  $x(t)$  e o sinal  $h(t)$ , definida na expressão 3.12, é representada por

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (3.13)$$

É possível demonstrar que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau,$$

ou seja,

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t).$$

### Cálculo da integral de convolução

O cálculo da integral de convolução é bastante semelhante ao cálculo da soma de convolução. Segundo a expressão 3.12, devemos inverter  $h(t)$  no eixo  $t$  e expressá-la em termos da variável  $\tau$ , gerando  $h(-\tau)$ . Para cada valor de  $t$ , devemos deslocar  $h(-\tau)$  convenientemente de modo a gerar  $h(t-\tau)$ . Esta última é multiplicada, ponto a ponto, por  $x(\tau)$  e o resultado é integrado. Os exemplos seguir ilustram este cálculo.

#### Exemplo 3.7

Vamos calcular a convolução entre  $x(t) = e^{-at}u(t)$ ;  $a > 0$  e  $h(t) = u(t)$ , ou seja,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

No caso em questão, escolhemos inverter  $h(\tau) = u(\tau)$ , conforme ilustra a Figura 3.9.

O próximo passo é deslocar  $h(-\tau)$  de um valor  $t$ , obtendo  $h(t-\tau)$ , fazer o produto de  $x(\tau)$  por  $h(\tau-t)$  e calcular a área sob o resultado deste produto.

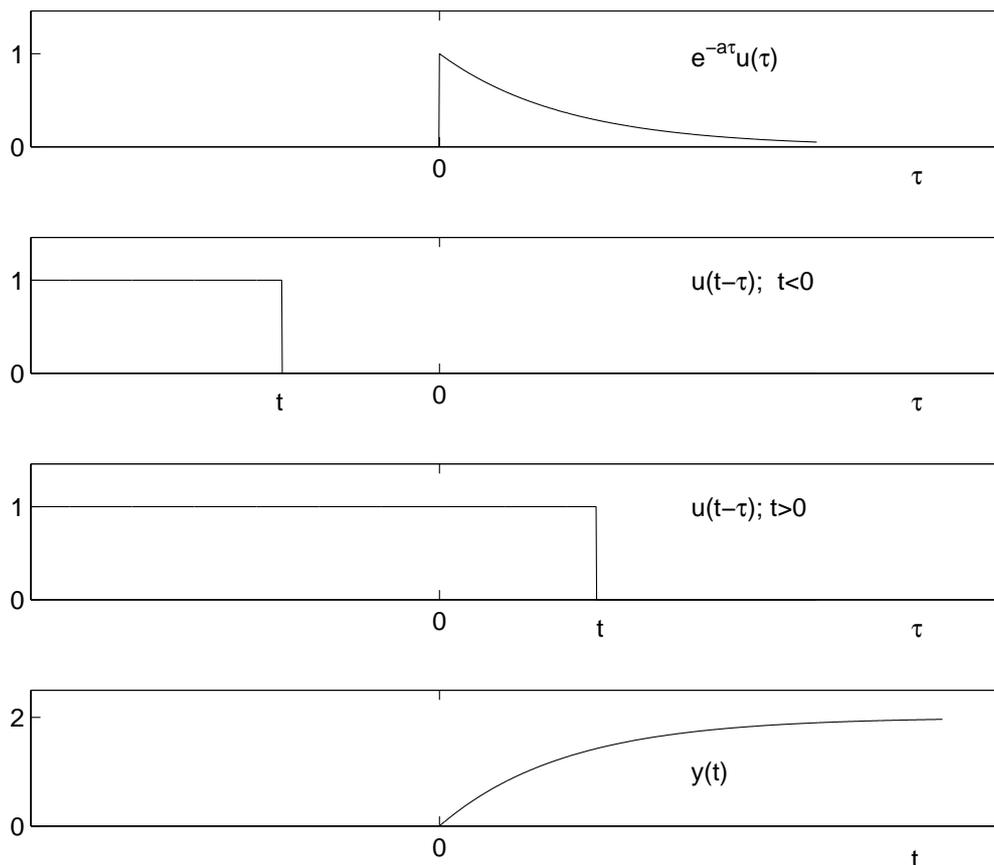


Figura 3.9: Cálculo de  $y(t) = e^{-at}u(t) * u(t)$ .

A Figura 3.9 mostra que o produto será nulo para todo valor  $t < 0$ . Mostra também que o produto sempre será diferente de zero para valores positivos de  $t$ . Neste último caso temos

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-at}}{a}.$$

Com isto podemos escrever o seguinte resumo para o resultado do cálculo da convolução:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1 - e^{-at}}{a}, & t \geq 0. \end{cases}$$


---

### Exemplo 3.8

Vamos calcular a convolução entre dois pulsos retangulares  $r_\alpha(t) = au(t) - au(t - \alpha)$ .

Como as duas funções a serem convoluídas são iguais, não se coloca a questão de qual delas deve ser invertida no eixo  $\tau$ .

A Figura 3.10 mostra os passos do cálculo. Podemos perceber que o resultado da convolução será nulo para  $t < 0$ .

Será diferente de zero enquanto o pulso deslocado apresentar alguma intersecção com o pulso não deslocado. Isto acontece enquanto  $0 \leq t \leq 2\alpha$ . Assim, a convolução também será nula para  $t > 2\alpha$ .

Para  $0 \leq t \leq \alpha$  temos uma intersecção no intervalo  $0 \leq \tau \leq t$ . Por outro lado, para  $\alpha \leq t \leq 2\alpha$  a intersecção ocorre no intervalo  $t - \alpha \leq \tau \leq \alpha$ .

Estas considerações podem ser transformadas nos seguintes cálculos.

2a) para  $0 \leq t \leq \alpha$ :

$$y(t) = \int_0^t r_\alpha(\tau) d\tau = a^2 t.$$

2b) para  $\alpha \leq t \leq 2\alpha$ :

$$y(t) = \int_{t-\alpha}^{\alpha} r_\alpha(\tau) d\tau = a^2(2\alpha - t).$$

O resumo desta convolução é

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ a^2 t, & 0 \leq t \leq \alpha; \\ a^2(2\alpha - t), & \alpha \leq t \leq 2\alpha; \\ 0, & t > 2\alpha. \end{cases}$$

e está mostrado na Figura 3.11.

---

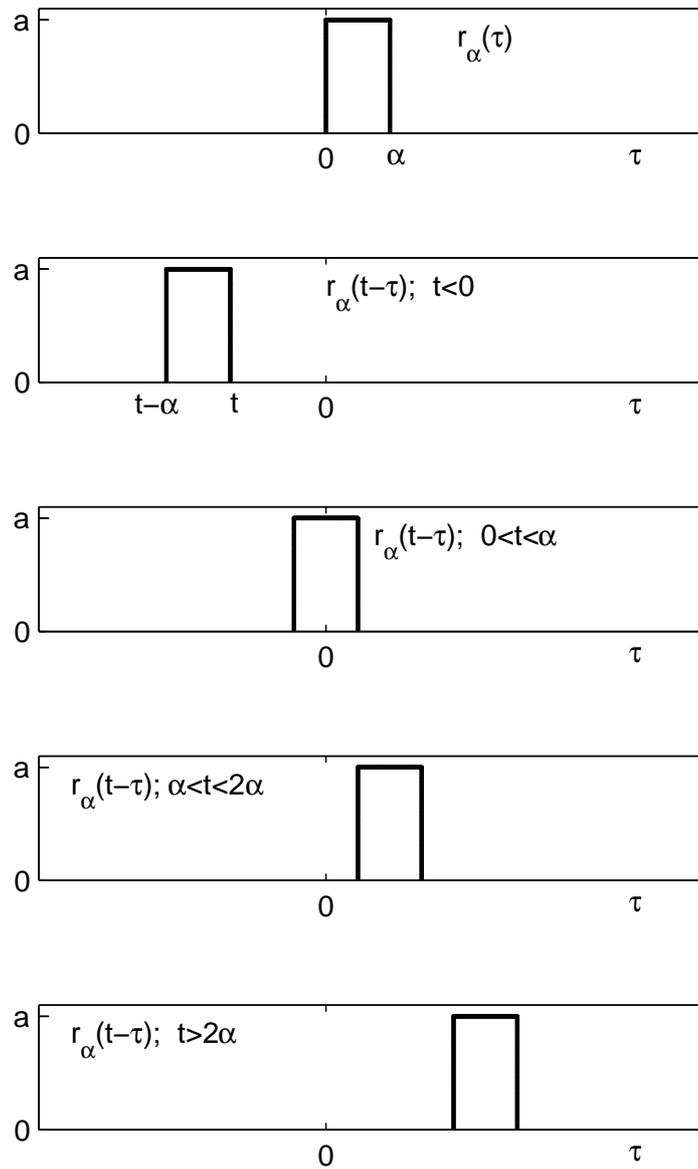


Figura 3.10: Cálculo de  $y(t) = r_\alpha(t) * r_\alpha(t)$ .

Finalizando esta seção, há alguns resultados que simplificam, em algumas situações, o cálculo da convolução:

1- a convolução da soma é a soma das convoluções:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t). \quad (3.14)$$

2- se  $x(t) * h(t) = y(t)$ , então

$$x(t) * h(t - t_0) = y(t - t_0). \quad (3.15)$$

Portanto,

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2). \quad (3.16)$$

3- convolução entre qualquer sinal  $x(t)$  e o impulso unitário  $\delta(t - t_0)$ ,

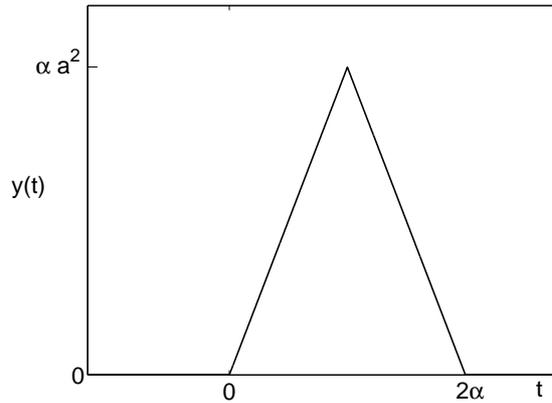


Figura 3.11: Resultado da convolução  $y(t) = r_\alpha(t) * r_\alpha(t)$ .

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0). \quad (3.17)$$

4- convolução entre qualquer sinal  $x(t)$  e a função degrau unitário  $u(t)$ ,

$$x(t) * u(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (3.18)$$

Propriedades semelhantes valem para a soma de convolução.

## 3.5 Propriedades dos sistemas LIT, discretos e contínuos

### 1- Sistemas em cascata

A Figura 3.12 mostra dois sistemas conectados em cascata. Vamos mostrar que esta cascata equivale a um único sistema cuja resposta ao impulso,  $h_{eq}(t)$ , é

$$h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t), \quad (3.19)$$

conforme ilustrado na Figura 3.12.

Para isto, considere que a entrada do primeiro sistema é  $x(t)$  e que na sua saída temos  $s(t)$ . Então,  $s(t)$  é a entrada do segundo sistema, o qual produz, em resposta, a saída  $y(t)$ . Podemos então escrever

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t).$$

Como a segunda convolução pode ser feita antes da primeira, concluímos que  $y(t)$  é igual à convolução entre  $x(t)$  e  $h_{eq}(t)$ .

Estas relações podem ser observadas de forma explicita fazendo:

$$s(t) = x(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h_1(t - \alpha) d\alpha$$

e

$$y(t) = s(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h_2(t - \tau) d\tau.$$

Substituindo  $s(\tau)$  na segunda relação pela primeira relação, temos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h_1(\tau - \alpha) d\alpha \right\} h_2(t - \tau) d\tau.$$

Rearranjando as integrais,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau - \alpha) h_2(t - \tau) d\tau \right\} d\alpha.$$

Fazendo uma mudança de variável  $\beta = \tau - \alpha$ , obtemos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\beta) h_2(t - \alpha - \beta) d\beta \right\} d\alpha.$$

Reconhecemos que a integral entre as chaves representa a convolução entre  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$ , fechando a demonstração.

### 1- Sistemas em paralelo

A Figura 3.13 mostra dois sistemas conectados em paralelo. Estes sistemas equivalem a um único sistema com resposta ao impulso,  $h_{eq}(t)$ , dada por

$$h_{eq}(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad (3.20)$$

conforme ilustrado na Figura 3.13.

A demonstração desta propriedade é similar à demonstração da propriedade anterior.

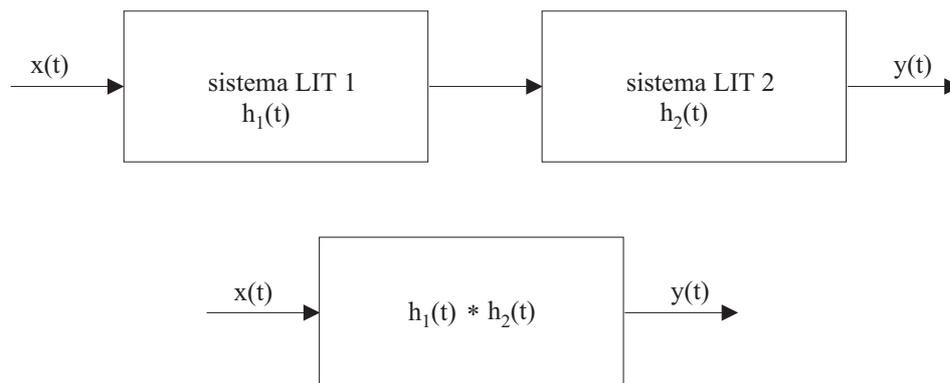


Figura 3.12: Sistemas lineares conectados em cascata.

### 3- Causalidade

A propriedade da causalidade assume uma forma especial para os sistema LIT.

É possível demonstrar, usando a convolução, que um SLIT contínuo é causal se e somente se  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ .

A mesma propriedade vale para os sistemas discretos.

### 4- Estabilidade

A propriedade da estabilidade também assume uma forma especial para os sistema LIT.

É possível demonstrar que um SLIT contínuo é estável se e somente se  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$ .

Para os sistemas discretos temos  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ .

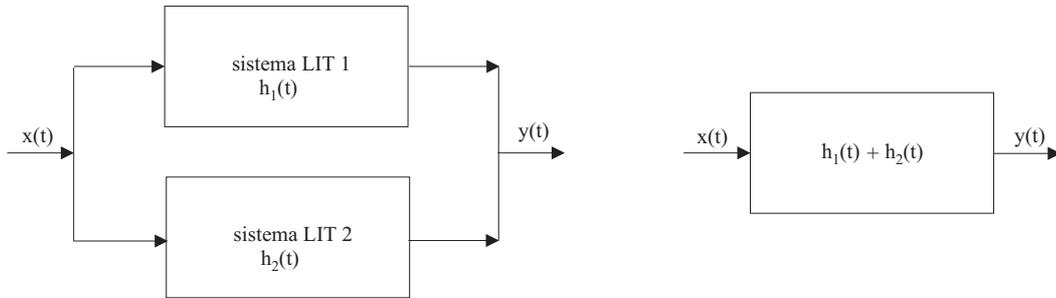


Figura 3.13: Sistemas lineares conectados em paralelo.

### Exemplo 3.9

A seguir são apresentados alguns exemplos de sistemas com sua respectiva classificação em termos de causalidade e estabilidade.

- 1-  $h(t) = u(t)$ , causal e não-estável;
- 2-  $h(t) = u(t + 1)$ , não-causal e não-estável;
- 3-  $h(t) = e^{-at}u(t - \tau)$ , causal se  $\tau \geq 0$  e estável se  $a > 0$ .
- 4-  $h[n] = a^n u[n - n_0]$ , causal se  $n_0 \geq 0$  e estável se  $|a| < 1$ .
- 5-

$$y[n] = \frac{1}{|N_1| + |N_2| + 1} \sum_{k=N_1}^{N_2} x[n + k], \quad N_1 < N_2,$$

onde  $x[n]$  é a entrada e  $y[n]$  é a saída; o sistema será causal se  $N_2 \leq 0$  e estável se  $N_1$  e  $N_2$  forem finitos.

### 3.6 Exercícios

1. Seja  $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$  e  $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$ . Calcule e esboce o resultado de cada uma das seguintes convoluções:

a)  $y[n] = x[n] * h[n]$ ;    b)  $y[n] = x[n+2] * h[n]$ ;    c)  $y[n] = x[n] * h[n+2]$ .

2. Considere um sinal de entrada  $x[n]$  para um sistema LIT com resposta ao impulso  $h[n]$ :

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)} u[n-2], \quad h[n] = u[n+2].$$

Calcule e esboce o sinal de saída  $y[n]$ .

3. Calcule e esboce  $y[n] = x[n] * h[n]$ , onde

$$x[n] = u[n-3] - u[n-9], \quad h[n] = u[n-4] - u[n-16].$$

4. Calcule e esboce  $y[n] = x[n] * h[n]$ , onde

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1], \quad h[n] = u[n-1].$$

5. Calcule a convolução  $y[n] = x[n] * h[n]$  para cada par de sinais a seguir.

a)  $x[n] = \alpha^n u[n]$ ,     $h[n] = \beta^n u[n]$ ,     $\alpha \neq \beta$ ;

b)  $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$ ;

c)  $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$ ,     $h[n] = 4^n u[2-n]$ ;

d)  $x[n] = u[n] - u[n-5]$ ,     $h[n] = u[n-2] - u[n-8] + u[n-11] - u[n-17]$ .

6. Um sistema linear tem a relação

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k].$$

entre a entrada e a saída, onde  $g[n] = u[n] - u[n-4]$ .

a) Determine  $y[n]$  quando  $x[n] = \delta[n-1]$ ;

b) Determine  $y[n]$  quando  $x[n] = \delta[n-2]$ ;

c) O sistema é LTI? Justifique;

d) Determine  $y[n]$  quando  $x[n] = u[n]$ .

7. Calcule e esboce  $y(t) = x(t) * h(t)$ , onde

$$x(t) = \begin{cases} t + 1, & 0 \leq t \leq 1; \\ 2 - t, & 1 < t \leq 2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad h(t) = \delta(t + 2) + 2\delta(t + 1).$$

8. Seja

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad h(t) = x(t/\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

a) Determine e esboce  $y(t) = x(t) * h(t)$ .

b) Se  $dy(t)/dt$  contém apenas 3 descontinuidades, qual é o valor de  $\alpha$ ?

9. Seja

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k).$$

Mostre que  $y(t) = Ae^{-t}$  para  $0 \leq t < 3$ , e determine o valor de  $A$ .

10. Para cada par de formas de ondas definidas a seguir, calcule a saída de um sistema LTI com resposta ao impulso  $h(t)$  e entrada  $x(t)$ .

a)  $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ,  $h(t) = e^{-\beta t}u(t)$ ; Faça para  $\alpha \neq \beta$  e para  $\alpha = \beta$ ;

b)  $x(t) = u(t) - 2u(t - 2) + u(t - 5)$ ,  $h(t) = e^{2t}u(1 - t)$ ;

c)  $x(t)$  e  $h(t)$  como mostrado na Figura 3.14;

d)  $x(t)$  e  $h(t)$  como mostrado na Figura 3.15;

e)  $x(t)$  e  $h(t)$  como mostrado na Figura 3.16;

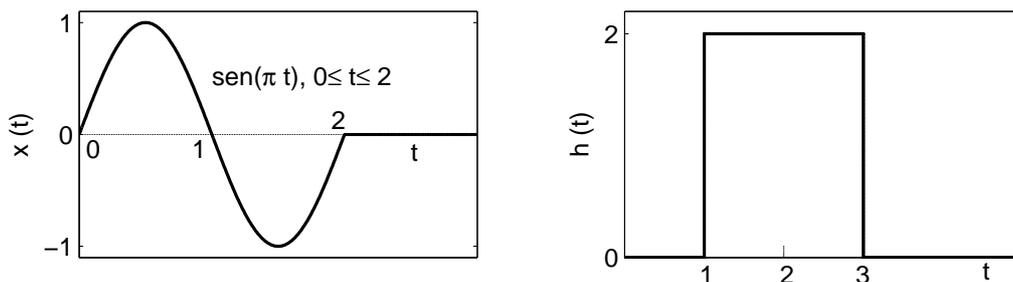


Figura 3.14: Exercício c).

11. Seja  $h(t)$  igual a um triângulo centrado na origem com largura de base igual a 2 e altura igual a 1. Considere  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ .

Calcule e esboce  $y(t) = x(t) * h(t)$  para os seguintes valores de  $T$ .

a)  $T = 4$ ;   b)  $T = 2$ ;   c)  $T = 1,5$ ;   b)  $T = 1$ .

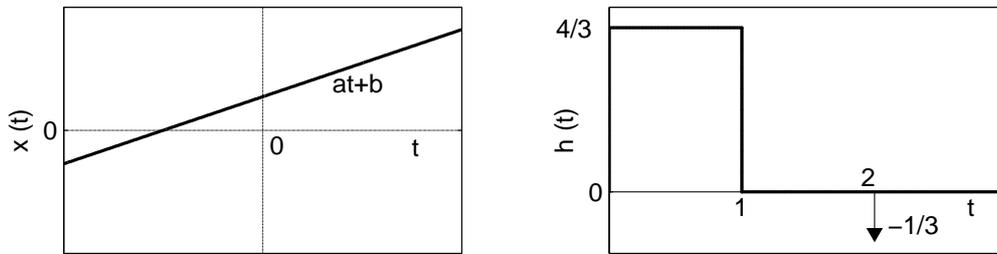


Figura 3.15: Exercício d).

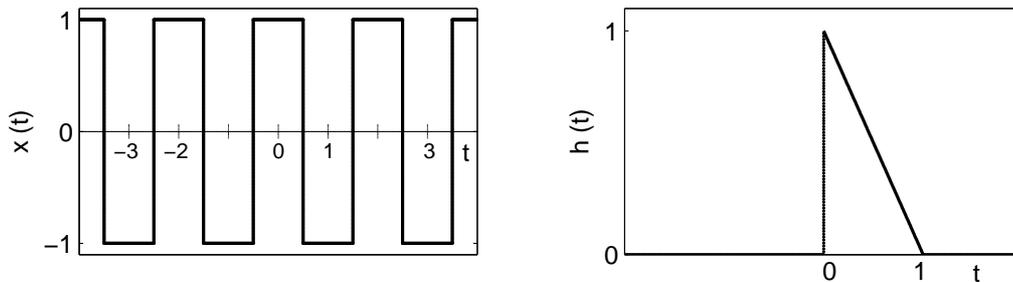


Figura 3.16: Exercício e).

12. Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

- a) se  $x[n] = 0$  para  $n < N_1$  e  $h[n] = 0$  para  $n < N_2$ , então  $x[n] * h[n] = 0$  para  $n < N_1 + N_2$ ;  
 b) se  $y[n] = x[n] * h[n]$  então  $y[n - 1] = x[n - 1] * h[n - 1]$ ;  
 c) se  $y(t) = x(t) * h(t)$  então  $y(-t) = x(-t) * h(-t)$ ;  
 d) se  $x(t) = 0$  para  $t > T_1$  e  $h(t) = 0$  para  $t > T_2$ , então  $x(t) * h(t) = 0$  para  $t > T_1 + T_2$ ;

13. As funções a seguir são respostas ao impulso de um sistema LTI. Para cada caso, determine se o sistema correspondente é causal e/ou estável. Justifique.

- a)  $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$ ; b)  $h[n] = (0,8)^n u[n + 2]$ ; c)  $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$ ; d)  $h[n] = (5)^n u[3 - n]$ ;  
 e)  $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1,01)^n u[n - 1]$ ; f)  $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1,01)^n u[1 - n]$ ;  
 g)  $h[n] = n (\frac{1}{3})^n u[n - 1]$ ; h)  $h(t) = e^{-4t} u(t - 2)$ ; i)  $h(t) = e^{-6t} u(3 - t)$ ; j)  $h(t) = e^{-2t} u(t + 50)$ ;  
 l)  $h(t) = e^{2t} u(-1 - t)$ ; m)  $h(t) = e^{6|t|}$ ; n)  $h(t) = te^{-t} u(t)$ ; o)  $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100}) u(t)$ .

14. Determine quais das seguintes respostas ao impulso correspondem a sistemas LTI estáveis e justifique:

- a)  $h(t) = e^{-(1-2j)t} u(t)$ ; b)  $h(t) = e^{-t} \cos(2t) u(t)$ ; c)  $h[n] = n \cos(\pi n/4) u[n]$ ;  
 d)  $h[n] = 3^n u[-n + 10]$ .

15. Considere um sistema contínuo com entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$  relacionadas por  $y(t) = x(\sin(t))$ . O sistema é causal? É estável? Justifique.

16. Considere um sistema discreto com entrada  $x[n]$  e saída  $y[n]$  relacionadas por

$$y(t) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k],$$

onde  $n_0$  é inteiro finito positivo.

a) O sistema é linear? Justifique.

b) O sistema é invariante no tempo? Justifique.

c) Se  $x[n]$  é limitada em amplitude por um inteiro finito  $B$ , isto é,  $|x[n]| < B, \forall n$ , então é possível demonstrar que  $y[n]$  também é limitada por um número finito  $C$ . Logo, o sistema é estável. Calcule o valor de  $C$  em função de  $B$  e de  $n_0$ .

17. Para cada uma das seguintes relações entre entrada e saída, determine se o sistema correspondente é: 1- linear; 2- invariante no tempo.

a)  $y(t) = t^2x(t-1)$ ; b)  $y[n] = x^2[n-2]$ ; c)  $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$ ;

$y(t) =$  componente ímpar de  $x(t)$ .

18. Para cada opção de sistema a seguir, verifique se o mesmo é invariante no tempo, linear, causal e estável. Justifique suas respostas. Considere que a entrada é  $x(t)$  e que a saída é  $y(t)$ .

a)  $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$ ; b)  $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$ ; c)  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$ ;

d)  $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0. \end{cases}$ ; e)  $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0; \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0. \end{cases}$

f)  $y(t) = x(t/3)$ .

19. Considere um sistema LTI cuja resposta à entrada  $x_1(t)$  da Figura 3.17 é o sinal  $y_1(t)$ . Calcule a resposta do sistema para as entradas  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$ .

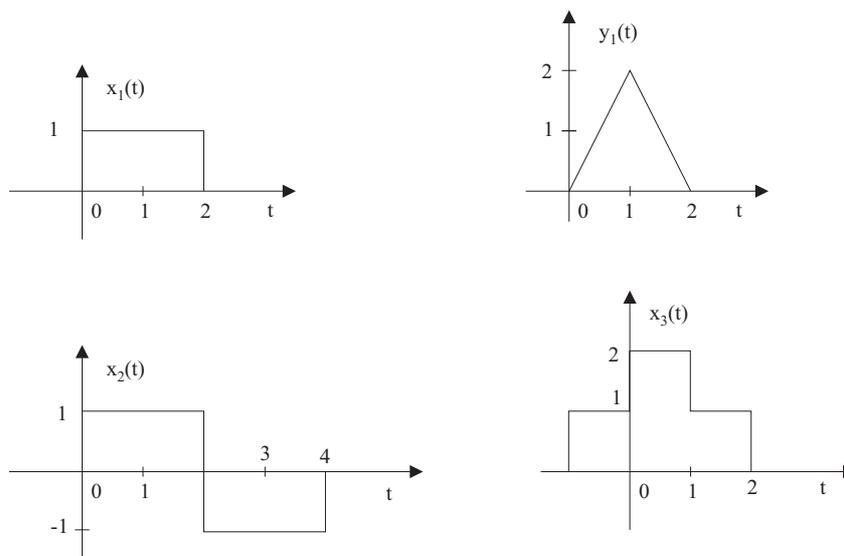


Figura 3.17: Sinais para um sistema LTI.

# Capítulo 4

## Série de Fourier para sinais periódicos contínuos

### 4.1 Introdução

Vamos tratar aqui da representação de sinal periódico com período  $T_0$  através de uma combinação linear de funções  $\exp(jk\omega_0 t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . Estas são exponenciais complexas periódicas com  $T_k = T_0/k$ , harmonicamente relacionadas, pois  $\omega_k = k\omega_0$ .

O objetivo é descrever  $x(t) = x(t + T_0)$ ,  $\forall t$ , como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty.$$

### 4.2 A resposta de sistemas LIT a exponenciais complexas

Considere um sistema LIT com resposta ao impulso  $h(t)$  e com uma entrada  $x(t) = \exp(j\omega_0 t)$ . A resposta  $y(t)$  será

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= x(t) H(\omega_0). \end{aligned}$$

Concluimos que a resposta de um sistema LIT a uma entrada do tipo exponencial complexa na frequência  $\omega_0$  é a mesma exponencial com uma alteração na amplitude e na fase, dadas, respectivamente, por  $|H(\omega_0)|$  e  $\angle H(\omega_0)$ . Por esta propriedade,  $\exp(j\omega_0 t)$  é denominada de autofunção do sistema LIT, enquanto que  $H(\omega_0)$  é um autovalor.

Como consequência desta propriedade, se for possível escrever qualquer entrada  $x(t)$  como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t}, \quad (4.1)$$

então a resposta de qualquer SLIT será dada por

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(\omega_k) e^{j\omega_k t}.$$

A questão que se coloca a partir desta observação é se é possível escrever (4.1) para qualquer entrada  $x(t)$ . A resposta para esta questão é dada pela série de Fourier.

### 4.3 Expansão de um sinal em uma base de funções ortogonais

Vamos tratar aqui da aproximação de uma função, não necessariamente periódica, por combinação linear de outras funções, ou seja,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(t), \quad t_1 < t < t_2. \quad (4.2)$$

A nomenclatura que é adotada para este problema é inspirada naquela referente à expansão de um vetor em um conjunto de eixos coordenados. Assim, estabelecemos uma associação entre o conjunto de funções  $\{g_k(t), k \in \mathbb{Z}, t_1 < t < t_2$  e um conjunto de eixos coordenados.

Vamos agora analisar as vantagens que determinam a escolha de eixos ortogonais para a expansão de vetores.

Considere a Figura 4.1, a qual mostra dois eixos não ortogonais,  $r$  e  $s$ , na direção dos vetores  $\mathbf{a}_r$  e  $\mathbf{a}_s$ , para a representação do vetor  $\mathbf{v}$ . Suponha que  $|\mathbf{a}_r| = |\mathbf{a}_s| = 1$ . Vamos tentar expressar o vetor  $\mathbf{v}$  em função dos parâmetros do sistema de eixos.

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{a}_r + v_s \mathbf{a}_s, \quad v_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_r - v_s \cos(\phi), \quad v_s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_s - v_r \cos(\phi).$$

Estes resultados mostram que existe uma dificuldade para o cálculo das componentes  $v_r$  e  $v_s$ , uma vez que o cálculo de  $v_r$  depende de  $v_s$  e vice-versa.

Este problema exige uma solução iterativa. Para contornar o esforço de cálculo desta solução, usa-se uma condição que elimina o problema, ou seja, escolhemos  $\phi = 90^\circ$ , fazendo com os eixos sejam ortogonais entre si. A ortogonalidade desacopla as duas componentes e simplifica a expansão. Daí obtemos a expressão clássica

$$v_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_r, \quad v_s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_s.$$

A descrição do problema de representação de um sinal através de um conjunto de funções se assemelha àquela da representação de vetores. Desta forma, vamos representar o sinal  $x(t)$  através de componentes na “direção” dos sinais  $g_k(t)$ .

Aqui também a definição dos coeficientes da expansão do sinal  $x(t)$  fica bastante simplificada se escolhermos um conjunto de funções  $g_k(t)$  mutuamente ortogonais entre si no intervalo  $t_1 < t < t_2$ . O conceito de ortogonalidade entre sinais é definido a seguir.

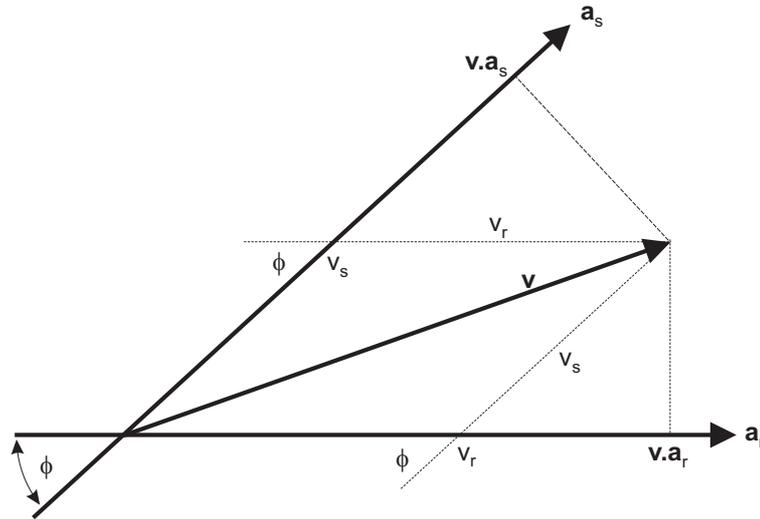


Figura 4.1: Projeção de um vetor em um par de eixos não ortogonais.

**Definição:** Duas funções  $x(t)$  e  $y(t)$ ,  $x(t) \neq y(t)$ , são ortogonais entre si no intervalo  $t_1 < t < t_2$  se

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt = 0. \quad (4.3)$$

**Definição:** Um conjunto de funções  $g_k(t)$ ,  $k = \text{inteiro}$ , é ortogonal no intervalo  $t_1 < t < t_2$  se as funções que compõem o conjunto são ortogonais entre si no intervalo, isto é, se

$$\int_{t_1}^{t_2} g_k(t) g_l^*(t) dt = \begin{cases} c, & k = l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (4.4)$$

### Exemplo 4.1

O conjunto de funções  $\exp(jk\omega_0 t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  é ortogonal no intervalo  $t_0 < t < t_0 + T_0$ ;  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Para este conjunto, a constante  $c$  de (4.4) vale  $c = T_0$ .

Suponha que a aproximação é escrita como

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(t), \quad t_1 < t < t_2.$$

O erro desta aproximação pode ser escrito como

$$\text{erro}(t) = e(t) \triangleq x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(t), \quad t_1 < t < t_2. \quad (4.5)$$

O problema nesta representação é escolher os coeficientes  $c_k$  de modo a minimizar a energia do erro total, ou seja minimizar

$$\int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 dt. \quad (4.6)$$

Vamos agora calcular os coeficientes ótimos para a representação de um sinal  $x(t)$  através de componentes na direção dos sinais  $g_k(t)$  ortogonais entre si.

**Vamos inicialmente supor que todas as funções envolvidas sejam reais.**

O critério para a otimização é a minimização da energia do erro da aproximação, como expresso em (4.6). Para isto vamos usar (4.5) e escrever inicialmente

$$e^2(t) = x^2(t) - 2x(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i g_i(t) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i g_i(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l g_l(t).$$

Usando este resultado em (4.6), temos

$$\int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i g_i(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i g_i(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l g_l(t) dt.$$

a qual pode ser reescrita como:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i x(t) g_i(t) dt + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_i c_l \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_l(t) dt.$$

Supondo que o conjunto de funções  $g_k(t)$  seja ortogonal no intervalo  $t_1 < t < t_2$ , podemos simplificar a expressão anterior:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i x(t) g_i(t) dt + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i^2 \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt.$$

Os valores ótimos dos coeficientes  $c_k$  são aqueles que satisfazem a equação

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt \right\} = 0.$$

Calculando a solução desta equação obtemos

$$c_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_k^2(t) dt}. \quad (4.7)$$

**Pode-se demonstrar que para sinais complexos este resultado será**

$$c_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} |g_k(t)|^2 dt}. \quad (4.8)$$

Podemos agora resumir os resultados que obtivemos para a representação de um sinal  $x(t)$  através de um conjunto  $g_k(t)$  de funções mutuamente ortogonais em um intervalo  $t_1 < t < t_2$ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(t), \quad t_1 < t < t_2, \quad (4.9)$$

onde os coeficientes  $c_k$  que minimizam a energia do erro da aproximação são dados por

$$c_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)g_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} |g_k(t)|^2 dt}. \quad (4.10)$$

Esta forma de representação apresenta várias propriedades. Vamos abordar algumas delas.

**Propriedade 1:** o erro  $e(t)$  é ortogonal a cada uma das funções  $g_k(t)$  no intervalo  $t_1 < t < t_2$ .

Para demonstrar este resultado devemos calcular, com base na expressão (4.3),

$$\int_{t_1}^{t_2} e(t)g_l^* dt; \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Usando a expressão (4.5), temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(t) \right] g_l^*(t) dt,$$

ou

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)g_l^*(t)dt - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_1}^{t_2} g_k(t)g_l^*(t)dt.$$

Usando (4.8) e a definição de funções mutuamente ortogonais temos

$$c_l \int_{t_1}^{t_2} |g_l(t)|^2 dt - c_l \int_{t_1}^{t_2} |g_l(t)|^2 dt = 0, \quad \mathbf{c.q.d.}$$

**Definição:** o conjunto de funções  $\{g_k(t)\}$  forma uma **base ortogonal** no intervalo  $t_1 < t < t_2$  se contiver todas as funções  $g_k(t)$  mutuamente ortogonais no intervalo  $t_1 < t < t_2$ .

Um exemplo de uma base ortogonal é o conjunto  $\{\exp(jk\omega_0 t)\}$  e o intervalo  $t_0 < t < t_0 + T_0$ ;  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

**Propriedade 2:** se o conjunto de funções  $\{g_k(t)\}$  forma uma base ortogonal no intervalo  $t_1 < t < t_2$ , então o erro  $e(t)$  será nulo no intervalo  $t_1 < t < t_2$ .

Para demonstrar esta propriedade basta observar que  $e(t)$  é ortogonal a todas as funções  $g_k(t)$ . Logo, se o conjunto de funções  $\{g_k(t)\}$  forma uma base ortogonal, então  $e(t)$  deve pertencer a este conjunto. Assim, deve participar da representação do sinal, anulando o erro da representação.

## 4.4 Série exponencial de Fourier

A série exponencial de Fourier é um caso particular da representação de funções através de uma base ortogonal. A base utilizada é aquela do Exemplo 4.1, ou seja,  $\exp(jk\omega_0 t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Este conjunto apresenta as seguintes propriedades:

- Este conjunto é ortogonal no intervalo  $t_0 < t < t_0 + T_0$ ;  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Logo,  $t_1 = t_0$  e  $t_2 = t_0 + T_0$ .
- Cada função  $\exp(jk\omega_0 t)$  é periódica com período  $T_0$ ;
- As funções do conjunto são harmonicamente relacionadas, isto é, suas frequências são múltiplos de uma dada frequência, no caso,  $\omega_0$ ;
- Para este conjunto, a constante  $c$  de (4.4) vale  $c = T_0$ .

Podemos agora resumir as expressões envolvidas na representação de um sinal  $x(t)$  pela série exponencial de Fourier no intervalo  $t_0 < t < t_0 + T_0$ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t_0 < t < t_0 + T_0, \quad T_0 = 2\pi/\omega_0, \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

$$c(k) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (4.13)$$

Como cada função  $e^{jk\omega_0 t}$  é periódica com período  $T_0$ , a série  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$  é periódica com o mesmo período. Como consequência, ela pode representar a função genérica  $x(t)$  apenas no intervalo  $t_0 < t < t_0 + T_0$ . A representação será válida para todo  $t$  somente quando  $x(t)$  também for periódica com período  $T_0$ . A Figura 4.2 ilustra esta situação para um sinal  $x(t)$  e sua série de Fourier para o intervalo  $2 < t < 3$ , ou seja, para  $T_0 = 3 - 2 = 1$ . Observe que  $x(t)$  e a série são idênticos no intervalo. Porém, são diferentes fora, pois a série é periódica com período  $T_0 = 1$ , enquanto que  $x(t)$  não é periódico.

Estas observações permitem colocar a seguinte conclusão fundamental:

Para que um sinal e sua série de Fourier sejam iguais entre si para  $-\infty < t < \infty$  é necessário que:

- 1- o sinal seja periódico;
- 2- O intervalo  $t_0 < t < t_0 + T_0$  da série seja tal que  $T_0 =$  período do sinal.

Por fim é importante observar que o coeficiente  $c_0$  tem um significado físico. Usando (4.13), podemos escrever

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt,$$

o que mostra que  $c_0$  é o valor médio do sinal  $x(t)$  no intervalo  $t_0 < t < t_0 + T_0$ .

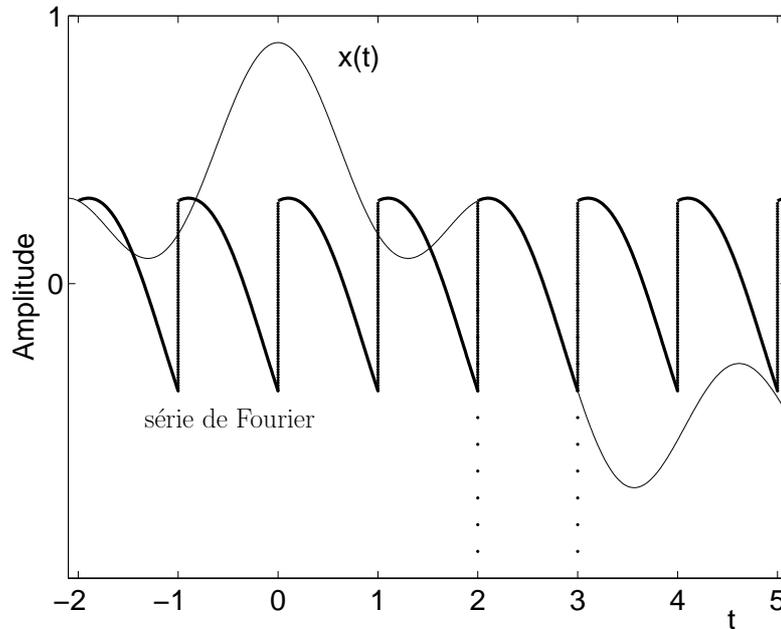


Figura 4.2: Representação de um sinal  $x(t)$  e de sua série de Fourier para o intervalo  $2 < t < 3$ .

## 4.5 Série trigonométrica de Fourier

A série exponencial de Fourier representa um sinal periódico, ou um trecho de um sinal não-periódico, através de uma combinação de sinais exponenciais complexas harmônicas.

A série exponencial de Fourier pode ser escrita em termos das funções seno e cosseno, dando origem à série trigonométrica de Fourier.

**Uma restrição muito importante para a forma trigonométrica é que a mesma só pode ser calculada para sinais reais.**

Para obtê-la, vamos tomar a expressão (4.13) e supor  $x(t)$  real e periódico com período  $T_0$ . Assim, temos

$$x(t) = x^*(t),$$

o que, fazendo  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , permite escrever

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t}.$$

Fazendo  $k = -m$  resulta

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m}^* e^{jm\omega_0 t},$$

de onde concluímos que

$$\text{para } x(t) \text{ real temos } c_k = c_{-k}^*.$$

Vamos usar este resultado fazendo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t}.$$

e substituindo  $c_{-k}$  por  $c_k^*$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + c_k^* e^{-jk\omega_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + [c_k e^{jk\omega_0 t}]^* \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re \{ c_k e^{jk\omega_0 t} \}. \end{aligned}$$

Supondo  $c_k = a_k + jb_k$ , podemos escrever, finalmente:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k \cos(k\omega_0 t) - 2b_k \text{sen}(k\omega_0 t), \quad c_k = a_k + jb_k. \quad (4.14)$$

Portanto, para um sinal  $x(t)$  real, a série de Fourier pode ser expressa em termos das funções seno e cosseno mais um termo constante, o qual descreve o valor médio do sinal.

Além desta, é possível derivar uma alternativa que também encontra ampla aplicação na prática. Fazendo  $c_k = |c_k| \exp(j\theta_k)$ , de

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re \{ c_k e^{jk\omega_0 t} \},$$

podemos escrever

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re \{ |c_k| e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} \},$$

ou

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k). \quad (4.15)$$

Esta notação é adequada para definir a componente fundamental e as harmônicas do sinal periódico  $x(t)$ . A componente fundamental ou primeira harmônica é a componente  $2|c_1| \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ , ou seja, é a componente na frequência  $\omega_0$ .

A  $k$ -ésima harmônica, ou harmônica de ordem  $k$ , é  $2|c_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ , ou seja, é a componente na frequência  $k\omega_0$ .

### Exemplo 4.2

Considere  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ . Obter a série de Fourier.

Sabemos que

$$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

Logo, esta já é a expressão da série exponencial, o que permite concluir, por inspeção, que  $c_k = 0$ , exceto para  $|k| = 1$ , uma vez que  $c_1 = -c_{-1} = 1/2j$ .

Observe que nível médio do sinal é nulo, o que concorda com  $c_0 = 0$ . Também, o sinal é real, o que indica que  $c_k = c_{-k}^*$ . Por fim, este sinal é composto apenas pela componente fundamental, cuja amplitude vale  $2|c_1| = 1$ , enquanto que  $\theta_1 = -\pi/2$ .

**Exemplo 4.3**

Seja

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + \frac{1}{2}e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}$$

Podemos rearranjar da seguinte forma

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{-j2\omega_0 t}.$$

Daí podemos escrever:  $c_0 = 1$ ;  $c_1 = c_{-1}^* = 1 + \frac{1}{2j}$ ;  $c_2 = c_{-2}^* = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$

Vamos tratar agora dos gráficos que são utilizados para representar os resultados da série de Fourier, também conhecidos como **espectros de Fourier do sinal**.

A representação gráfica consiste em representar os coeficientes  $c_k$  em função da respectiva frequência. Como, de uma maneira geral, os coeficientes são quantidades complexas, precisamos de dois gráficos, um para a parte real e outro para a parte imaginária, ou, o que é mais comum, um para o módulo e outro para o argumento. **O gráfico para o módulo é denominado espectro de amplitudes, enquanto que o gráfico para o argumento, espectro de fase.** Vamos exemplificar estes gráficos para o caso do exemplo 4.3.

**Exemplo 4.4**

Espectros de amplitude e de fase para o sinal do exemplo 4.3.

Estes gráficos evidenciam o uso de frequências negativas. Estas não têm sentido físico, mas apenas matemático. Elas decorrem do uso de exponenciais complexas e conjugadas como  $\exp(jk\omega_0)$  e  $\exp(-jk\omega_0)$ . Esta última é interpretada como  $\exp[j(-k\omega_0)]$ , ou seja, como se fosse uma exponencial na frequência  $-k\omega_0$ .

**Exemplo 4.5**

Vamos calcular a série de Fourier de um trem de pulsos retangulares periódico com período  $T$ . O período ao redor de  $t = 0$  pode ser descrito como

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & \tau/2 < |t| < T/2. \end{cases} \quad (4.16)$$

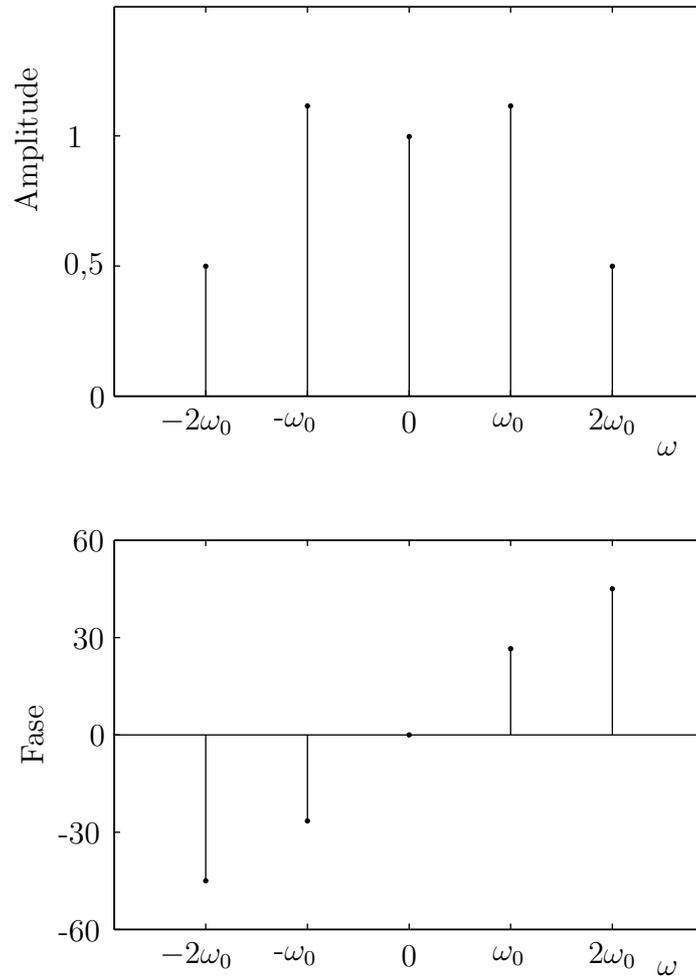


Figura 4.3: Espectros em frequência para o exemplo 4.3.

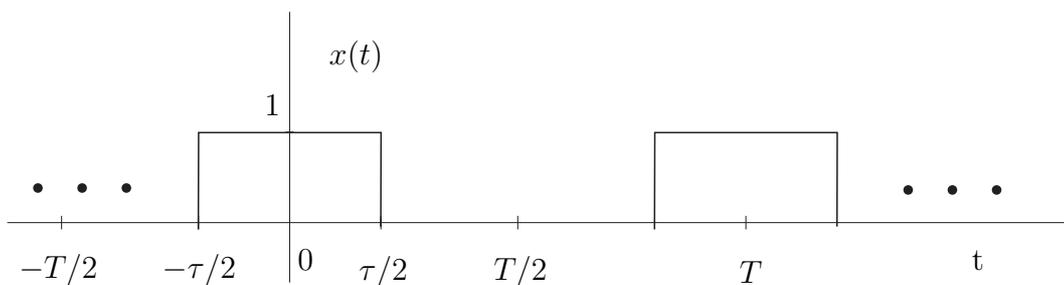


Figura 4.4: Trem de pulsos retangulares.

A Figura 4.4 mostra este trem de pulsos retangulares.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt; \quad \omega_0 = 2\pi/T.$$

A integral para o cálculo do coeficiente  $c_k$  se dá ao longo de um período. A simetria do pulso ao redor de  $t = 0$  sugere que  $t_0$  deve ser escolhido como  $t_0 = -T/2$ , de forma que

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \frac{e^{-jk\omega_0 \tau/2} - e^{jk\omega_0 \tau/2}}{-jk\omega_0} \\
&= \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 T/2}.
\end{aligned}$$

Observe que a expressão para os coeficientes  $c_k$  apresenta uma indeterminação em  $k = 0$ . Podemos resolvê-la usando a regra de L'Hôpital ou refazendo a integral inicial usando explicitamente  $k = 0$  desde o início. Qualquer um destes procedimentos fornece

$$c_0 = \tau/T,$$

que é o valor médio do sinal  $x(t)$ .

Podemos então colocar o resumo

$$c_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 T/2}, \quad k \neq 0, \quad c_0 = \tau/T. \quad (4.17)$$

Para  $\tau = T/2$  temos

$$c_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T/4)}{k\omega_0 T/2}, \quad k \neq 0, \quad c_0 = 1/2.$$

Mas

$$k\omega_0 T/4 = 2k\pi T/4T = k\pi/2$$

e

$$c_k = \frac{\text{sen}(k\pi/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

Como

$$\text{sen}(k\pi/2) = \begin{cases} 0, & k = \text{par}; \\ (-1)^{(k-1)/2}, & k = \text{ímpar}, \end{cases}$$

podemos finalmente escrever

$$c_k = \begin{cases} 0, & k = \text{par}, \quad k \neq 0; \\ \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k\pi}, & k = \text{ímpar}; \\ 1/2, & k = 0. \end{cases}$$

A Figura 4.5 mostra os espectros de amplitude e de fase do sinal  $x(t)$ .

Na Figura 4.6 é mostrado o efeito da adição de harmônicas na composição do trem de pulsos retangulares.

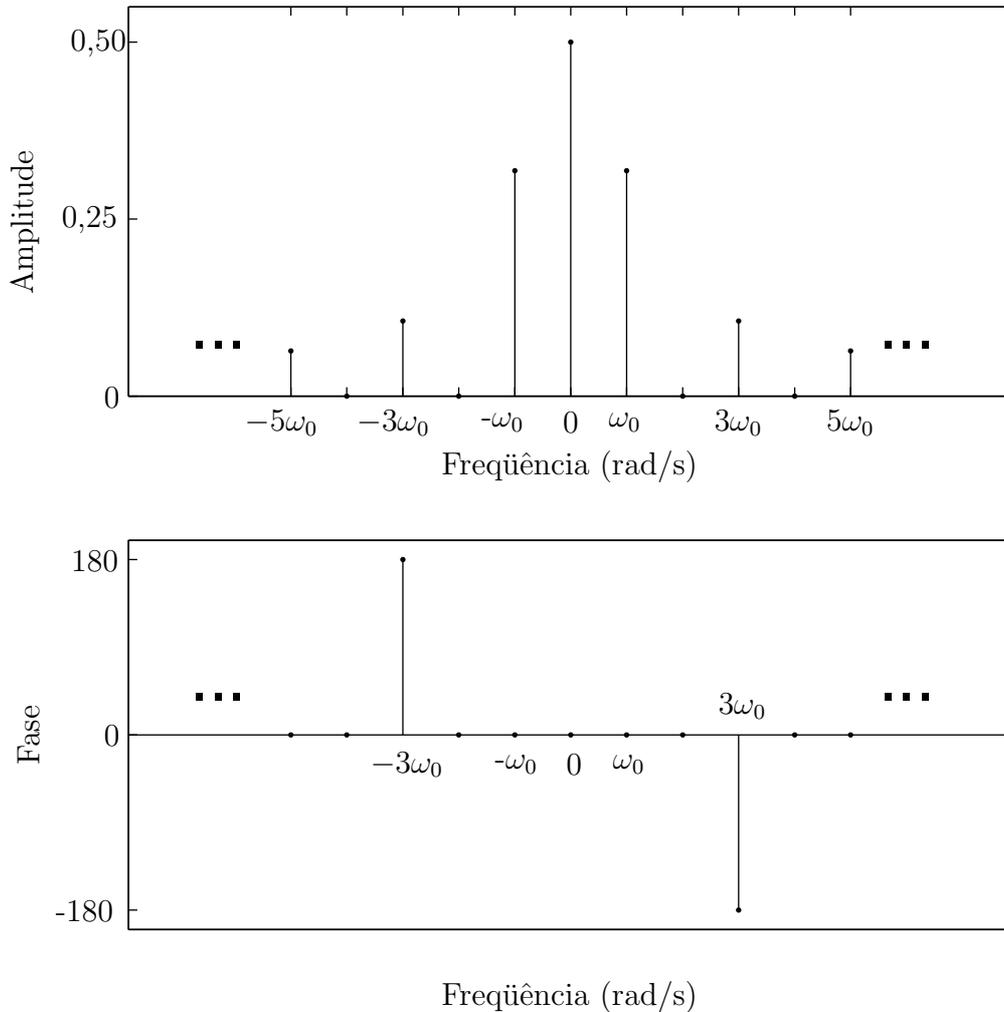


Figura 4.5: Espectros de frequência para o trem de pulsos retangulares com  $\tau = T/2$ .

## 4.6 Teorema de Parseval

Este teorema relaciona a potência média de um sinal  $x(t)$  com os respectivos parâmetros espectrais. Seja um sinal  $x(t)$ , periódico com período  $T$  e sua série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2k\pi t/T}.$$

O teorema pode ser enunciado como

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad (4.18)$$

isto é, a potência média de  $x(t)$  é igual à soma do quadrado do valor absoluto dos coeficientes de Fourier.

Para demonstrar, vamos substituir  $x(t)$  pela série de Fourier.

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2k\pi t/T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* e^{-j2m\pi t/T} \right\} dt.$$

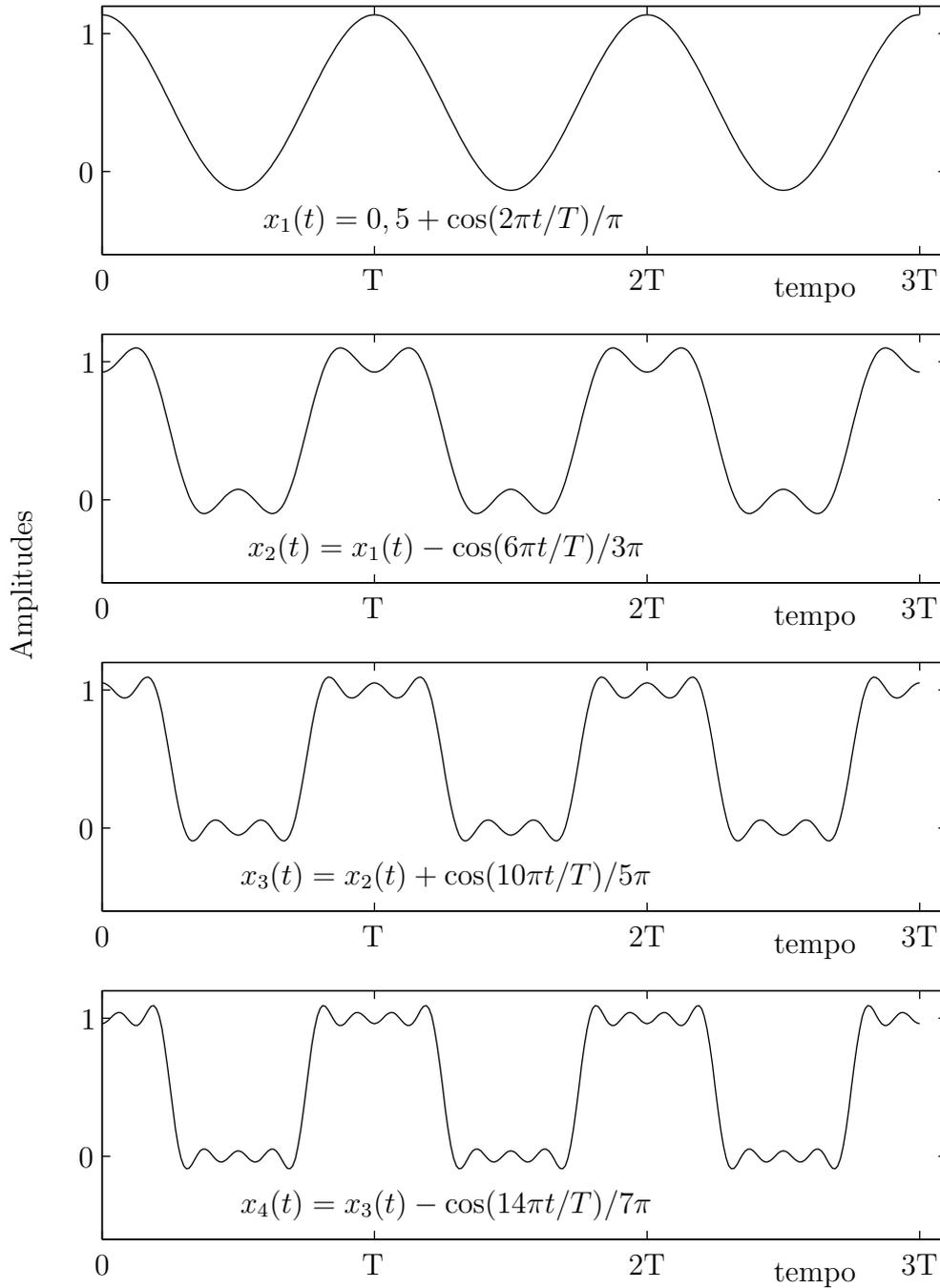


Figura 4.6: Participação das harmônicas na composição do trem de pulsos retangulares com  $\tau = T/2$ .

Como a base de expansão é ortogonal no período, a integral do produto das séries fornece:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \mathbf{c.q.d.}$$

## 4.7 Convergência da Série de Fourier

O estudo da convergência da série trata das condições para a soma das harmônicas seja igual ao sinal.

Nem sempre é possível conseguir a convergência uniforme, isto é, a igualdade ponto a ponto ao longo de todo o período do sinal. Com isto é necessário considerar critérios de convergência e condições de convergência.

Um dos critérios é a convergência observada em termos do erro quadrático médio. Neste caso tratamos de sinais com energia finita no período.

O critério pode ser estabelecido através de um teorema.

### Teorema

Seja  $x(t)$  um sinal periódico com período  $T$ . Se

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt < \infty,$$

então

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |e(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \left| x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j2k\pi t/T} \right|^2 dt = 0,$$

isto é, a energia do erro é nula.

Embora o teorema assegure erro quadrático médio nulo, **isto não significa que a soma seja igual ao sinal em todos os instantes de tempo.**

Vamos analisar dois exemplos.

#### Exemplo 4.6

Considere o caso bastante simples em que o sinal  $x(t)$  é composto por duas senóides nas frequências  $\omega_0$  e  $2\omega_0$ . Claramente o sinal é periódico com período  $T = 2\pi/\omega_0$  e a energia em um período é finita (supondo que as amplitudes das senóides sejam finitas).

Neste caso é evidente que as duas senóides compõem a série de Fourier deste sinal e que, portanto, há a convergência uniforme.

#### Exemplo 4.7

Vamos agora considerar o trem de pulsos retangulares do Exemplo 4.5.

Este sinal também tem energia finita em um período. Porém, observe que o sinal não tem valor definido em cada descontinuidade, uma vez que seu limite à esquerda é diferente do limite à direita. Por outro lado, demonstra-se que a série converge para o ponto médio entre estes dois limites.

Como consequência deste teorema, temos

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left| x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2k\pi t/T} \right|^2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt - 2T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 + T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 0,$$

ou seja, deduzimos o teorema de Parseval

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Podemos então afirmar que se existe a convergência no sentido que o erro quadrático médio é nulo, então o teorema de Parseval se aplica.

Podemos também afirmar que existem sistemas que respondem à energia do sinal e que, portanto, respondem igualmente ao sinal e à série.

A situação do exemplo 4.7 motiva a definição da condição de Dirichelet para a convergência da série.

### Condições de Dirichelet

Seja um sinal  $x(t)$  tal que:

1-

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty,$$

isto é,  $x(t)$  é absolutamente integrável no intervalo  $t_0 < t < t_0 + T$ ;

2- Em qualquer intervalo de tempo,  $x(t)$  apresenta um número finito de máximos e mínimos, isto é, apresenta variação limitada;

3- Em qualquer intervalo finito,  $x(t)$  tem um número finito de descontinuidades com amplitude finita.

### Teorema

Se  $x(t)$  satisfaz as condições de Dirichelet, então a série de Fourier é igual a  $x(t)$  (convergência uniforme) em todos os pontos onde  $x(t)$  é contínua. Converte para o ponto médio entre os valores limites de  $x(t)$ , à esquerda e à direita, nos pontos de descontinuidade.

### Enunciado Alternativo

Seja  $x(t)$  contínuo e com primeira e segunda derivadas contínuas em trechos finitos do intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ . Então a série de Fourier converge para  $x(t)$  em todos os trechos em que  $x(t)$  é contínuo; converge para  $x(t_k^+)/2 + x(t_k^-)/2$  em cada ponto  $t_k$  onde há descontinuidade.

Os sinais físicos satisfazem as condições de Dirichelet. Um exemplo é o trem de pulsos retangulares. Neste caso ocorre o fenômeno de Gibbs, conforme ilustra a Figura 4.7. Observe que as oscilações se concentram nas descontinuidades à medida que  $N \rightarrow \infty$ . Logo, sua energia tende a zero, isto é, a energia do erro tende a zero.

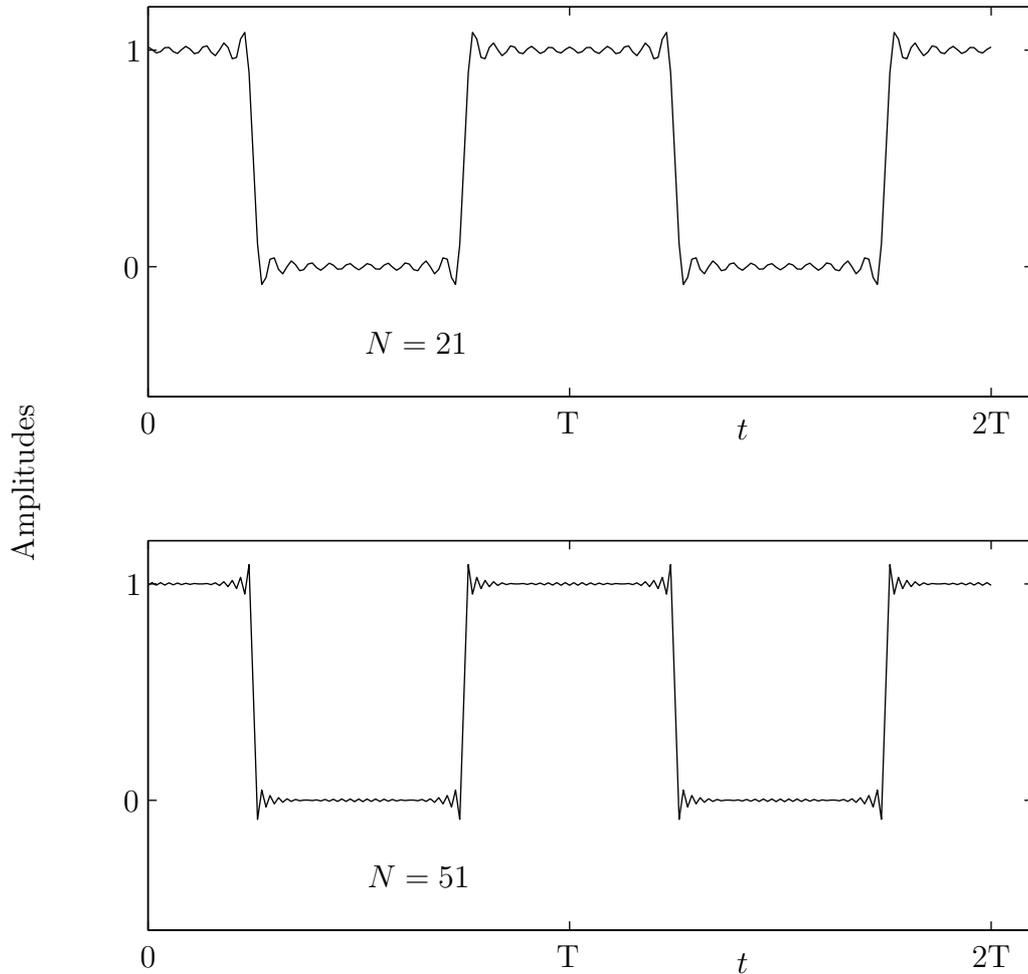


Figura 4.7: Fenômeno de Gibbs para o caso do trem de pulsos retangulares com  $\tau = T/2$ ;  $N$  indica o número de harmônicas somadas.

## 4.8 Exemplos de decomposição em série

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de cálculo da série de Fourier para sinais periódicos compostos por impulsos.

---

### Exemplo 4.8

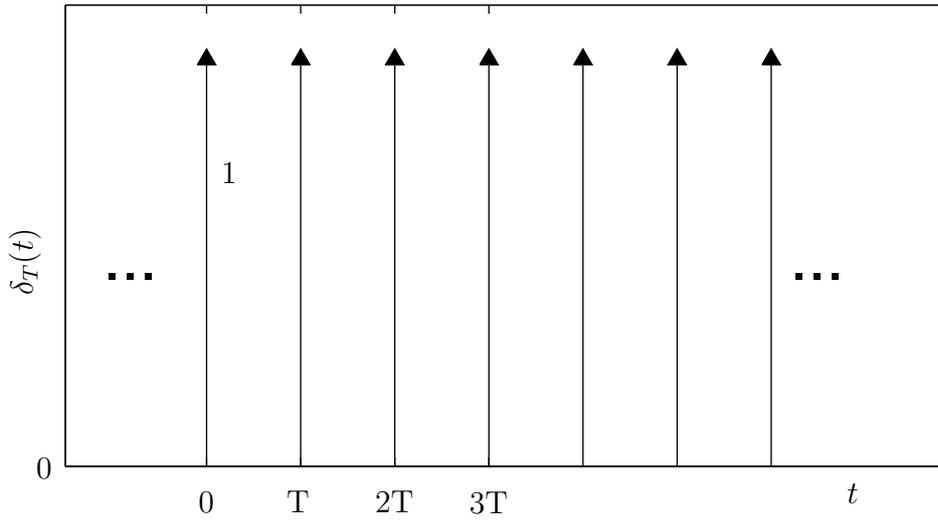
Seja

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Esta função periódica é conhecida como **função pente**, devido ao seu aspecto, conforme mostra a Figura 4.8.

Vamos calcular os coeficientes de Fourier.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = 2\pi/T.$$

Figura 4.8: Função pente  $(t)$ .

Devemos usar  $t_0 = -T/2$  de modo a facilitar o cálculo dos coeficientes, pois

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

ou seja,

$$c_k = \frac{1}{T}.$$

Concluimos que estes coeficientes não dependem de  $k$ .

Podemos então escrever

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi/T. \quad (4.19)$$

#### Exemplo 4.9

Seja

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t + T_1 - kT) - \delta(t - T_1 - kT).$$

Podemos calcular com facilidade os coeficientes desta função se utilizarmos o resultado do Exemplo 4.8. Nesta direção, seja

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Logo,

$$y(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1).$$

Mas se

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

então

$$x(t + T_1) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0(t+T_1)},$$

ou seja,

$$x(t + T_1) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 T_1} e^{jk\omega_0 t}.$$

Da mesma forma

$$x(t - T_1) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_0 T_1} e^{jk\omega_0 t}.$$

Usando estes resultados em  $y(t)$  temos

$$y(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}] e^{jk\omega_0 t}.$$

Usando a definição de  $\text{sen}(k\omega_0 T_1)$  obtemos

$$y(t) = \frac{2j}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sen}(k\omega_0 T_1) e^{jk\omega_0 t}, \quad (4.20)$$

de onde concluímos que os coeficientes da expansão de  $y(t)$  são

$$c_k = \frac{2j}{T} \text{sen}(k\omega_0 T_1).$$


---

## 4.9 Exercícios

1. Um sinal  $x(t)$  contínuo no tempo é real e tem período fundamental  $T = 8$ . Seus coeficientes de Fourier não-nulos são  $a_1 = a_{-1} = 2$ ,  $a_3 = a_{-3}^* = 4j$ .

Expresse  $x(t)$  na forma  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$ .

Esboce os espectros de amplitude e de fase.

2. Considere o sinal  $x(t) = 2 + \cos(2\pi t/3) + 4 \operatorname{sen}(5\pi t/3)$ . Calcule a frequência fundamental  $\omega_0$  e os coeficientes da série exponencial de Fourier.

Esboce os espectros de amplitude e de fase.

3. Calcule os coeficientes da série exponencial de Fourier para o sinal periódico

$$x(t) = \begin{cases} 1,5, & 0 \leq t < 1; \\ -1,5, & 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

cuja frequência fundamental é  $\omega_0 = \pi$ .

Esboce os espectros de amplitude e de fase.

4. Seja  $x_1(t)$  um sinal periódico com frequência fundamental  $\omega_1$  e coeficientes de Fourier  $a_k$ .

Dado que  $x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$ , qual é a frequência fundamental de  $x_2(t)$  relativa a  $\omega_1$ ? Encontre uma relação entre os coeficientes de Fourier  $b_k$  de  $x_2(t)$  e os coeficientes  $a_k$ .

5. Calcule os coeficientes da série de Fourier de  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - nT)$ ,  $0 < t_0 < T$ .

6. Determine a representação em série de Fourier para cada um dos sinais a seguir. Obtenha a série exponencial. Obtenha a série trigonométrica, tanto como soma das funções seno e cosseno como na forma da soma de funções cosseno.

Esboce os espectros de amplitude e de fase.

- a) Cada  $x(t)$  mostrado nas Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.  
 b)  $x(t)$  periódico com período 2 e  $x(t) = e^{-t}$  para  $-1 < t < 1$ .  
 c)  $x(t)$  periódico com período 4 e

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi t), & 0 \leq t \leq 2; \\ 0, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

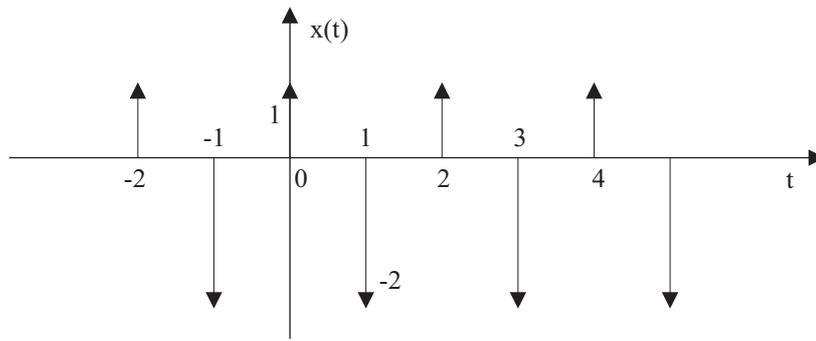


Figura 4.9: Sinal periódico.

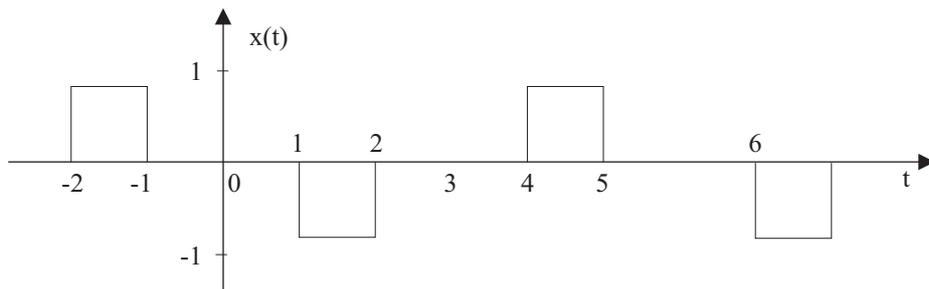


Figura 4.10: Sinal periódico.

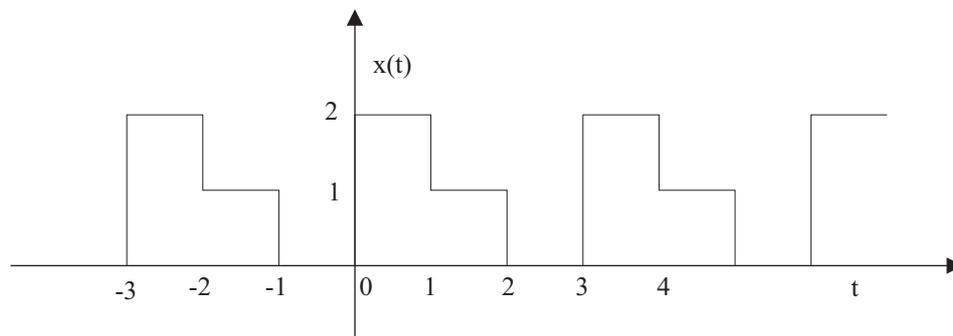


Figura 4.11: Sinal periódico.

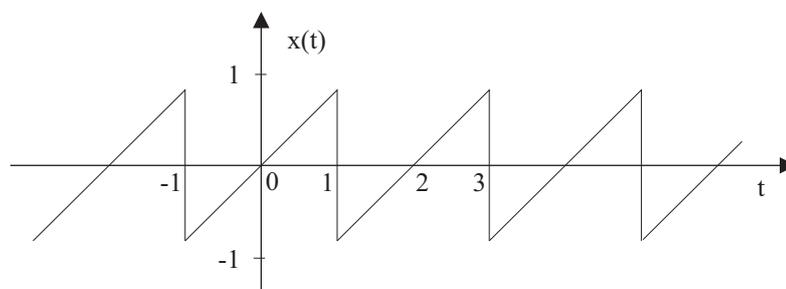


Figura 4.12: Sinal periódico.

# Capítulo 5

## Transformada de Fourier

### 5.1 Introdução

A série de Fourier se aplica a sinais periódicos. Embora também possa ser aplicada a sinais não-periódicos, neste caso a transformada de Fourier é mais útil. A transformada é definida como o limite da série quando o período tende a infinito.

### 5.2 Desenvolvimento da transformada de Fourier de um sinal não-periódico

Vamos revisar a série para o trem de pulsos retangulares

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & \tau/2 < |t| < T/2. \end{cases} \quad (5.1)$$

conforme mostrado na Figura 4.4.

No Capítulo 4 calculamos a série para este sinal e obtivemos

$$c_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0T/2}, \quad k \neq 0, \quad c_0 = \tau/T. \quad (5.2)$$

Vamos agora considerar o sinal

$$X(\omega) = \frac{2 \text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega},$$

o qual foi obtido da expressão (5.2) multiplicando-a por  $T$  e fazendo  $k\omega_0 \rightarrow \omega$ . Assim, os coeficientes  $c_k$  podem ser tomados como amostras desta função  $X(\omega)$  dividida por  $T$ . Logo, a função  $X(\omega)$ , exceto pelo fator  $T$ , representa uma envoltória sobre as linhas que definem a amplitude das componentes espectrais, conforme mostra a Figura 5.1. Nesta figura foram desenhados os coeficientes para três valores de  $T$  mantendo-se  $\tau$  fixo. Observe que à medida que  $T$  cresce,  $\omega_0$  decresce e as amostras da envoltória tornam-se mais próximas entre si. Assim, quando  $T \rightarrow \infty$  ocorrem os seguintes fenômenos:

1. a periodicidade de  $x(t)$  desaparece e o trem de pulsos tende a um pulso apenas;

2. o espaçamento entre as amostras de  $X(\omega)$  tende a zero e o conjunto de amostras tende à envoltória.

Concluimos que podemos interpretar um sinal não-periódico com o limite de um periódico. Neste processo de limite, os coeficientes da série de Fourier multiplicados pelo período tendem a uma curva contínua, a envoltória destes coeficientes, a qual será definida como a transformada de Fourier.

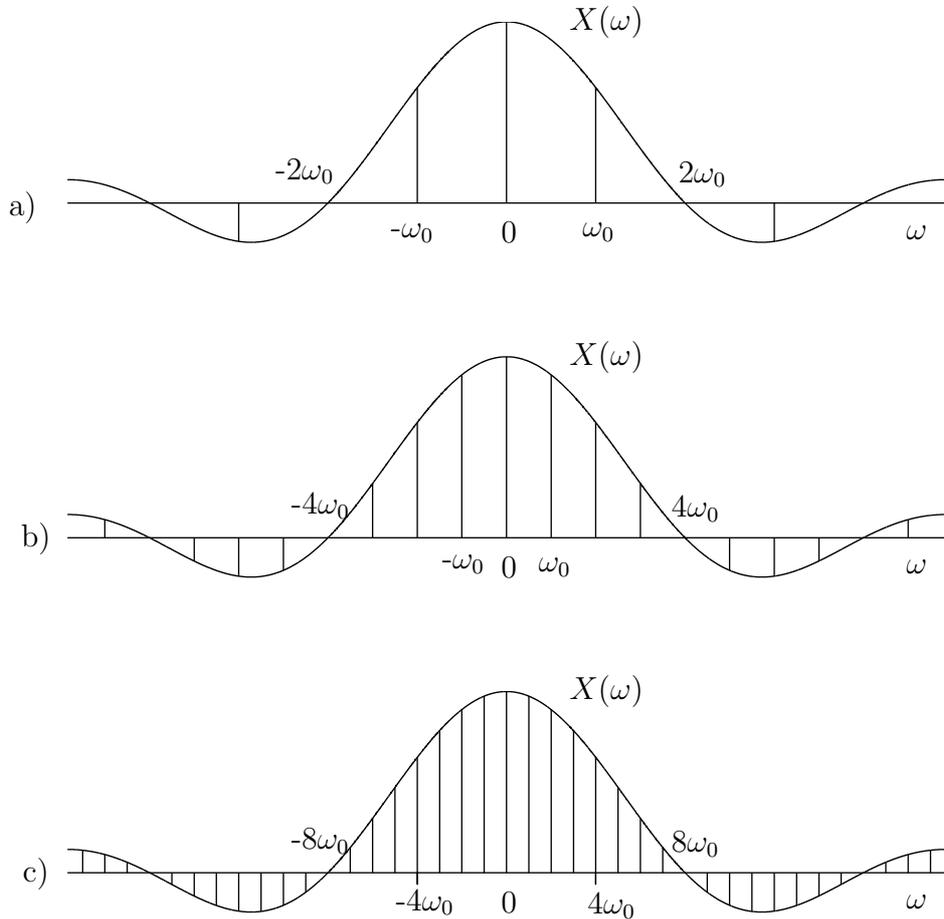


Figura 5.1: Coeficientes de Fourier e sua envoltória para o trem de pulsos retangulares, com  $\tau$  fixo e: a)  $T = 2\tau$ , b)  $T = 4\tau$ , c)  $T = 8\tau$ .

Vamos agora considerar o sinal não-periódico genérico  $x(t)$  da Figura 5.2 e sua extensão periódica com período  $T$ ,  $\tilde{x}(t)$ , também mostrado na Figura 5.2.

Podemos escrever

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT).$$

Como  $\tilde{x}(t)$  é periódico, podemos expandí-lo em série de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi/T,$$

onde

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

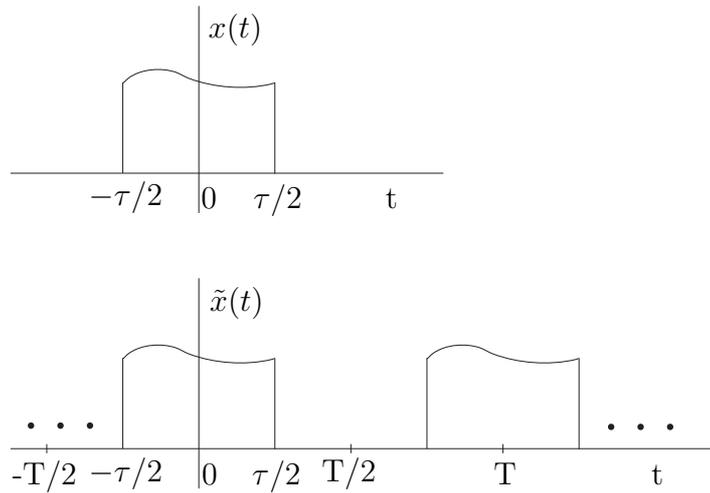


Figura 5.2: Um sinal  $x(t)$  não-periódico e sua extensão periódica  $\tilde{x}(t)$  com período  $T$ .

Mas  $\tilde{x}(t) = x(t)$  no intervalo  $-T/2 < t < T/2$ . Logo, podemos calcular os coeficientes  $c_k$  usando

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Além disto, como  $x(t)$  é nulo fora do intervalo  $-T/2 < t < T/2$ , podemos ainda escrever

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Posto este resultado, vamos agora definir a seguinte função

$$X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.3)$$

Portanto, podemos obter os coeficientes  $c_k$  a partir de  $X(\omega)$  fazendo

$$c_k = \frac{X(\omega)}{T} \Big|_{\omega=k\omega_0}.$$

Usando este resultado para escrever a série de  $\tilde{x}(t)$  temos

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Vamos agora multiplicar e dividir esta expressão por  $\omega_0$ :

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$

Como  $T\omega_0 = 2\pi$ , temos

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0. \quad (5.4)$$

O cálculo representado por esta expressão pode ser interpretado através da Figura 5.3.

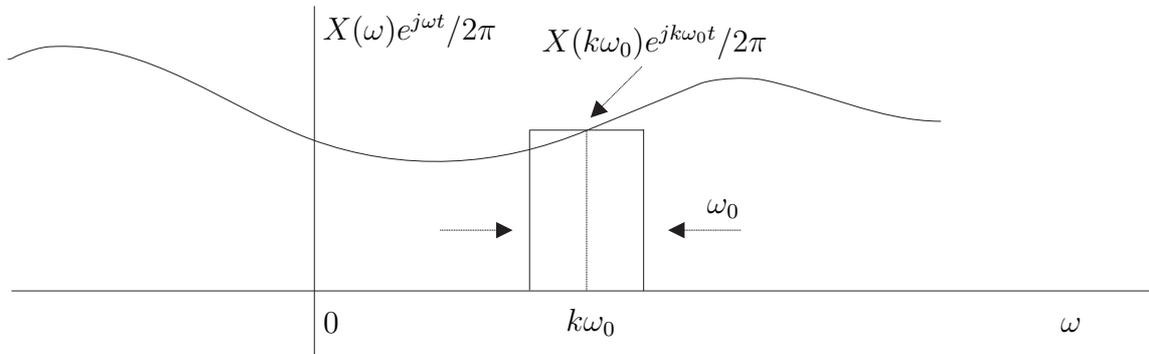


Figura 5.3: Interpretação do cálculo da série de  $\tilde{x}(t)$ .

Observamos que  $X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$  é a área do retângulo mostrado na Figura 5.3. Assim, a função  $\tilde{x}(t)$  equivale à soma das áreas dos retângulos em  $k\omega_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Vamos analisar o comportamento deste cálculo à medida que  $T \rightarrow \infty$ . Como consequência,  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Podemos então colocar as seguintes tendências:

1- Se  $\omega_0 \rightarrow 0$ , então podemos tomar  $k \rightarrow \infty$  de forma que  $k\omega_0$  pode ser considerada uma variável contínua  $\omega$ ;

2- O termo  $X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$  na expressão (5.4) é a área do retângulo em  $k\omega_0$ . A soma dessas áreas quando  $\omega_0 \rightarrow 0$ , tende a ser a área sob a curva  $X(\omega)e^{j\omega t}$ .

Estas observações permitem escrever

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.5)$$

Mas quando  $T \rightarrow \infty$ , temos que  $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ . Portanto, no limite quando  $T \rightarrow \infty$  teremos, usando a expressão (5.4),

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.6)$$

Temos também,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (5.7)$$

As expressões (5.6) e (5.7) mostram que podemos calcular uma função  $X(\omega)$  associada a  $x(t)$  e que de  $X(\omega)$  podemos calcular  $x(t)$ . Então  $x(t)$  e  $X(\omega)$  são duas representações de um mesmo sinal, uma no tempo e outra em frequência.

**Definição:** Dado um sinal  $x(t)$ , a função

$$X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5.8)$$

é a transformada de Fourier de  $x(t)$ .

**Definição:** Dada a transformada de Fourier  $X(\omega)$ , a função

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (5.9)$$

é a transformada inversa de Fourier de  $X(\omega)$ .

A expressão (5.9) resulta da expressão

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

quando  $T \rightarrow \infty$  ou  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Portanto, a expressão (5.6) tem o caráter de expansão de um sinal  $x(t)$  em uma base de funções exponenciais complexas. Porém, enquanto que os sinais periódicos utilizam apenas a série de funções exponenciais complexas harmônicas de  $\omega_0$ , o sinal não-periódico  $x(t)$  exige exponenciais complexas em todas frequências.

Ainda nesta interpretação,  $X(\omega) d\omega/2\pi$  assume o caráter dos coeficientes  $c_k$ . Porém, estes coeficientes são agora infinitesimais, indicando a forma de participação das componentes espectrais. Também, como a amplitude destas componentes depende de  $X(\omega)d\omega$ , a função  $X(\omega)$  tem o caráter de densidade de amplitude espectral.

Resumindo, enquanto que  $\tilde{x}(t)$  possui harmônicas apenas em frequências discretas,  $x(t)$  possui harmônicas em todas as frequências. Enquanto que  $\tilde{x}(t)$  possui harmônicas com amplitudes finitas,  $x(t)$  possui harmônicas com amplitudes infinitesimais.

Tomando agora o caso da transformada, a expressão (5.8) resulta da expressão

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

quando  $T \rightarrow \infty$ . Portanto, a expressão (5.8) tem o caráter do cálculo dos coeficientes da série de Fourier. Porém, como  $x(t)$  não é periódico, os coeficientes se transformam em uma função da variável contínua  $\omega$ .

## 5.3 Convergência da transformada de Fourier

1- Se  $x(t)$  é um sinal de energia, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty,$$

então  $X(\omega)$  é finita e o erro

$$e(t) = x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

tem energia nula.

De forma alternativa, temos o critério de Dirichelet.

2- Suponha que  $x(t)$  é tal que

- a) é absolutamente integrável,
- b) apresenta número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito de tempo,
- c) apresenta número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito de tempo.

Então  $x(t)$  e a inversa de  $X(\omega)$  são idênticos exceto nos pontos de descontinuidade, onde a inversa tende ao valor médio dos limites laterais.

## 5.4 Exemplos de cálculo da transformada de Fourier

### Exemplo 5.1

Seja  $x(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ .

Em primeiro lugar, observe que  $x(t)$  é um sinal de energia.

Sua transformada de Fourier será dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt,$$

a qual fornece

$$\mathfrak{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega}. \quad (5.10)$$

Podemos ainda escrever

$$\mathfrak{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j\theta}, \quad \theta = \arctan(\omega/a).$$

A Figura 5.4 mostra os espectros de amplitude e de fase associados à  $\mathfrak{F}\{e^{-at}u(t)\}$ .

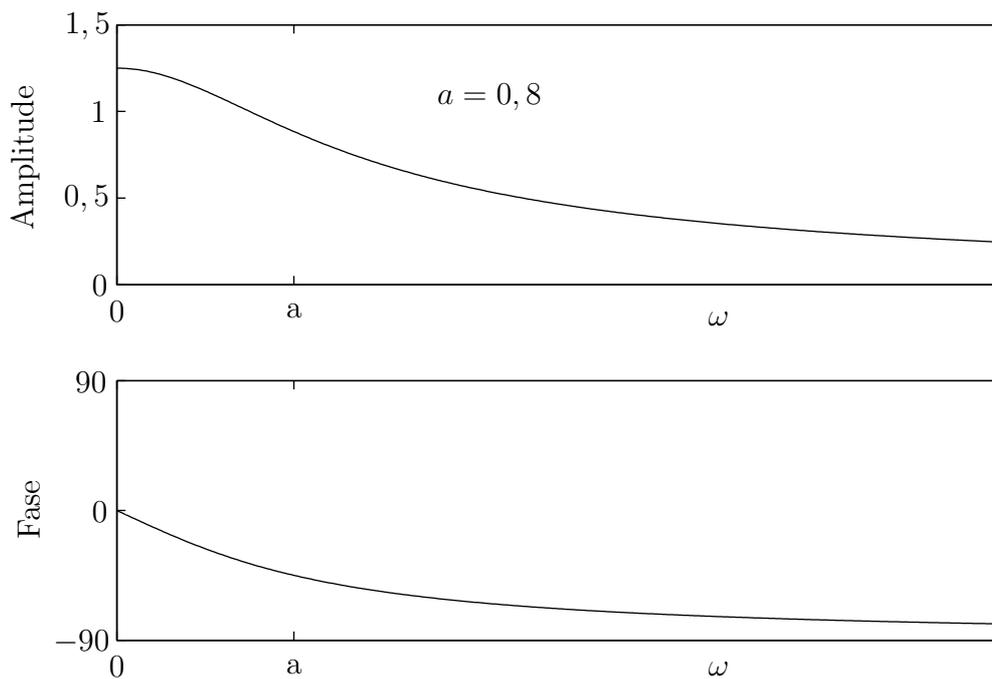


Figura 5.4: Espectros de frequência para  $x(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ .

### Exemplo 5.2

Seja  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$ .

Este também é um sinal de energia.

A transformada é dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt,$$

a qual fornece

$$\mathfrak{S}\{e^{-at}u(t)\} = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt, \quad (5.11)$$

ou

$$\mathfrak{S}\{e^{-at}u(t)\} = \int_{-\infty}^0 e^{at-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at-j\omega t} dt. \quad (5.12)$$

Portanto,

$$\mathfrak{S}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad a > 0. \quad (5.13)$$

A Figura 5.5 mostra o espectro de amplitude associado à  $\mathfrak{S}\{e^{-a|t|}\}$ . Observe que temos apenas o espectro de amplitudes pois a transformada é real e seu espectro de fase é nulo.

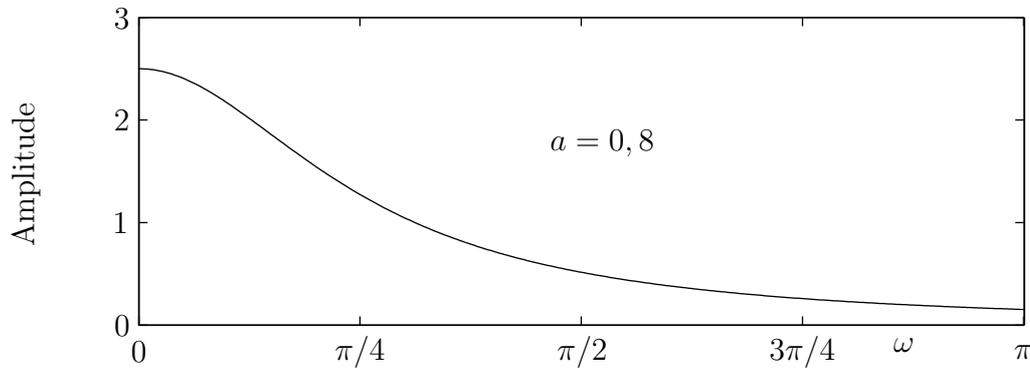


Figura 5.5: Espectro de frequência para  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$ .

### Exemplo 5.3

Seja  $x(t) = \delta(t)$ .

Demonstra-se que este não é um sinal de energia. Apesar disto, podemos calcular sua transformada.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Mas  $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ . Logo,

$$\mathfrak{S}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5.14)$$

O espectro de frequências é composto apenas pelo espectro de amplitudes e é constante e igual a 1 para todas as frequências.

**Exemplo 5.4**

Seja  $X(\omega) = \delta(\omega)$ .

Vamos calcular o sinal no tempo correspondente a esta transformada, usando a expressão da transformada inversa.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Pela propriedade do produto de função por impulso, temos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega.$$

Logo,

$$\mathfrak{S}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}. \quad (5.15)$$

Concluimos que um sinal constante no tempo apresenta um espectro de frequências com apenas uma componente na frequência zero. Além disto, esta componente é do tipo impulsivo, o que significa que a sua área é diferente de zero.

Usando estes resultados, podemos calcular a transformada inversa de  $X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega_0 t} d\omega.$$

Logo,

$$\mathfrak{S}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}. \quad (5.16)$$

**Exemplo 5.5**

Vimos no Exemplo 5.3 que  $\mathfrak{S}\{\delta(t)\} = 1$ . Logo, a transformada inversa de  $X(\omega) = 1$  é o impulso no tempo. Este resultado leva a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t),$$

a qual fornece um resultado surpreendente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t). \quad (5.17)$$

**Exemplo 5.6**

Vimos no Exemplo 5.4 que  $\mathfrak{S}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ . Este resultado permite calcular as transformadas das funções  $\cos(\omega_0 t)$  e  $\sin(\omega_0 t)$ .

Vamos iniciar com a transformada do cosseno.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \{0,5e^{j\omega_0 t} + 0,5e^{-j\omega_0 t}\} e^{-j\omega t} dt.$$

Mas como a transformada é uma operação linear, podemos escrever

$$X(\omega) = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt.$$

Usando o resultado do Exemplo 5.4 temos

$$\mathfrak{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0). \quad (5.18)$$

A Figura 5.6 ilustra este espectro mostrando que o conteúdo em frequência da função cosseno se resume a apenas duas componentes em  $\omega_0$  e  $-\omega_0$ . Este resultado é coerente com o fato de que a transformada de Fourier expressa um sinal como uma combinação contínua de cossenóides e com o fato de que o espectro mostra as componentes que estão presentes na expansão.

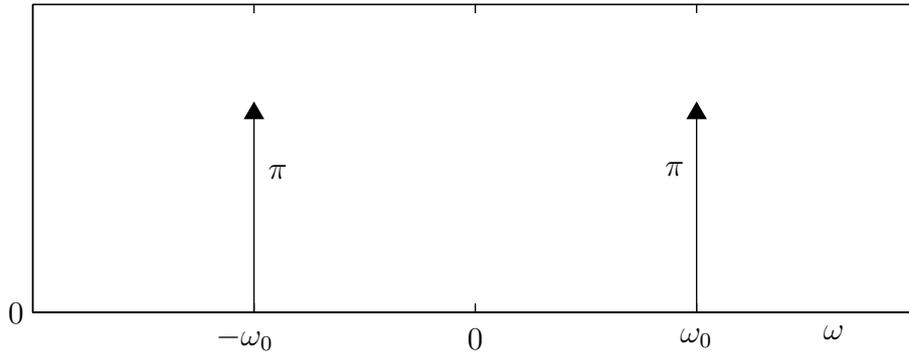


Figura 5.6: Espectro de frequência para  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ .

De maneira semelhante é possível demonstrar que

$$\mathfrak{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0). \quad (5.19)$$

Como a diferença entre as funções cosseno e seno se resume a uma diferença de fase de  $\pi/2$ , este fato aparece na transformada, pela presença do fator “j” na transformada do seno.

A Figura 5.7 ilustra este espectro, o qual, além das componentes do espectro do cosseno, apresenta também um espectro de fase para levar em conta os fatores “j” e “-j”.

### Exemplo 5.7

Vamos calcular a transformada de Fourier de um pulso retangular, definido como

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (5.20)$$

A transformada é calculada como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt.$$

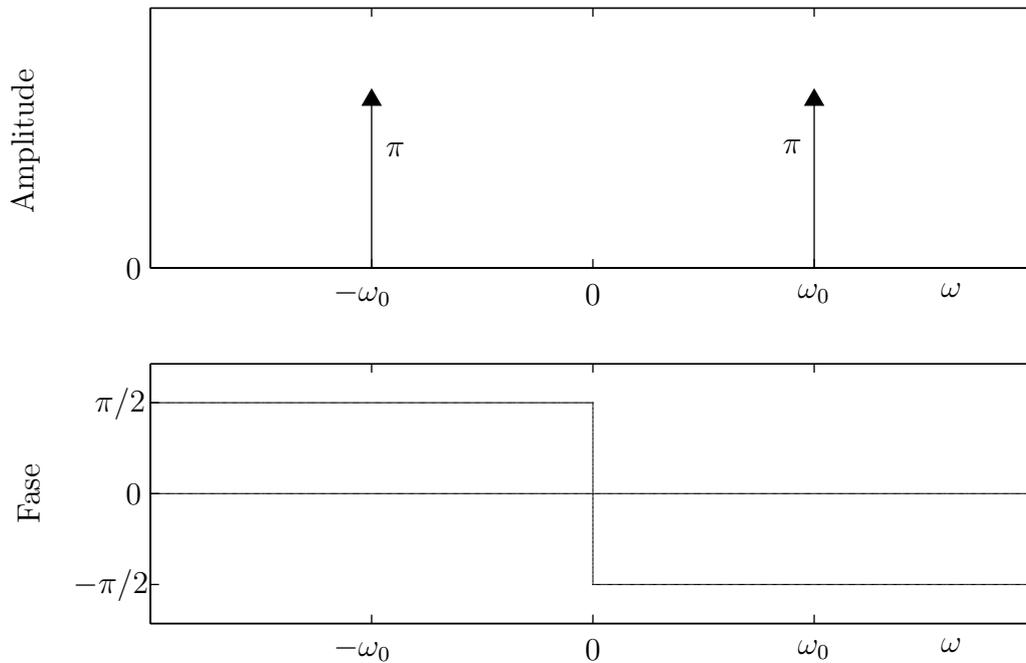


Figura 5.7: Espectro de frequência para  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ .

Logo,

$$X(\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega}.$$

Multiplicando por 2 o numerador e o denominador obtemos

$$X(\omega) = \frac{2\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega}.$$

Multiplicando por  $\tau$  o numerador e o denominador obtemos

$$X(\omega) = \tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

A função

$$\frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

aparece com muita frequência na teoria de sinais e sistemas. Por isto ela ganhou nomes especiais:

**Definição** - Função  $\text{sinc}(x)$  (sinc de x)

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}. \quad (5.21)$$

**Definição** - Função  $\text{Sa}(x)$  (sampling de x)

$$\text{Sa}(x) \triangleq \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (5.22)$$

Observe que a diferença entre as duas é apenas um fator de escala. Assim

$$\text{sinc}(x) = \text{Sa}(\pi x), \quad \text{Sa}(x) = \text{sinc}(x/\pi). \quad (5.23)$$

Usaremos a função sampling neste texto.

A Figura 5.8 mostra a função  $Sa(x)$ . Observe que ela simétrica em torno de  $x = 0$ , cruza o zero em pontos periódicos  $k\pi$ , onde a função  $\text{sen}(x)$  do numerador se anula e suas amplitudes decaem assintoticamente segundo  $1/x$ . Existe uma indeterminação no ponto  $x = 0$ , a qual, se resolvida aplicando L'Hopital, fornece  $Sa(0) = 1$ .

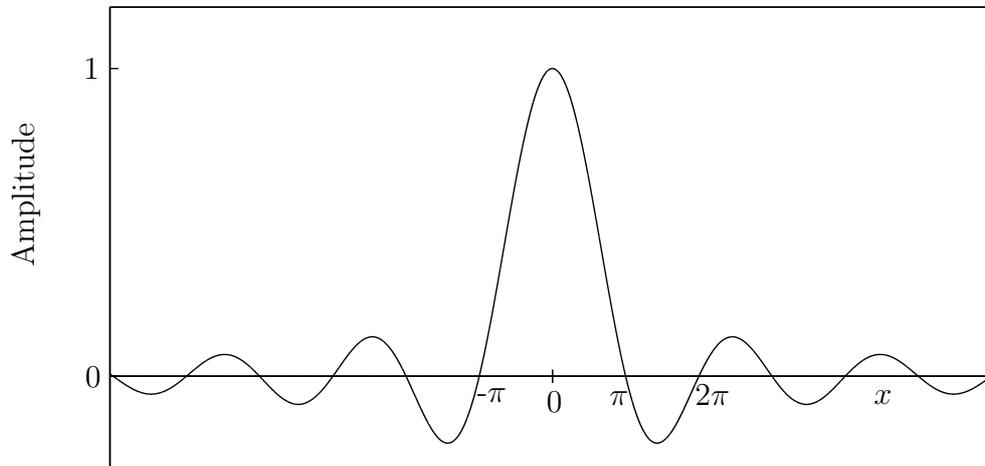


Figura 5.8: Função  $Sa(x)$ .

Usando esta função, podemos escrever a transformada do pulso retangular como

$$X(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2). \quad (5.24)$$

A Figura 5.9 mostra o espectro do pulso retangular.

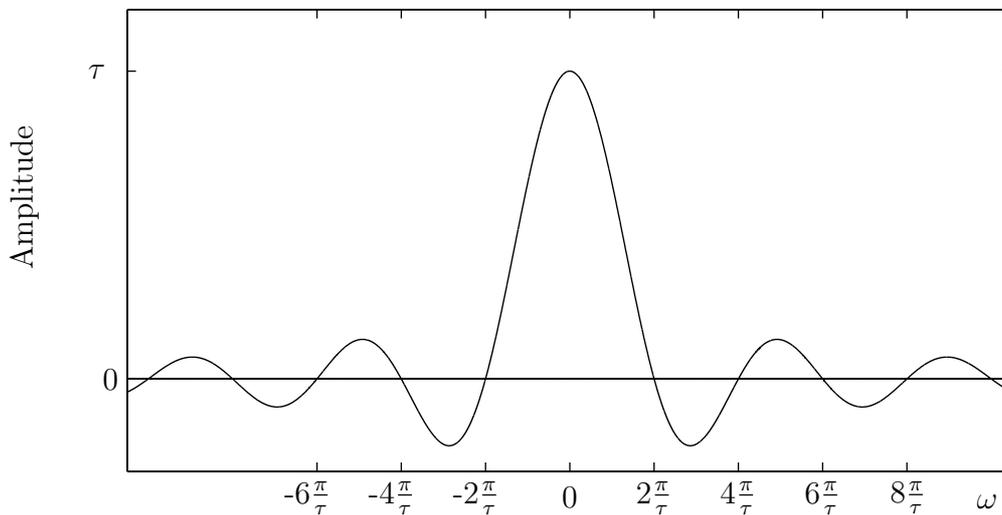


Figura 5.9: Espectro do pulso retangular.

---

### Exemplo 5.8

Vamos calcular a transformada inversa de um espectro com o formato de um pulso retangular, definido como

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W/2; \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (5.25)$$

Usando a expressão da transformada inversa em (5.6) obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W/2}^{W/2} e^{j\omega t} d\omega.$$

Logo,

$$x(t) = \frac{W}{2\pi} \frac{\text{sen}(Wt/2)}{Wt/2},$$

ou

$$x(t) = \frac{W}{2\pi} \text{Sa}(Wt/2). \quad (5.26)$$

Vamos estudar agora as relações entre as variações de um sinal no tempo com as respectivas variações em frequência.

Para isto considere a Figura 5.10, a qual apresenta um sinal do tipo  $\text{Sa}(t)$  no tempo e seu espectro. Observe que na primeira figura temos um valor maior para  $W$  que na segunda figura, implicando em um espectro com maior largura. Já no domínio do tempo, temos um comportamento inverso: o pulso  $\text{Sa}(t)$  correspondente ao espectro mais largo oscila mais rapidamente pois o período de oscilação depende de  $1/W$ . Assim, seu lóbulo central é mais estreito e o espectro está mais concentrado ao redor da origem.

Estas observações mostram que quanto mais rápidas as variações no tempo, mais largo é o espectro. Isto se explica lembrando que estamos decompondo um sinal temporal em uma combinação de sinais senoidais. Assim, quanto mais rápida a variação no tempo, tanto maior é a frequência máxima das componentes senoidais necessárias. Como o espectro mostra as frequências que participam da representação do sinal, o espectro se alarga à medida que o sinal varia mais rapidamente no tempo.

Outra ilustração deste fenômeno é o impulso e seu espectro, o qual se estende por todas frequências. Por outro lado, o sinal constante no tempo tem como espectro um impulso, indicando que o conteúdo espectral se localiza em  $\omega = 0$ .

Por fim, outra observação que podemos inferir das figuras é que um espectro de largura finita, como aquele com formato retangular, está associado a uma função no tempo com duração ilimitada. Esta é uma propriedade geral que vale para todos os espectros com faixa de frequências limitada. Veremos mais adiante que o inverso deste fenômeno também ocorre, ou seja, todos os sinais com duração finita no tempo têm espectros com largura ilimitada.

## 5.5 Propriedades da transformada

As propriedades da transformada são fundamentais. Em primeiro lugar, elas estabelecem conceitos que geram inúmeras aplicações práticas. Em segundo lugar, elas permitem, na maioria dos casos, que a transformada ou a transformada inversa sejam obtidas sem a necessidade de cálculos.

Por estas razões elas compõem o tópico mais importante da teoria da transformada e serão usadas intensivamente.

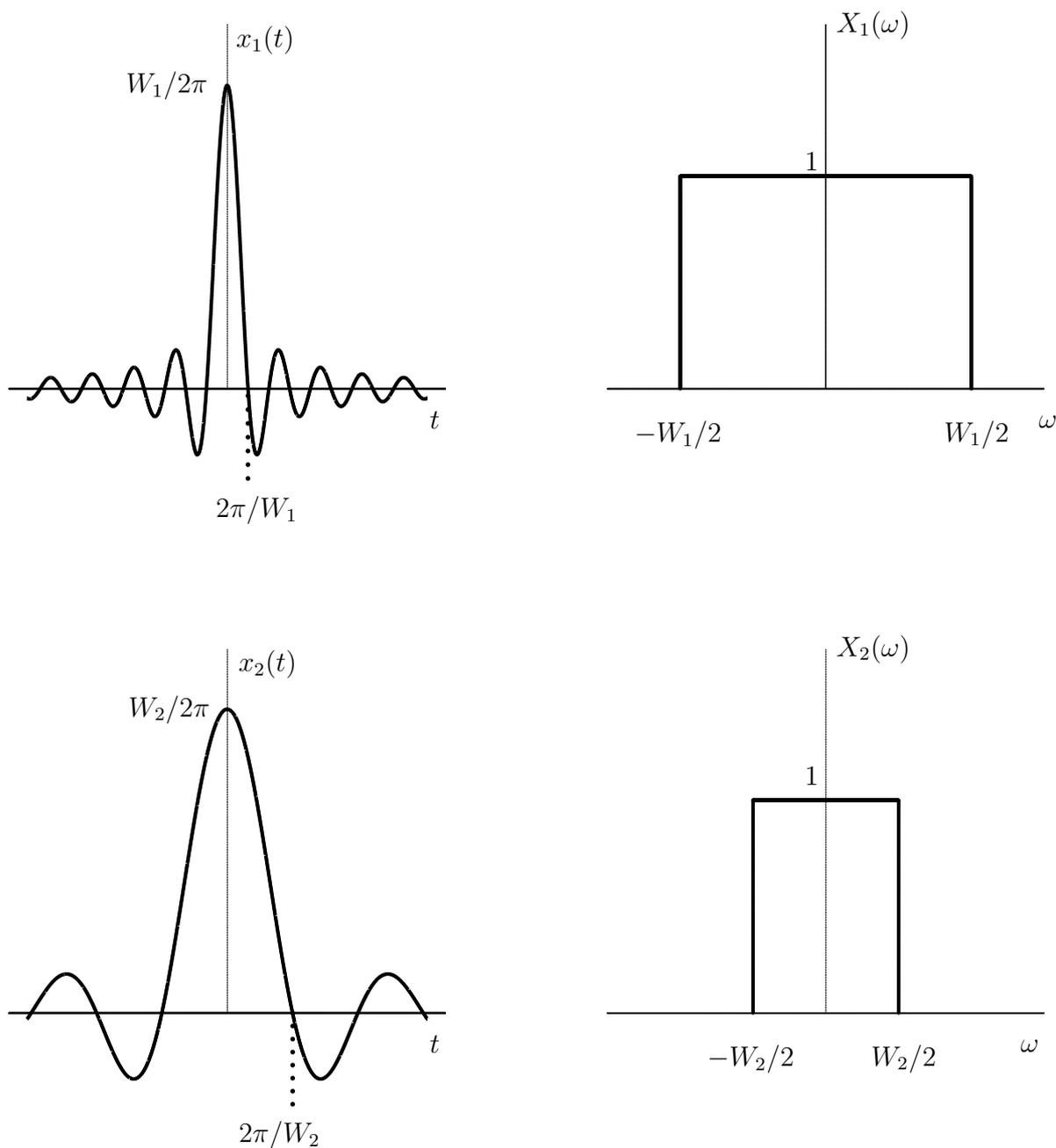


Figura 5.10: Sinal  $\text{Sa}(t)$  e seu espectro para dois valores do parâmetro  $W$ .

Vamos usar a seguinte notação para indicar um par formado por um sinal  $x(t)$  e sua transformada  $X(\omega)$ :

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega).$$

### Propriedade 1 - Linearidade

Sejam

$$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(\omega), \quad x_2(t) \longleftrightarrow X_2(\omega)$$

e  $a$  e  $b$  duas constantes. Então

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega), \quad (5.27)$$

ou seja, a combinação linear de sinais produz a combinação linear das transformadas.  
A demonstração desta propriedade usa a definição da transformada.

### Propriedade 2 - Deslocamento no tempo

Se

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega),$$

então

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega). \quad (5.28)$$

Observe que

$$|e^{-j\omega t_0} X(\omega)| = |X(\omega)|, \quad \angle e^{-j\omega t_0} X(\omega) = -\omega t_0 + \angle X(\omega).$$

Concluimos que o deslocamento de um sinal no eixo dos tempos implica em mudar apenas seu espectro de fase. Além disto, a alteração da fase se dá pela adição de uma componente proporcional à frequência, ou seja, **um deslocamento no tempo equivale a uma componente linear de fase**.

Por fim, observe que quando produzimos um atraso no tempo, ou seja, quando  $t_0$  é positivo, a inclinação da resposta linear de fase é negativa. Podemos então dizer que **um atraso no tempo equivale a uma componente linear de fase com inclinação negativa**.

Para demonstrar esta propriedade, seja  $y(t) = x(t - t_0)$ . Então,

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt.$$

Fazendo  $t - t_0 = \tau$ , temos

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} dt = e^{-j\omega t_0} X(\omega), \quad \text{cqd.}$$

### Exemplo 5.9

Sabemos que

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$

Logo,

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0},$$

ou seja, a transformada de um impulso é uma exponencial complexa periódica em frequência.

### Exemplo 5.10

Vamos usar a Propriedade 2 para calcular de forma simples a transformada da sinal  $x(t)$  da Figura 5.11.

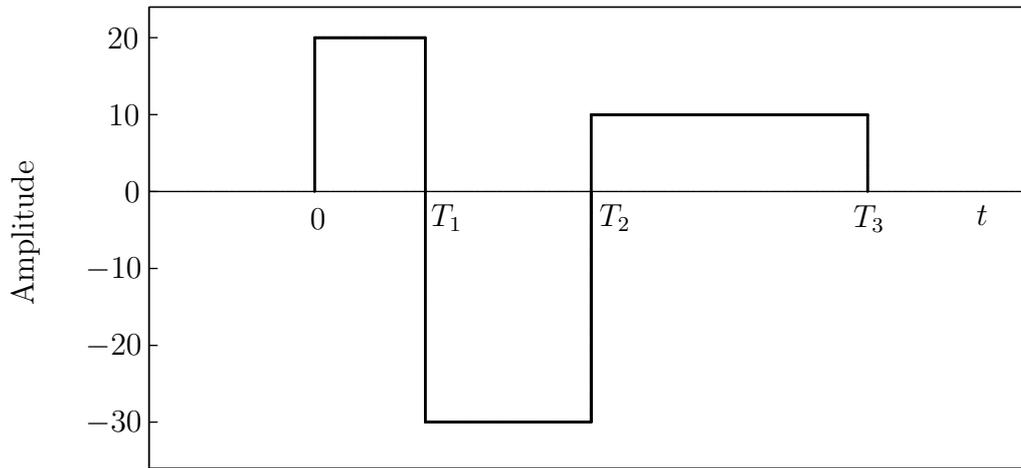


Figura 5.11: Sinal composto por pulsos retangulares.

Veja que o sinal pode ser escrito como uma composição de pulsos retangulares deslocados, da seguinte forma:

$$x(t) = 20 r_{L_1}(t - \tau_1) - 30 r_{L_2}(t - \tau_2) + 10 r_{L_3}(t - \tau_3)$$

onde  $r_{L_i}(t)$  são pulsos retangulares com amplitude unitária e largura  $L_i$  e

$$\tau_1 = \frac{T_1}{2}, \quad \tau_2 = \frac{T_2 + T_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{T_3 + T_2}{2},$$

$$L_1 = T_1, \quad L_2 = T_2 - T_1, \quad L_3 = T_3 - T_2.$$

Sabemos que a transformada de um pulso retangular com largura  $\tau$  é dada pela expressão (5.24), ou seja,

$$\mathfrak{F}\{r_\tau(t)\} = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2).$$

Logo, usando a propriedade do deslocamento no tempo, temos

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = L_1 \text{Sa}(\omega L_1/2) e^{-j\omega\tau_1} - L_2 \text{Sa}(\omega L_2/2) e^{-j\omega\tau_2} + L_3 \text{Sa}(\omega L_3/2) e^{-j\omega\tau_3}.$$

### Propriedade 3 - Simetrias

Temos várias propriedades ligadas a simetrias no tempo e em frequência. Em todos os casos a seguir vamos assumir que  $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ .

1)  $x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-\omega)$  pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right]^* = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt \right]^* = X^*(-\omega).$$

2) Se  $x(t)$  é real então  $X^*(\omega) = X(-\omega)$ .

Isto porque se  $x(t)$  é real, então  $x^*(t) = x(t)$  e, do item 1), temos  $X^*(-\omega) = X(\omega)$ . Como conseqüências bastante importantes temos:

Para  $x(t)$  real,  $|X(\omega)|$  é uma função par, enquanto que  $\angle X(\omega)$  é uma função ímpar.

### Exemplo 5.11

Seja  $x(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ .  
Sabemos que

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}.$$

Logo,

$$X^*(-\omega) = \frac{1}{a + j\omega} = X(\omega).$$

O espectro de amplitude é

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}},$$

o qual é uma função par. Por outro lado, o espectro de fase é

$$\angle X(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

o qual é uma função ímpar.

3)  $x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$  pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(-\omega)\tau} d\tau = X(-\omega).$$

### Exemplo 5.12

Seja  $x(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ . Então  $x(-t) = e^{at}u(-t)$  e

$$\mathfrak{F}\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a - j\omega} = X(-\omega).$$

---

4) Se  $x(t) = x(-t)$  então  $X(\omega) = X(-\omega)$  pois

Esta decorre da Propriedade 3.3.

Se  $x(t)$  é real, então esta propriedade se refere a sinais com simetria par.

---

**Exemplo 5.13**

Seja  $x(t) = e^{-|a|t}$ ,  $a > 0$ .

Sabemos que

$$X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = X(-\omega).$$


---

5) Se  $x(t)$  é real e par então  $X(\omega)$  é real e par.

Isto porque se  $x(t)$  é real, então, da Propriedade 3.2,  $X(\omega) = X^*(-\omega)$ . Mas se  $x(t)$  é par, então, da Propriedade 3.4,  $X(\omega) = X(-\omega)$ . Logo, para  $x(t)$  real e par,  $X(-\omega) = X^*(-\omega)$ , ou seja,  $X(\omega) = X^*(\omega)$ .

O Exemplo 5.13 mostra esta propriedade.

6) Se  $x(t) = -x(-t)$  então  $X(\omega) = -X(-\omega)$  pois

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau} d\tau = -X(-\omega).$$

Se  $x(t)$  é real, então esta propriedade se refere a sinais ímpares.

---

**Exemplo 5.14**

Seja  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$ .

Sabemos que

$$X(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].$$

Então, pela Propriedade 3.3, temos

$$\Im\{x(-t)\} = X(-\omega) = j\pi [\delta(-\omega + \omega_0) - \delta(-\omega - \omega_0)] = j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] = -X(\omega).$$


---

7) Se  $x(t)$  é real e ímpar então  $X(\omega)$  é imaginário e  $X(\omega) = -X^*(\omega)$ .

Isto porque se  $x(t)$  é real, então  $X(\omega) = X^*(-\omega)$ . Mas se  $x(t)$  é ímpar então  $X(\omega) = -X(-\omega)$ . Logo, para  $x(t)$  real e ímpar,  $X(-\omega) = -X^*(-\omega)$ , ou seja,  $X(\omega) = -X^*(\omega)$ . Também, isto implica em que  $X(\omega)$  é imaginário.

O Exemplo 5.14 ilustra esta propriedade.

#### Propriedade 4 - Diferenciação e integração

1) Se  $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ , então  $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$ .

Para demonstrar esta propriedade, vamos considerar a expressão da transformada inversa de  $X(\omega)$ :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Então

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Logo,  $\frac{dx(t)}{dt}$  e  $j\omega X(\omega)$  formam um par transformado, **cqfd**.

2) Se  $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ , então

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

A demonstração desta propriedade será abordada mais a frente.

#### Exemplo 5.15

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t).$$

Dado que  $\mathfrak{S}\{\delta(t)\} = 1$ , temos que

$$\mathfrak{S}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \quad (5.29)$$

Por outro lado,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1.$$

**Exemplo 5.16**

Vamos aplicar esta propriedade para agilizar o cálculo da transformada. Vamos aplicar para o caso do pulso retangular mostrado na expressão (5.20) e repetido aqui.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Podemos escrever

$$x(t) = u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2).$$

Logo,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t + \tau/2) - \delta(t - \tau/2),$$

conforme mostra a Figura 5.12.

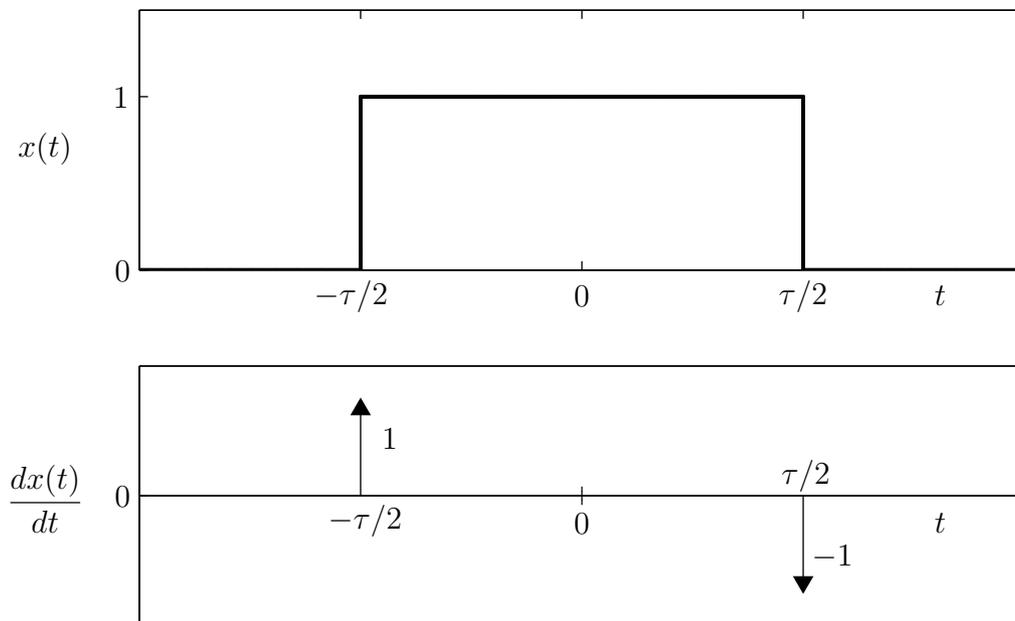


Figura 5.12: Pulso retangular e sua derivada.

A transformada de  $\frac{dx(t)}{dt}$  é facilmente calculada:

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2} = 2j \operatorname{sen}(\omega\tau/2).$$

Finalmente, usando a propriedade da integração, temos

$$X(\omega) = \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] 2j \operatorname{sen}(\omega\tau/2) = \frac{1}{j\omega} 2j \operatorname{sen}(\omega\tau/2) = \tau \operatorname{Sa}(\omega\tau/2).$$

**Exemplo 5.17**

Seja a função  $x(t)$  mostrada na Figura 5.13. A sua derivada está na mesma figura e

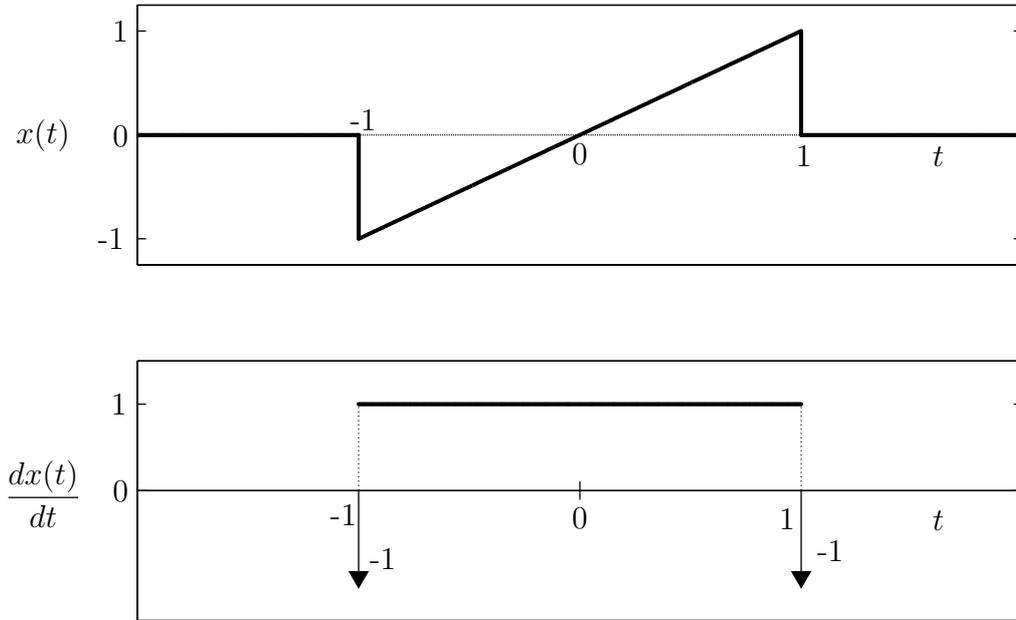


Figura 5.13: Pulso triangular e sua derivada.

irá facilitar sobremaneira o cálculo da transformada de  $x(t)$ .

A transformada de  $\frac{dx(t)}{dt}$  é dada por:

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = -e^{j\omega} - e^{-j\omega} + 2\text{Sa}(\omega) = -2 \cos(\omega) + 2\text{Sa}(\omega).$$

Usando a propriedade da integração, temos

$$X(\omega) = \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] [2\text{Sa}(\omega) - 2 \cos(\omega)] = \frac{2}{j\omega} [\text{Sa}(\omega) - \cos(\omega)].$$

### Exemplo 5.18

Podemos usar a propriedade da integral no tempo para calcular a integral definida de funções temporais. Como exemplo, vamos calcular a integral da função  $\text{Sa}(t)$ , ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt.$$

Lembrando que a expressão da transformada de Fourier é dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

concluimos que a integral desejada é igual à transformada de Fourier da função  $\text{Sa}(t)$  calculada na frequência  $\omega = 0$ , isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega = 0}.$$

Assim, lembrado que de (5.26) temos

$$x(t) = \frac{W}{2\pi} \text{Sa}(Wt/2) \longleftrightarrow X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases},$$

obtemos finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi.$$


---

### Propriedade 5 - Dualidade

Se  $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ , então  $X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ .

Para demonstrar esta propriedade vamos tomar a transformada inversa de  $x(t)$ :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Vamos trocar a variável  $t$  por  $\omega$  e vice-versa:

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j\omega t} dt.$$

Fazendo  $\omega = -\omega$  temos

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

ou seja, a transformada da função  $X(t)$  é a função  $2\pi x(-\omega)$ . **cqfd.**

Esta propriedade é muito útil para aumentarmos o elenco de pares transformados conhecidos. Seguem alguns exemplos.

---

#### Exemplo 5.19

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(\omega) = 1. \quad \text{Então } X(t) = 1 \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$


---

#### Exemplo 5.20

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \longleftrightarrow X(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2).$$

Então

$$X(t) = W \text{Sa}(Wt/2) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) = 2\pi \begin{cases} 1, & |\omega| < W/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

**Exemplo 5.21**

$$x(t) = e^{-a|t|}, a > 0 \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

Então

$$X(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}, a > 0 \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}.$$

**Propriedade 6** - Deslocamento em frequência

Se  $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ , então  $e^{j\omega_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$ .

Para demonstrar esta propriedade basta tomar a definição da transformada aplicada a  $e^{j\omega_0 t} x(t)$ .

**Propriedade 7** - Derivada em frequência

Se  $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ , então  $-jtx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$ .

Para demonstrar esta propriedade basta calcular a derivada da expressão da transformada de  $x(t)$ .

**Propriedade 8** - Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

Para demonstrar o teorema devemos calcular:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad \mathbf{cqd.} \end{aligned}$$

O teorema mostra que a energia total de um sinal, calculada no tempo, é igual à integral do módulo do espectro ao quadrado dividido pela constante  $2\pi$ . Assim, podemos associar energia à área do módulo do espectro ao quadrado. Esta associação está gravada na seguinte definição:

**Definição** - Densidade espectral de energia

$$\text{Densidade espectral de energia} \triangleq |X(\omega)|^2/2\pi. \quad (5.30)$$

### Exemplo 5.22

Tomando um pulso retangular no tempo, com amplitude  $a$  e largura  $\tau$ , sabemos que este tem uma energia normalizada igual a  $a^2\tau$ . Então, como a transformada do pulso é a função  $a\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$ , pelo teorema podemos afirmar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)|^2 d\omega = a^2\tau,$$

ou seja, podemos calcular a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\text{Sa}(\omega\tau/2)|^2 d\omega = 2\pi/\tau.$$

Podemos também analisar como que a energia do pulso retangular está distribuída no eixo de freqüências. Isto porque a densidade da energia em freqüência é dada por

$$\text{Densidade de energia} = \frac{1}{2\pi} |a\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)|^2.$$

Assim, observando a Figura 5.9, constatamos que a maior parte da energia (cerca de 90%) se concentra na região do lóbulo central da função Sa, ou seja, na região  $0 \leq \omega \leq 2\pi/\tau$ . Podemos observar também que a energia se espalha por todo o eixo de freqüências.

### Propriedade 9 - Convolução no tempo

Se  $y(t) = x(t) * h(t)$  então  $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ , ou seja, a operação de convolução no tempo dá lugar à operação de produto no domínio da freqüência.

Vamos demonstrar esta propriedade no contexto de uma das suas principais aplicações.

Considere o sistema LIT mostrado na Figura 5.14. Conforme estudado no Capítulo 2, a relação

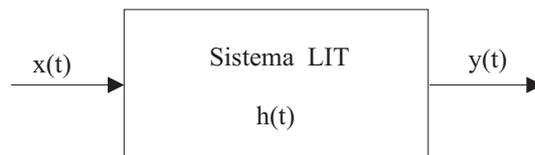


Figura 5.14: Entrada e saída de um sistema linear invariante no tempo.

entre a entrada  $x(t)$  e a saída  $y(t)$  é dada pela convolução entre a resposta ao impulso  $h(t)$  e a entrada  $x(t)$ , ou seja,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau.$$

Vamos transformar esta relação entre entrada e saída para o domínio da frequência, tomando a transformada da expressão da convolução:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\{y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right\} d\tau.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = H(\omega)e^{-j\omega\tau}.$$

Então

$$\mathfrak{S}\{y(t)\} = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = H(\omega)X(\omega).$$

Podemos então afirmar que

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (5.31)$$

ou seja, que o espectro do sinal de saída do sistema LID é igual ao espectro da entrada multiplicado pela transformada de Fourier da resposta ao impulso do sistema.

Este resultado também demonstra a propriedade da convolução no tempo.

Esta é uma das propriedades mais importantes da transformada de Fourier. Ela coloca em evidência dois fatos:

1. A operação de convolução que relaciona a entrada e a resposta ao impulso para produzir a saída no tempo, dá lugar a uma operação de produto no domínio da frequência. Esta é essência da propriedade em estudo.
2. A transformada de Fourier da resposta ao impulso ganha especial importância por ser elemento chave na determinação da saída.

O primeiro fato resolve uma grande dificuldade da aplicação da relação de convolução para a obtenção da saída de um sistema LID. Esta dificuldade reside na complexidade do cálculo da convolução. Ao operarmos no domínio transformado, transformamos a operação de convolução em produto, o qual é muito mais fácil para o ser humano. Assim, praticamente todas as análises da operação de um sistema LID se dão no domínio da frequência.

Um exemplo simples que ilustra o uso do domínio da frequência para discorrer sobre a ação de um sistema, é o caso dos aparelhos de condicionamento dos sinais de áudio, como os amplificadores e os equalizadores domésticos. Quando desejamos realçar os sons de tambores e baixos, sabemos que devemos aumentar o ganho para os sons graves. Isto significa que devemos enfatizar os sons de baixas frequências relativas. Assim, devemos alterar a configuração do sistema de forma que o ganho nas frequências correspondentes seja maior que o ganho nas demais frequências. A noção de baixas frequências e de alteração de ganho em faixa de frequências só é possível no domínio transformado e é motivado pela relação (5.31).

É instrutivo tentar expressar esta mesma ação através da resposta ao impulso e a operação de convolução.

O segundo fato coloca uma importância muito grande na função  $H(\omega)$ . De fato, a transformada da resposta ao impulso desempenha um papel fundamental na engenharia. Este fato motivou uma denominação especial para esta função:

$$H(\omega) = \text{Função de transferência},$$

onde o termo “transferência”, provavelmente, se deve à noção que  $H(\omega)$  “transfere” a entrada para a saída.

Observe que, da mesma forma que a resposta ao impulso, a função de transferência caracteriza completamente um sistema LID em termos de entrada e saída.

Uma consequência desta propriedade é a função de transferência de sistemas LID em cascata.

Suponha dois sistemas em cascata, com respostas ao impulso  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$ , respectivamente. Sabemos que a resposta do conjunto é dada pela convolução entre as duas respostas ao impulso, conforme mostra a Figura 5.15.

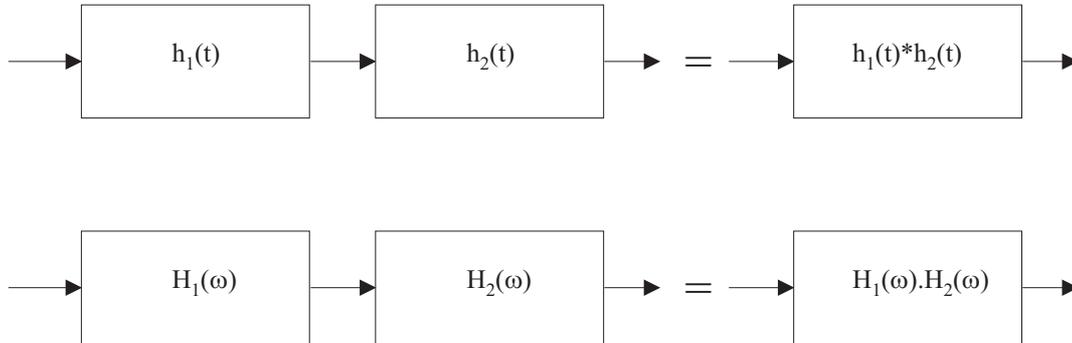


Figura 5.15: Equivalência de sistemas LID em cascata.

O mesmo resultado no domínio da frequência mostra que o sistema equivalente terá um função de transferência igual ao produto das funções em cascata.

Vamos agora analisar a função de transferência de vários sistemas LID.

### Exemplo 5.23

Sistema atrasador

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad \longrightarrow \quad y(t) = x(t - t_0).$$

Portanto,

$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0},$$

ou seja,

$$|H(\omega)| = 1, \quad \angle H(\omega) = -\omega_0 t.$$

### Exemplo 5.24

Sistema diferenciador

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Sabemos, pela propriedade (4), que

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega).$$

Portanto,

$$H(\omega) = j\omega.$$

**Exemplo 5.25**

Sistema integrador

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

Sabemos, pela propriedade (4), que

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Supondo que

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = 0,$$

temos

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega}.$$

**Exemplo 5.26**

Definição de **filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\omega_c$**

A definição é expressa especificando a função de transferência correspondente, conforme mostra a Figura 5.16.

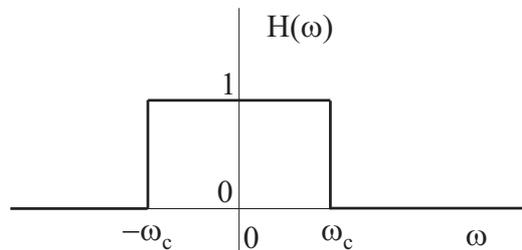


Figura 5.16: Filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\omega_c$ .

**Exemplo 5.27**

Usando a propriedade da convolução, podemos calcular a transformada de um sinal triangular com facilidade. Para tanto, basta verificar que a convolução de dois retângulos idênticos, com amplitude unitária, duração  $\tau$  e centrados em  $t = 0$  é igual a um triângulo centrado em  $t = 0$ , com amplitude  $\tau$  e base igual a  $2\tau$ . Logo, a transformada deste triângulo será igual ao quadrado da transformada de cada retângulo. Normalizando a amplitude do triângulo para a unidade, concluímos que o sinal

$$x(t) = \begin{cases} (t + \tau)/\tau, & -\tau < t < 0; \\ (\tau - t)/\tau, & 0 < t < \tau; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (5.32)$$

tem como transformada

$$X(\omega) = \tau \text{Sa}^2(\omega\tau/2) \quad (5.33)$$


---

### Propriedade 10 - Multiplicação no tempo ou modulação

Se  $p(t) = x(t)y(t)$  então  $P(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$ , ou seja, a operação de produto no tempo dá lugar à operação de convolução no domínio da frequência.

Portanto, esta é a propriedade dual da propriedade (9).

Para demonstrá-la vamos calcular a transformada de  $p(t)$ .

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)e^{j\alpha t} d\alpha \right\} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{j\alpha t} e^{-j\omega t} dt \right\} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)Y(\omega - \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \quad \text{cqd.} \end{aligned}$$


---

### Exemplo 5.28

Seja  $y(t) = \cos(\omega_0 t)$  e  $x(t)$  um sinal genérico. O sinal  $p(t) = x(t)y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$  é muito importante em telecomunicações e é o resultado da modulação da portadora  $y(t) = \cos(\omega_0 t)$  pelo sinal  $x(t)$ .

Vamos analisar o espectro de  $p(t)$ . Usando a Propriedade 10 temos

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega).$$

Mas sabemos que

$$Y(\omega) = \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0).$$

O espectro  $P(\omega)$  será o resultado da convolução de  $X(\omega)$  com cada impulso que compõe  $Y(\omega)$ . Como a convolução com impulso resulta na mesma função, porém deslocada do

tanto que o impulso está deslocado, concluímos que  $P(\omega)$  será composto por espectros  $X(\omega)$  deslocados e com amplitudes modificadas, ou seja,

$$P(\omega) = 0,5 X(\omega + \omega_0) + 0,5 X(\omega - \omega_0).$$

A Figura 5.17 mostra um espectro genérico para  $x(t)$  e o espectro  $P(\omega)$  resultante.

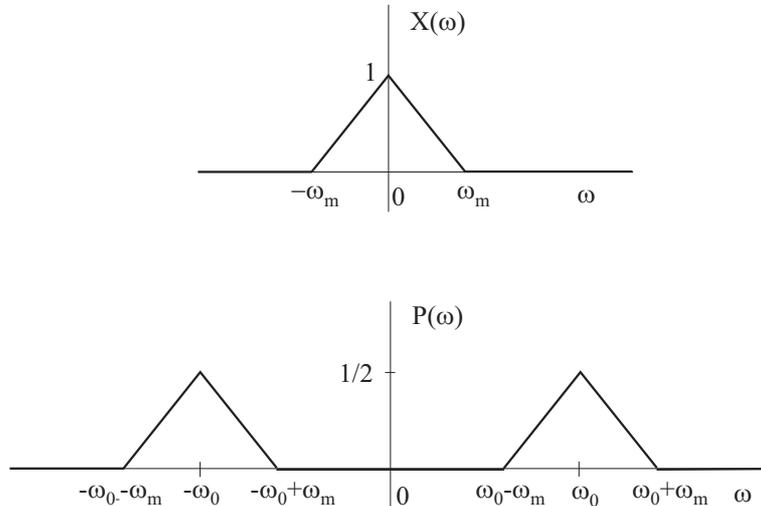


Figura 5.17: Exemplo de deslocamento espectral provocado pela modulação de uma portadora senoidal.

O deslocamento simétrico de  $X(\omega)$  é uma das operações mais importantes em telecomunicações e é sempre realizada através de modulação. A operação de convolução é representada pelo esquema da Figura 5.18. O sinal  $x(t)$  é denominado de sinal de informação ou modulador,  $\cos(\omega_0 t)$  é a portadora e  $y(t)$  é o sinal modulado.

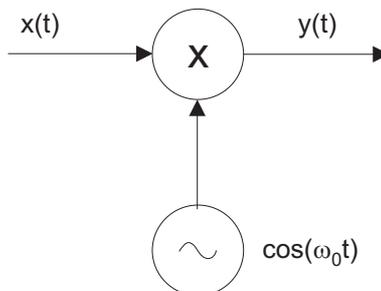


Figura 5.18: Esquema para a operação de modulação senoidal.

Como exemplo da propriedade da modulação, podemos calcular o espectro de um pulso de RF, definido como:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & |t| < \tau/2; \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (5.34)$$

Lembrando que a transformada de um pulso retangular é dada pela expressão (5.24), então o espectro do pulso de RF é dado por:

$$X(\omega) = \frac{\tau}{2} \text{Sa} [(\omega + \omega_0)\tau/2] + \frac{\tau}{2} \text{Sa} [(\omega - \omega_0)\tau/2] \quad (5.35)$$

Vamos agora apresentar uma série de pares transformados, úteis para o desenvolvimento da teoria da transformada de Fourier e ilustração das propriedades.

---

**Exemplo 5.29**

Podemos escrever o sinal  $x(t) = 1$  da seguinte forma:

$$x(t) = 1 = u(t) + u(-t).$$

Sabemos que

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Usando este resultado obtemos

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega),$$

o qual coincide com aquele já obtido anteriormente.

---

**Exemplo 5.30**

Vamos definir a função sinal( $t$ ) (é usual encontrar a notação  $\text{sgn}(t)$ ), a qual desempenha papel importante na teoria de telecomunicações.

**Definição:**

$$\text{sinal}(t) \triangleq \begin{cases} -1, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

A Figura 5.19 ilustra esta função.

Vamos calcular a transformada desta função sinal( $t$ ). Para isto vamos escrever

$$\text{sinal}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)].$$

Sabemos que

$$\mathfrak{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega}.$$

e que

$$\mathfrak{F}\{e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{a - j\omega}.$$

Usando estes resultados, podemos escrever

$$\mathfrak{F}\{\text{sinal}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right].$$

Portanto,

$$\mathfrak{F}\{\text{sinal}(t)\} = \frac{2}{j\omega}. \quad (5.37)$$

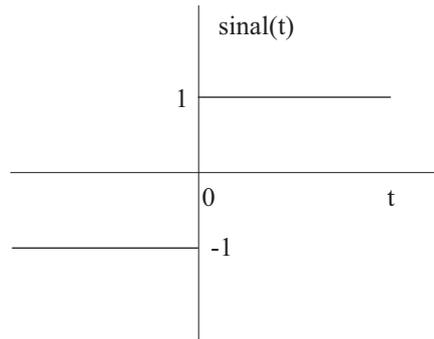


Figura 5.19: Função  $\text{sinal}(t)$ .

### Exemplo 5.31

Vamos usar a função  $\text{sinal}(t)$  para representar a função  $u(t)$ . Podemos escrever

$$u(t) = [1 + \text{sinal}(t)] / 2.$$

Lembrando que  $\mathfrak{S}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$ , este resultado conduz a

$$\mathfrak{S}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega},$$

conforme já havia sido determinado anteriormente.

### Exemplo 5.32

Podemos agora demonstrar a propriedade da integração no tempo. Para isto precisamos do seguinte resultado

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

Logo, a integral de um sinal no tempo pode ser expressa através da convolução com a função  $u(t)$ .

Usando este resultado podemos calcular a transformada de um sinal  $y(t)$  definido como

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

$$Y(\omega) = \mathfrak{S}\{x(t) * u(t)\} = X(\omega) \mathfrak{S}\{u(t)\},$$

de onde resulta

$$\mathfrak{S}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(\omega)\delta(\omega) \quad \mathbf{cqd.}$$

**Propriedade 11** - Escalonamento no tempo.

Se  $x(t) \rightarrow X(\omega)$ , então  $x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X(\omega/a)$ , onde  $a$  é uma constante.

Para demonstrar esta propriedade basta tomar a definição da transformada aplicada a  $x(at)$ .

$$\mathfrak{S}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt.$$

Fazendo  $at = \alpha$ , temos

$$\mathfrak{S}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j\omega\alpha/a} d\alpha/|a|,$$

onde o módulo de  $a$  é necessário pois para valores negativos de  $a$  ocorre inversão da ordem de integração, a qual é compensada pela troca do sinal da constante.

## 5.6 Transformada de sinais periódicos

Vamos desenvolver uma nova formulação para a série de Fourier. Esta formulação permitirá tratar a série como um caso particular da transformada. Como consequência, teremos uma formulação única para os sinais periódicos e não-periódicos.

Seja  $x(t) = x(t + T)$ ,  $\forall t$  e  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Então, a representação de  $x(t)$  em série será

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Como pretendemos calcular a transformada de  $x(t)$ , podemos escrever

$$\mathfrak{S}\{x(t)\} = \mathfrak{S}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right\} = X(\omega).$$

Lembrando que a transformada é linear e que

$$\mathfrak{S}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

temos

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0). \quad (5.38)$$

Consequimos assim obter uma representação espectral de um sinal periódico. Esta representação deve conter as mesmas informações que o espectro da série de Fourier do sinal. Vamos então comparar as representações.

1- O espectro da série é formado por amplitudes e fases das exponenciais complexas nas respectivas frequências harmônicas, conforme ilustrado na Figura 5.20 para um trem de pulsos retangulares.

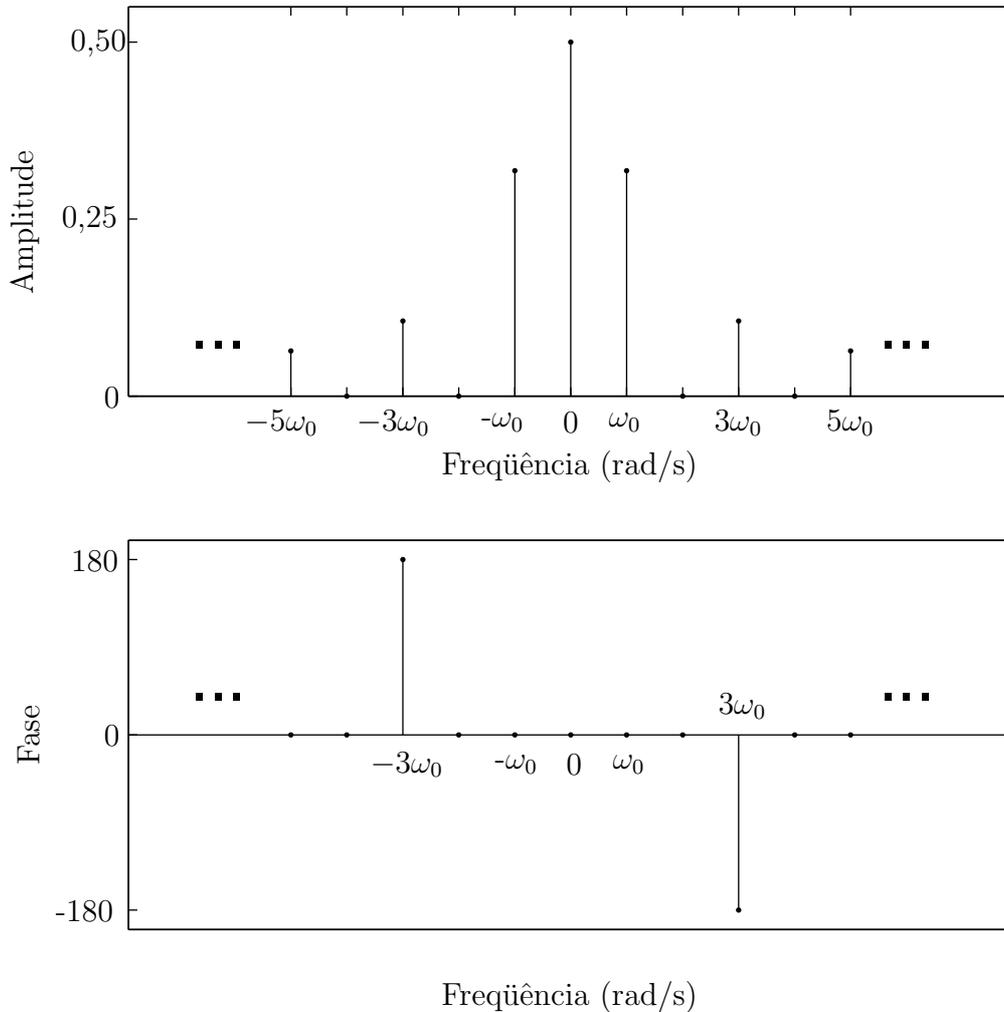


Figura 5.20: Espectros de frequência para o trem de pulsos retangulares com largura igual a metade do período.

Por outro lado,  $X(\omega)$  também apresenta componentes nas frequências harmônicas. Porém, estas componentes são agora representadas por impulsos. A transformada precisa de impulsos para representar uma amplitude finita em uma determinada frequência, pois  $X(\omega)$  tem o caráter de densidade de amplitudes em frequência.

2- Os coeficientes do espectro da série são  $c_k$ , enquanto que em  $X(\omega)$  são  $2\pi c_k$

Exceto pelas diferenças de representação apontadas, as duas formas espectrais de um sinal periódico fornecem a mesma informação sobre o sinal.

Além destas semelhanças, os coeficientes  $c_k$  também podem ser calculados através da transformada de Fourier de um período do sinal periódico. Para demonstrar, considere

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\}_{\omega = k\omega_0}. \end{aligned}$$

O termo entre as chaves na expressão anterior é uma transformada de Fourier. A integral está abrangendo apenas um período de  $x(t)$ . Assim, podemos interpretar o termo entre chaves como a

transformada de um sinal que é igual a um período de  $x(t)$  desde  $t_0$  até  $t_0 + T$  e que é nulo fora deste intervalo.

Esta interpretação permite escrever, finalmente,

$$c_k = \frac{1}{T} \mathfrak{S} \{ \text{um período de } x(t) \} \Big|_{\omega = k\omega_0}, \quad (5.39)$$

ou seja, os coeficientes  $c_k$  podem ser obtidos calculando-se a transformada de um período de  $x(t)$ , entre  $t_0$  e  $t_0 + T$ , dividindo por  $T$  e particularizando a transformada para as frequências  $\omega = k\omega_0$ .

Resumindo estes resultados, seja

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t; \quad x_T(t) = x(t), \quad t_0 < t < t_0 + T \quad \text{e} \quad \mathfrak{S} \{ x_T(t) \} = X_T(\omega).$$

Então,

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}; \quad X(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

Veremos que esta alternativa para o cálculo dos coeficientes da série será mais fácil que através da expressão convencional, pois teremos uma tabela da transformada de várias funções.

### Exemplo 5.33

Vamos aplicar estes conceitos no cálculo da transformada do trem de pulsos retangulares com largura  $\tau$ , conforme ilustrado na Figura 4.4 do Capítulo 4. A expressão (4.17) do Capítulo 4 mostra que os coeficientes  $c_k$  são dados por

$$c_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0 T/2}, \quad k \neq 0, \quad c_0 = \tau/T.$$

Vamos calcular estes coeficientes usando a transformada de um período do sinal periódico.

Como o instante  $t_0$  (início do período onde calcularemos a transformada) é arbitrário, podemos escolher aqui  $t_0 = -T/2$ . Seja  $x_T(t)$  o período de  $x(t)$  que se estende desde  $-T/2$  até  $T/2$ . Sabemos que neste período temos apenas um pulso retangular centrado em  $t = 0$  e com largura  $\tau$ . Assim,

$$x_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

A transformada  $X_T(\omega)$  deste pulso retangular é dada na expressão (5.24) e está reproduzida a seguir

$$X_T(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2).$$

Para obtermos os coeficientes  $c_k$  da série formada pelos pulsos retangulares basta calcularmos

$$c_k = \frac{1}{T} X_T(\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0},$$

o que fornece

$$c_k = \frac{\tau}{T} \text{Sa}(\omega\tau/2) \Big|_{\omega = k\omega_0} = \frac{\tau}{T} \text{Sa}(k\omega_0\tau/2),$$

a qual é igual àquela antes obtida.

Podemos agora escrever

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \tau \text{Sa}(k\omega_0\tau/2) \delta(\omega - k\omega_0)$$

A Figura 5.21 mostra  $X(\omega)$  bem com a envoltória das áreas dos impulsos.

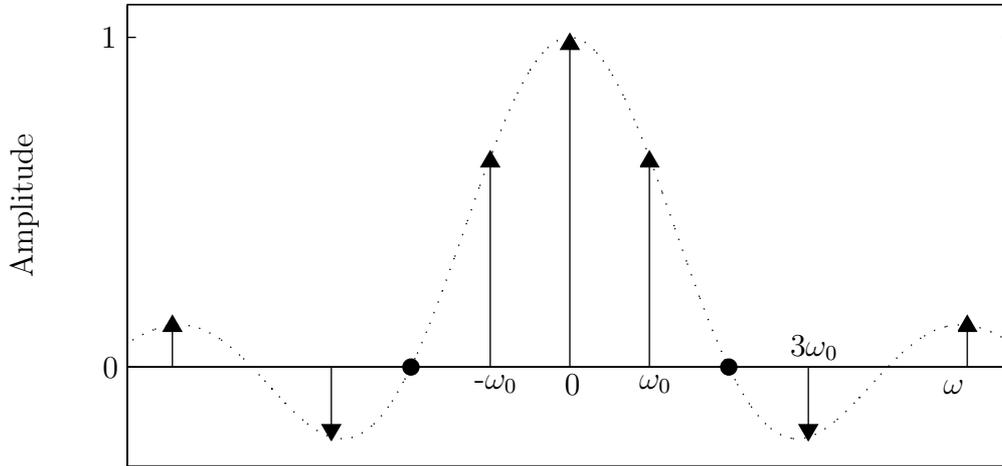


Figura 5.21: Transformada do trem de pulsos retangulares com largura igual a metade do período.

Podemos obter o resultado da expressão (5.38) de outra forma.

Seja  $x(t)$  um sinal periódico com período  $T$  e  $x_T(t)$  um período de  $x(t)$ . Observe que qualquer sinal periódico pode ser escrito como

$$x(t) = x_T(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

pois o sinal composto pelos impulsos é periódico com período  $T$  e a convolução de um sinal com um impulso é o próprio sinal deslocado.

Vamos usar esta forma de expressar  $x(t)$  para calcular sua transformada.

Seja  $X_T(\omega)$  a transformada de  $x_T(t)$ .

$$\mathfrak{S}\{x(t)\} = X_T(\omega) \cdot \mathfrak{S}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\}.$$

Mas

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi/T,$$

com  $c_k = 1/T$ ,  $\forall k$ . Logo,

$$\mathfrak{S}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Temos então,

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = X_T(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0),$$

de onde podemos escrever, finalmente,

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0),$$

onde

$$c_k = \frac{1}{T} X_T(k\omega_0).$$

### Exemplo 5.34

No Exemplo 5.26 vimos o processo de modulação com uma portadora senoidal. Vamos tratar agora de uma nova forma de modulação onde a portadora é um trem de pulsos retangulares, conforme ilustra a Figura 5.22.

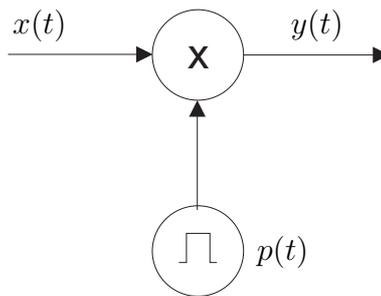


Figura 5.22: Esquema de modulação usando uma portadora  $p(t)$  composta por pulsos retangulares periódicos.

Seja  $x(t)$  um sinal modulador, a portadora  $p(t)$  e o sinal modulado  $y(t)$ . A portadora é um sinal periódico com período  $T$ , composto por pulsos retangulares de largura  $\tau$ .

Vimos nesta seção que o espectro de  $p(t)$  é dado por

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \tau \text{Sa}(k\omega_0 \tau / 2) \delta(\omega - k\omega_0), \quad \omega_0 = 2\pi / T.$$

O processo de modulação consiste em multiplicar  $x(t)$  por  $p(t)$ . Logo, no domínio da frequência teremos

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \tau \text{Sa}(k\omega_0 \tau / 2) \delta(\omega - k\omega_0).$$

Lembrando que a convolução com a soma é a soma das convoluções, obtemos

$$Y(\omega) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(k\omega_0 \tau / 2) X(\omega - k\omega_0).$$

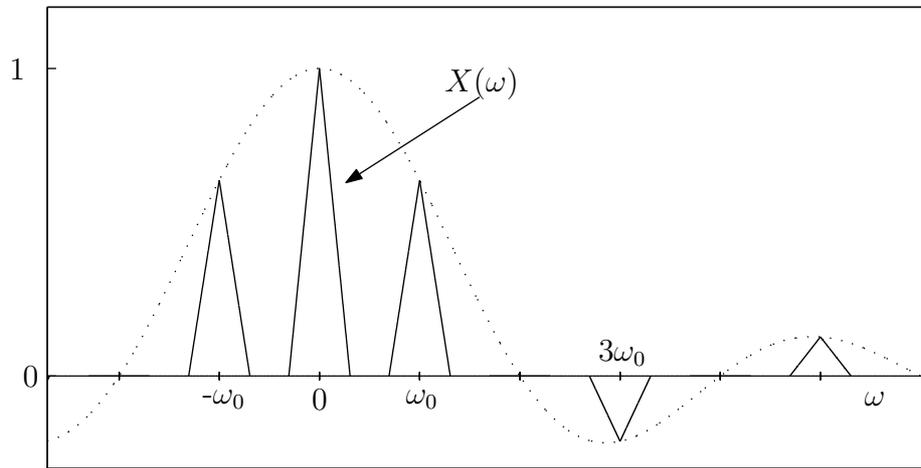


Figura 5.23: Espectro de um sinal resultante da modulação de uma portadora composta por pulsos retangulares periódicos.

Este resultado mostra que a modulação com um trem de pulsos faz com que o espectro do sinal  $x(t)$  seja deslocado de forma a ter seu centro em cada frequência harmônica que compõe a portadora, conforme mostra a Figura 5.23.

Podemos interpretar este resultado lembrando que qualquer sinal periódico é formado por uma combinação linear de exponenciais complexas harmônicas. Como cada exponencial produz um deslocamento espectral igual ao valor de sua frequência, concluímos que a portadora periódica irá produzir tantos espectros deslocados quantas forem suas componentes harmônicas.

Esta interpretação permite perceber que a modulação com um sinal senoidal é um caso particular onde a portadora possui apenas duas componentes exponenciais complexas.

## 5.7 Tabela de transformadas

Temos a seguir vários sinais e suas transformadas de Fourier.

- $x(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$        $\longrightarrow$        $X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$
- $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$        $\longrightarrow$        $X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
- $x(t) = \delta(t)$        $\longrightarrow$        $X(\omega) = 1$
- $x(t) = 1$        $\longrightarrow$        $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$
- $x(t) = e^{j\omega_0 t}$        $\longrightarrow$        $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
- $x(t) = \cos(\omega_0 t)$        $\longrightarrow$        $X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
- $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$        $\longrightarrow$        $X(\omega) = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$

$$\bullet x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \longrightarrow X(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

$$\bullet x(t) = \frac{W}{2\pi} \text{Sa}(Wt/2) \longrightarrow X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\bullet x(t) = \begin{cases} 1 + t/\tau, & -\tau < t < 0; \\ 1 - t/\tau, & 0 < t < \tau; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \longrightarrow X(\omega) = \tau \text{Sa}^2(\omega\tau/2)$$

$$\bullet x(t) = u(t) \longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\bullet x(t) = \text{sinal}(t) \triangleq \begin{cases} -1, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases} \longrightarrow X(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\bullet x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \longrightarrow X(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

## 5.8 Exercícios

1. Calcule a transformada de Fourier dos sinais a seguir.

Esboce os espectros de amplitude e de fase.

a)  $e^{-2(t-1)}u(t-1)$ ,    b)  $e^{-2|t-1|}$ ,    c)  $\delta(t+1) + \delta(t-1)$ ,    d)  $\frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$ ,  
 e)  $\text{sen}(2\pi t + \pi/4)$ ,    f)  $1 + \cos(6\pi t + \pi/8)$ .

2. Calcule a transformada inversa de Fourier de:

a)  $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$ ,    b)  $X(\omega) = \begin{cases} -2, & -2 \leq \omega < 0; \\ 2, & 0 \leq \omega \leq 2; \\ 0, & |\omega| > 2. \end{cases}$   
 b)  $|X(\omega)| = 2u(\omega + 3) - 2u(\omega - 3)$ ,     $\angle X(\omega) = -3\omega/2 + \pi$ . Determine os valores de  $t$  para os quais  $x(t) = 0$ .

3. Seja o sinal  $x(t)$  com transformada de Fourier  $X(\omega)$ . Expresse a transformada dos sinais a seguir em função de  $X(\omega)$ .

a)  $y(t) = x(1-t) + x(-1-t)$ ,    b)  $y(t) = x(3t-6)$ ,    b)  $y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$ .

4. Para cada transformada a seguir, determine se o sinal temporal correspondente é i) real, imaginário ou complexo; ii) par, ímpar ou sem simetria. Responda sem calcular a transformada inversa, mas usando apenas as propriedades da transformada.

a)  $X(\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$ ,    b)  $X(\omega) = \cos(2\omega)\text{sen}(\omega/2)$ ,    c)  $X(\omega) = \frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega} e^{j(2\omega+\pi/2)}$ ,  
 d)  $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (0,5)^{|k|} \delta(\omega - k\pi/4)$ .

5. Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -0,5, \\ t + 0,5, & -0,5 \leq t \leq 0,5, \\ 1, & t > 0,5. \end{cases}$$

a) Use as propriedades da derivada e integral no tempo para obter uma expressão analítica para a transformada de Fourier de  $x(t)$ .

b) Calcule a transformada de  $g(t) = x(t) - 0,5$ .

6. a) Use as propriedades da transformada para obter uma expressão analítica para a transformada de Fourier de  $x(t) = t \left( \frac{\text{sen}(t)}{\pi t} \right)^2$ .

b) Use o teorema de Parseval e o resultado do item a) para calcular o valor numérico de

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt.$$

7. Seja um sinal  $x(t)$  cuja transformada é  $X(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$ . Seja  $h(t) = u(t) - u(t - 2)$ .
- Verifique se  $x(t)$  é periódica.
  - Verifique se  $x(t) * h(t)$  é periódica.
  - A convolução de dois sinais não-periódicos pode ser periódica?
8. Seja um sinal  $x(t)$  com transformada  $X(\omega)$ . Suponha os fatos a seguir.
- $x(t)$  é real e não-negativo.
  - $\mathfrak{S}^{-1}\{(1 + j\omega)X(\omega)\} = A e^{-2t} u(t)$ , onde  $A$  é independente de  $t$ .
  - $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2\pi$ .
- Determine uma expressão analítica para  $x(t)$ .

9. Considere o sinal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(k\pi/4)}{k\pi/4} \delta(t - k\pi/4).$$

- a) Determine o sinal  $g(t)$  tal que

$$x(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\pi t} g(t).$$

- b) Use as propriedades da transformada de Fourier para mostrar que  $X(\omega)$  é periódica. Determine um período.

10. Calcule a resposta ao impulso do sistema causal LTI representado pelo circuito da Figura 5.24. Obtenha esta resposta ao impulso calculando a transformada inversa da resposta em frequência  $H(\omega)$  do circuito.

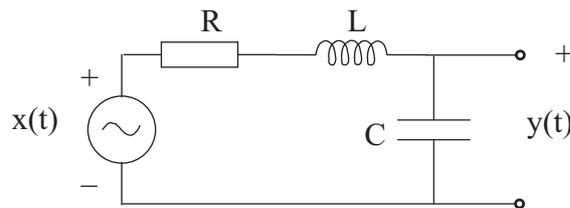


Figura 5.24: Sistema LIT constituído por um circuito.

11. Calcule a transformada de Fourier dos sinais a seguir.

a)  $e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$ ,  $a > 0$     b)  $e^{-3|t|} \text{sen}(2t)$     c)  $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi t), & |t| \leq 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT)$ ,  $|\alpha| < 1$     e)  $te^{-2t} \text{sen}(4t) u(t)$     f)  $\frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} \frac{\text{sen}[2\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}$

g)  $x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 < t < 1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$     h)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$

i)  $x(t)$  como na Figura 5.25. j)  $x(t)$  como na Figura 5.26.

$$h) x(t) = \begin{cases} 0,5a^2(2\tau + t), & -2\tau < t \leq 0; \\ 0,5a^2(2\tau - t), & 0 < t < 2\tau; \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

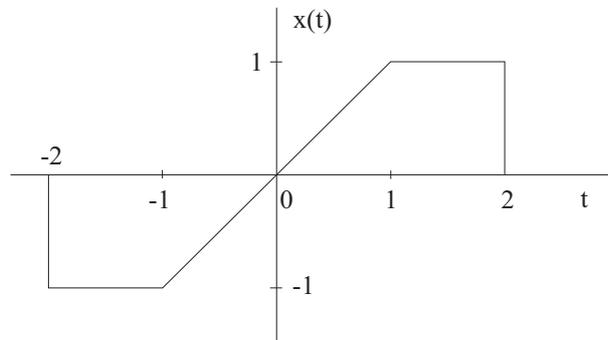


Figura 5.25: Sinal  $x(t)$  para o item i).

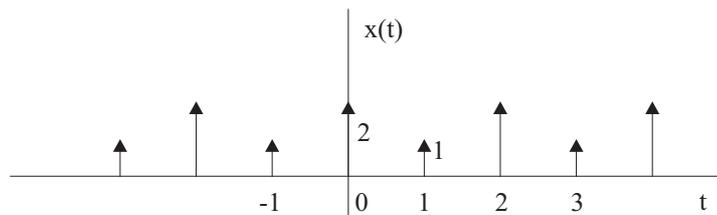


Figura 5.26: Sinal  $x(t)$  para o item j).

12. Determine a representação em série de Fourier para cada um dos sinais mostrados nas Figuras 5.27 e 5.28.

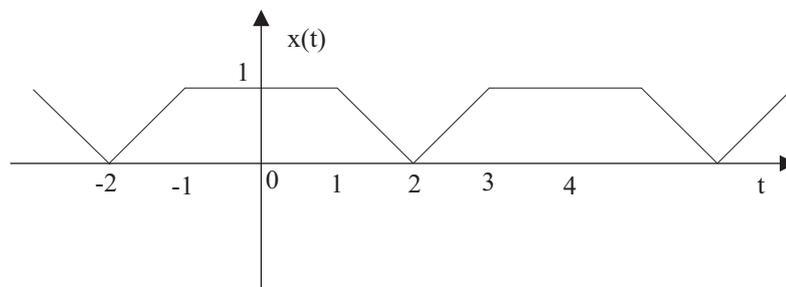


Figura 5.27: Sinal periódico.

13. Calcule o espectro do sinal  $y(t) = x(t)p(t)$ , onde  $x(t)$  é um sinal genérico com faixa de frequências

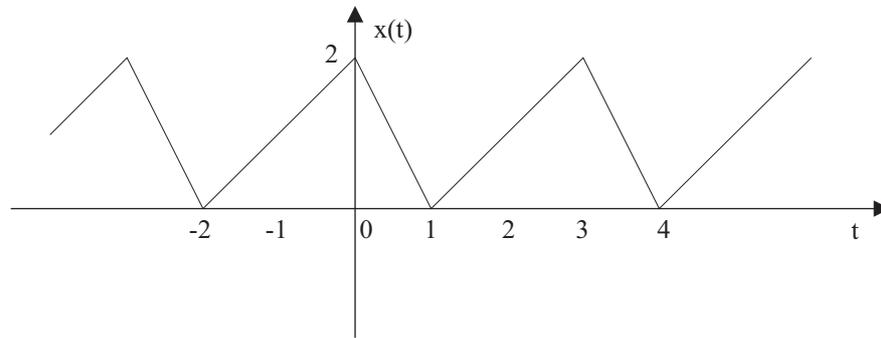


Figura 5.28: Sinal periódico.

limitada a  $\omega_m = \pi/(5T)$  e  $p(t)$  é um sinal periódico com período  $T$  e cujo período central é

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 + 2t/T, & -T/2 < t \leq 0; \\ 1 - 2t/T, & 0 < t < T/2; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

14. Considere a Figura 5.29, onde  $x(t)$  é um sinal genérico.

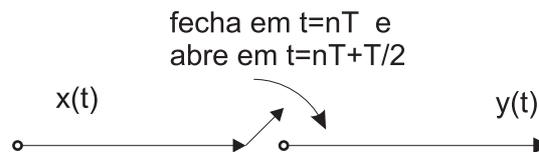


Figura 5.29: Sinal periódico.

- Calcule o espectro do sinal  $y(t)$ .
- Suponha que o sinal  $x(t)$  tem faixa de frequências limitada a  $\omega_m = \pi/(5T)$ . Esboce o espectro de  $y(t)$ .
- Repita o item b) para  $\omega_m = 4\pi/T$ .



# Capítulo 6

## Resposta em frequência e filtragem

### 6.1 Introdução

Neste capítulo iremos aprofundar a análise das propriedades da resposta em frequência dos sistemas LIT. Apresentaremos também o conceito de filtragem e definiremos os principais tipos de filtros.

### 6.2 Magnitude e fase da transformada de Fourier

Vimos no Capítulo 5 que a transformada de Fourier de um sinal  $x(t)$  é uma função complexa  $X(\omega)$ . Sendo complexa, escrevemos

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)},$$

onde  $|X(\omega)|$  é o espectro de amplitudes e  $\angle X(\omega)$  é o espectro de fase.

Vimos ainda, pelo teorema de Parseval, que  $|X(\omega)|^2/2\pi$  tem o caráter de densidade espectral de energia e mostra como a energia de  $x(t)$  se distribui ao longo do eixo de frequências. Assim, se considerarmos uma faixa de frequência ao redor de uma frequência  $\omega_0$ , conforme mostrado na Figura 6.1, podemos calcular a energia de  $x(t)$  na faixa de frequências calculando a área sob a curva da densidade espectral de energia. É importante observar que o cálculo da energia ao redor de  $\omega_0$  exige o cálculo das áreas ao redor de  $\omega_0$  e de  $-\omega_0$ , conforme sugere a Figura 6.1.

Vamos tratar agora o caso particular da transformada de Fourier da resposta ao impulso  $h(t)$  de um sistema LIT. Sabemos que a saída de um SLIT em resposta a uma entrada  $x(t)$  é  $y(t) = x(t)*h(t)$ . Quando levamos esta relação para o domínio da frequência, obtemos

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega). \quad (6.1)$$

Discutimos no Capítulo 5 que esta relação no domínio da frequência é importante pois simplifica a obtenção da resposta do sistema e facilita sobremaneira a análise de sua atuação sobre a entrada. Por esta importância, a função  $H(\omega)$  recebe o nome de função de transferência do SLIT.

A expressão (6.1) determina duas relações entre a entrada e a saída:

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)|, \quad (6.2)$$

$$\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega), \quad (6.3)$$

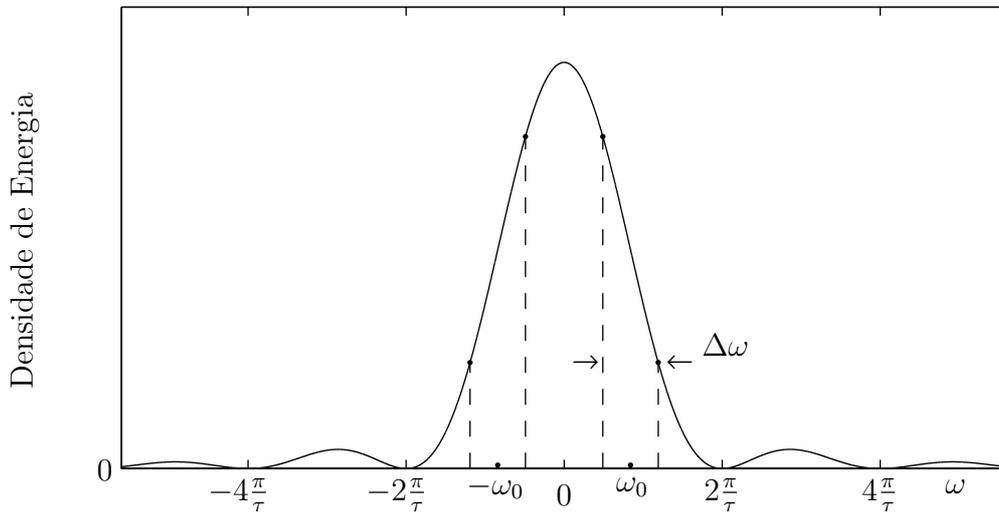


Figura 6.1: Espectro de densidade de energia de um pulso retangular e faixas de frequência ao redor de  $\pm\omega_0$ .

ou seja, uma relação entre espectros de amplitude e outra entre espectros de fase.

Observe que enquanto a resposta de amplitude  $|H(\omega)|$  do sistema multiplica o espectro de entrada para produzir o de saída, a resposta de fase do sistema se soma ao espectro correspondente da entrada.

Vamos analisar os efeitos de cada uma destas relações no sinal de saída.

### Alterações de amplitude

Iniciando pela relação entre os espectros de amplitude, a Figura 6.2 mostra a forma de um trecho de um sinal de voz ao longo do tempo. Mostra também o mesmo sinal após passar por um sistema LIT, cuja resposta de amplitude mantém inalteradas as componentes espectrais nas baixas frequências, ao passo que atenua as componentes de altas frequências. O efeito do SLIT sobre o espectro de amplitude do sinal pode ser observado na Figura 6.3. Lá é mostrado o espectro do sinal original e do sinal após o sistema. É evidente a ação do sistema sobre as componentes espectrais nas frequências mais altas. Voltando agora à Figura 6.2, podemos constatar que a atenuação das altas frequências implica na atenuação das variações mais rápidas do sinal. Este comportamento pode ser explicado observando que as variações rápidas exigem componentes senoidais com oscilações rápidas, ou seja, com altas frequências. Assim, ao atenuar as componentes de alta frequência, reduzimos a amplitude das variações rápidas.

Os SLIT com a característica daquele usado nesta análise são denominados de **filtros passa-baixas**. São sistemas deste tipo que usamos nos equipamentos de áudio para reforçar os graves.

Concluimos que a forma da resposta de amplitude de um sistema LIT altera o espectro da entrada e, portanto, altera a forma do sinal no tempo.

É importante estabelecer quais as condições para que um sistema não provoque alterações sobre um sinal, como deve ser a ação dos amplificadores. Estes devem amplificar o sinal sem modificar a sua forma. Para isto deverá ter uma resposta de amplitude constante ao longo da frequência. Como isto é fisicamente irrealizável, pois envolve uma energia infinita, exigimos que o SLIT apresente resposta constante apenas na faixa de frequência do sinal a ser amplificado, isto é, ao longo da largura do espectro de amplitude do sinal. Assim, um amplificador ideal deve apresentar

$$|H(\omega)| = \text{constante real positiva (C)} \text{ na faixa do sinal a ser amplificado.}$$

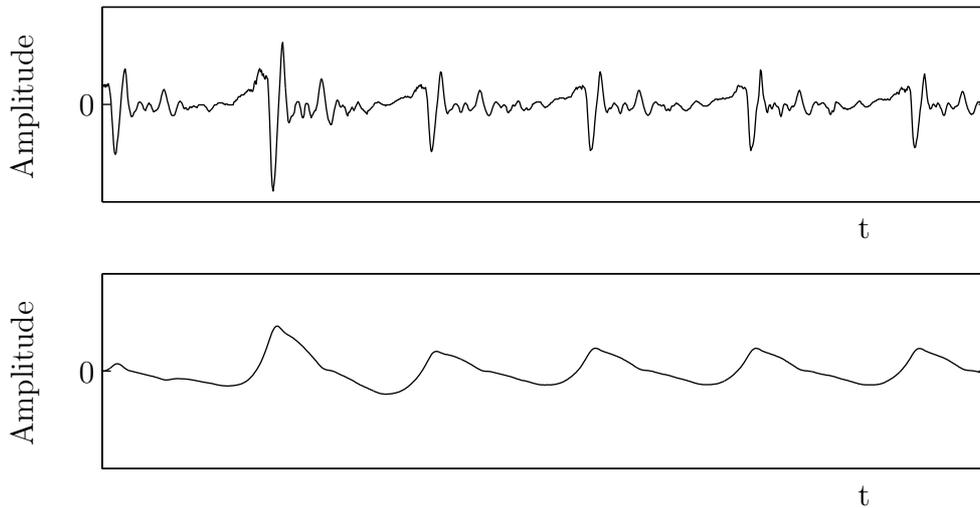


Figura 6.2: Sinais antes e depois de uma filtragem passa-baixas.

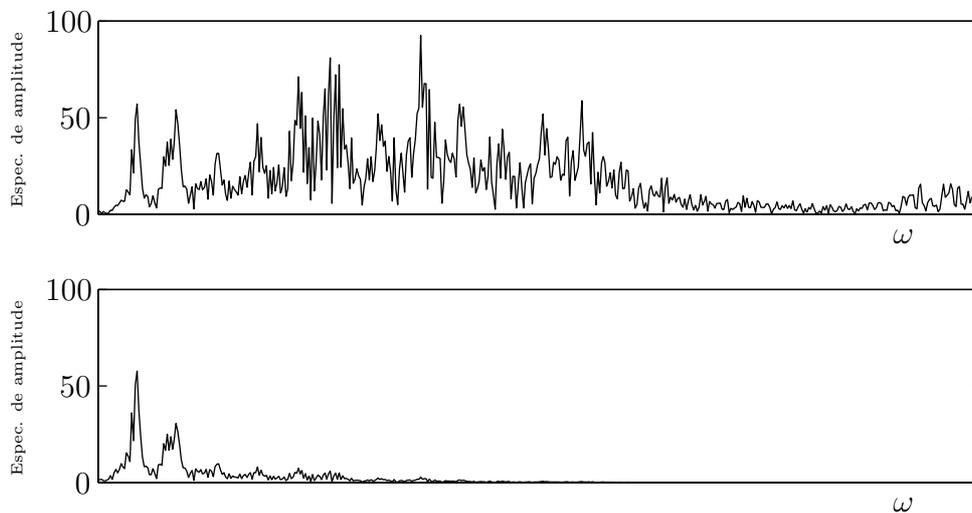


Figura 6.3: Espectro de amplitude de um sinal antes e depois de uma filtragem passa-baixas.

Com isto,

$$Y(\omega) = C X(\omega) = C |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)},$$

enquanto que no tempo teremos

$$y(t) = Cx(t).$$

Os sistemas que apresentam  $|H(\omega)| = 1$  são denominados de **passa-tudo**.

Quando  $|H(\omega)| \neq \text{constante}$ , teremos alteração da forma do sinal devido à alteração do seu espectro de amplitude. Esta alteração pode ser desejada, como nos filtros ou equalizadores, ou pode ser não-desejada, quando então é tratada como distorção, denominada de distorção de amplitude.

### Alterações de fase

Vamos agora nos ocupar com a resposta de fase.

Considere o sinal

$$x(t) = 1 + 0,5 \cos(2\pi t + \phi_1) + 0,5 \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t + \phi_3). \quad (6.4)$$

A Figura 6.4 mostra este sinal para quatro conjuntos distintos de valores das fases  $\phi_i$ .

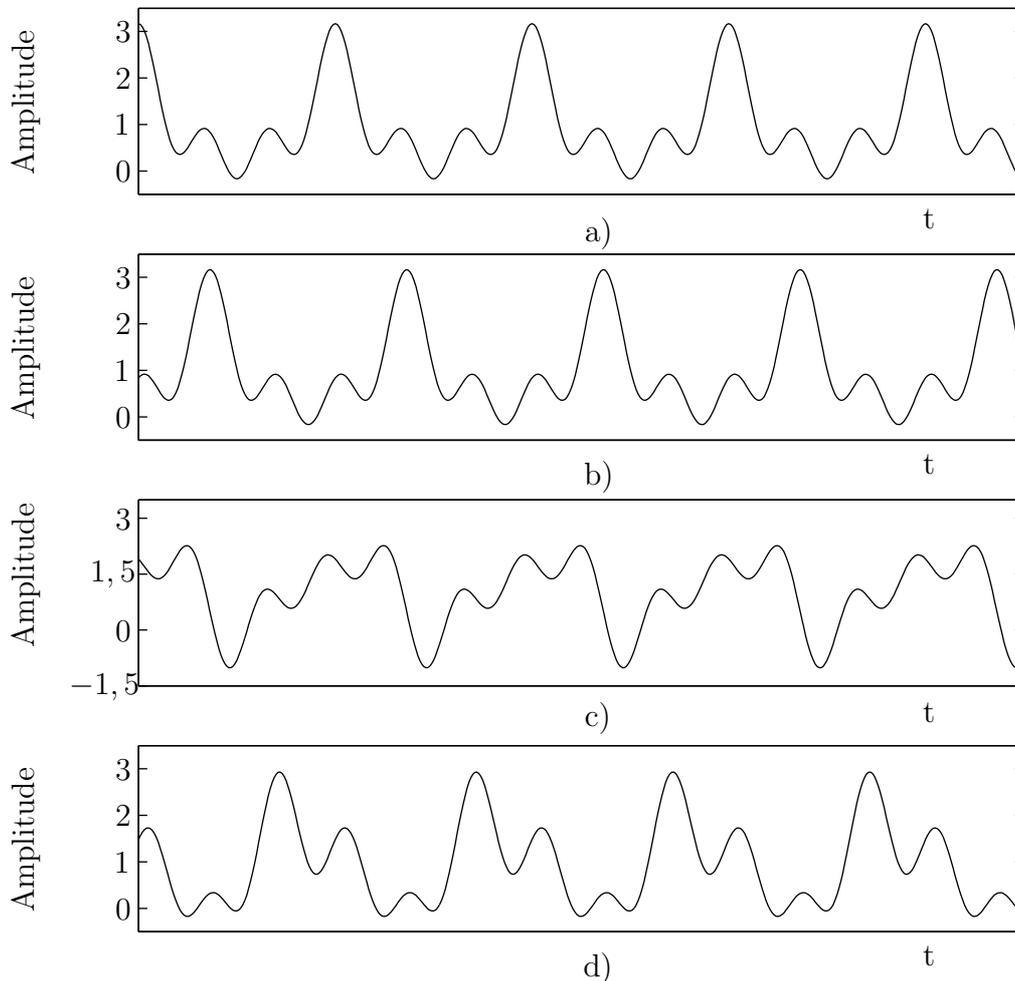


Figura 6.4: Sinal de (6.4) com valores distintos para as fases  $\phi_i$  : a)  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$  — b)  $\phi_1 = 4; \phi_2 = 8; \phi_3 = 12$  — c)  $\phi_1 = 6; \phi_2 = -2,7; \phi_3 = 0,93$  — d)  $\phi_1 = 1,2; \phi_2 = 4,1; \phi_3 = -7$ .

Estes sinais são tais que as amplitudes de suas componentes senoidais foram mantidas constantes mas a fase de cada uma foi alterada. Estas versões de sinal podem ser obtidas submetendo um deles, por exemplo, o sinal da Figura 6.4a) a um sistema LIT com  $|H(\omega)| = 1$  e com uma resposta de fase adequada. A condição  $|H(\omega)| = 1$  garante que as amplitudes das componentes senoidais serão mantidas constantes. A resposta de fase adequada proporciona as alterações das fases.

Observe que os sinais de a) e b) são iguais exceto por um deslocamento no eixo de tempo. Isto concorda com a alteração de fase que ocorreu de a) para b). Veja que as fase em b) são linearmente relacionadas na mesma proporção de suas frequências. Assim, as componentes senoidais sofreram uma defasagem proporcional à frequência, o que configura a ação de uma componente linear de fase, a qual produz um deslocamento no tempo.

Nos casos c) e d) ocorreu uma alteração não-linear de fase. Observe que os sinais correspondentes são diferentes dos sinais de a) e b). Esta modificação do sinal devido à alteração de fase pode não ser desejada, quando então é interpretada como resultado de uma distorção de fase.

A Figura 6.5 mostra outro sinal no tempo com quatro espectros distintos de fase. Observe a mudança provocada pelo acréscimo de uma componente linear de fase em contraste com o acréscimo de uma componente não-linear.

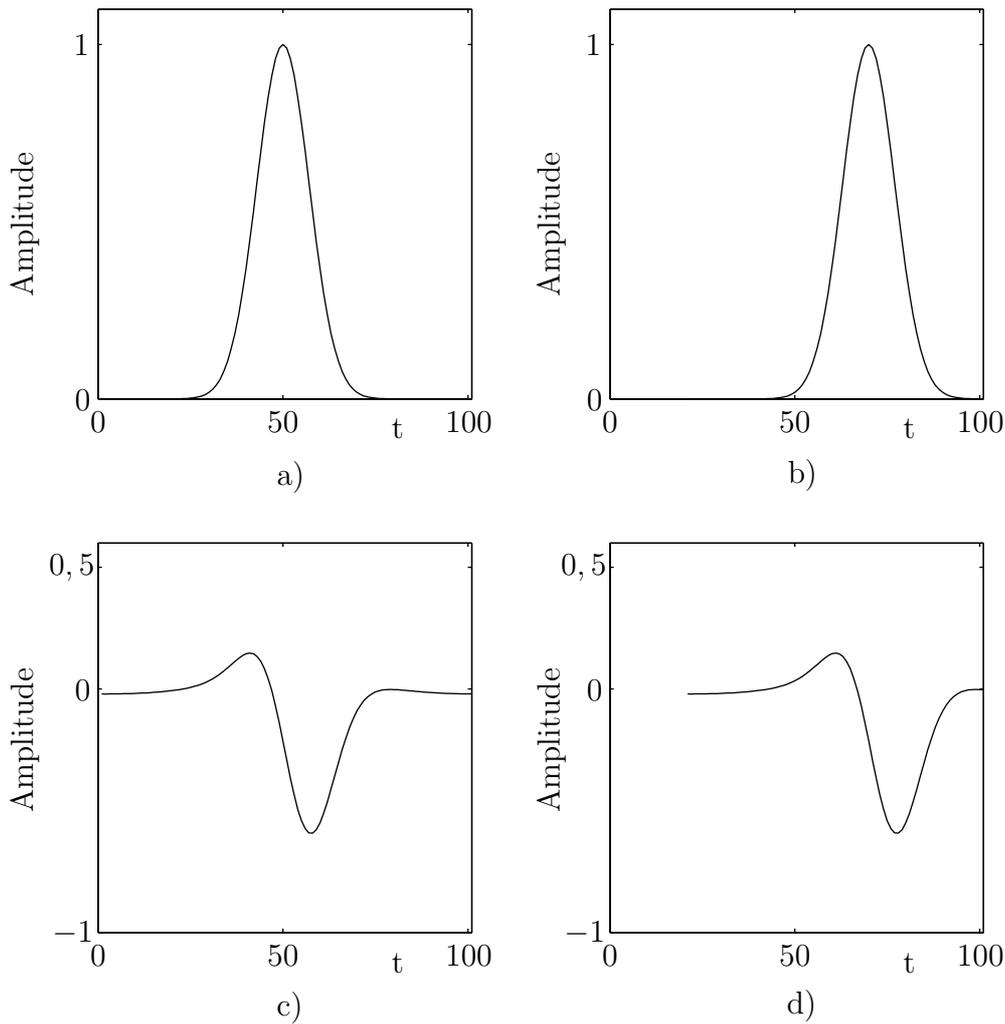


Figura 6.5: Sinal no tempo com diferentes espectros de fase: a) sinal de referência; b) sinal de a) acrescido de uma componente linear de fase; c) sinal de a) acrescido de uma componente não-linear de fase; d) sinal de c) acrescido de uma componente linear de fase.

Concluimos que a resposta de fase de um SLIT deve ser linear com a frequência para que o mesmo não produza distorção de fase.

Considerando uma resposta do tipo  $\angle H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$ , temos uma resposta de fase proporcional à frequência e a constante de proporcionalidade é  $-t_0$ . De acordo com a propriedade do deslocamento no tempo da transformada de Fourier, esta resposta de fase corresponde a um atraso no tempo igual a  $t_0$ . Assim, como no mundo físico não podemos adiantar um fenômeno, concluimos que a inclinação da resposta de fase linear tem que ser negativa e que o valor absoluto do coeficiente angular é igual ao atraso no tempo

Como exemplo, sabemos que o ouvido humano é pouco sensível a distorções de fase dos sinais de áudio. Por outro lado, o olho humano é sensível a tais distorções nos sinais de imagem ou vídeo. Assim, os amplificadores de áudio podem apresentar resposta de fase não-linear, enquanto que os amplificadores para vídeo não.

Por fim, podemos agora colocar as especificações obrigatórias para que um sistema não produza

distorção de amplitude e de fase:

$$|H(\omega)| = \text{constante}, \quad \angle H(\omega) = -\omega t_0. \quad (6.5)$$

Esta condição pode ser adaptada a cada tipo de sinal, usando a largura de faixa de frequência do sinal. Por exemplo, suponha que um sinal a ser processado pelo SLIT tenha um espectro de amplitudes ocupando a faixa de frequência  $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$ . Neste caso, basta que o SLIT satisfaça as condições anteriores apenas na faixa de frequências do sinal para que não produza distorções neste sinal.

### 6.3 Atraso de grupo

Vamos supor um sistema LTI com resposta em frequência  $H(\omega)$ . Suponha que sua resposta de fase  $\angle H(\omega)$  seja não-linear ao redor de uma dada frequência  $\omega_0$ . Vimos que este comportamento resulta em distorção de fase.

Porém, vamos analisar o efeito desta não-linearidade sobre um dado tipo de sinal: sinal de faixa estreita ao redor de  $\omega_0$ .

Vamos denominar, para simplicidade da notação a ser usada a seguir,  $\angle H(\omega) = \phi(\omega)$ .

Com base na Figura 6.6, podemos aproximar a resposta de fase numa faixa bastante estreita  $2\Delta\omega$  ao redor de  $\omega_0$  por

$$\phi(\omega) = (\omega - \omega_0)\phi'(\omega_0) + \phi(\omega_0); \quad |\omega - \omega_0| < \Delta\omega; \quad \phi'(\omega) = \left. \frac{d[\phi(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0}.$$

Da mesma forma, para a região simétrica, ao redor de  $\omega = -\omega_0$ , podemos aproximar a resposta de

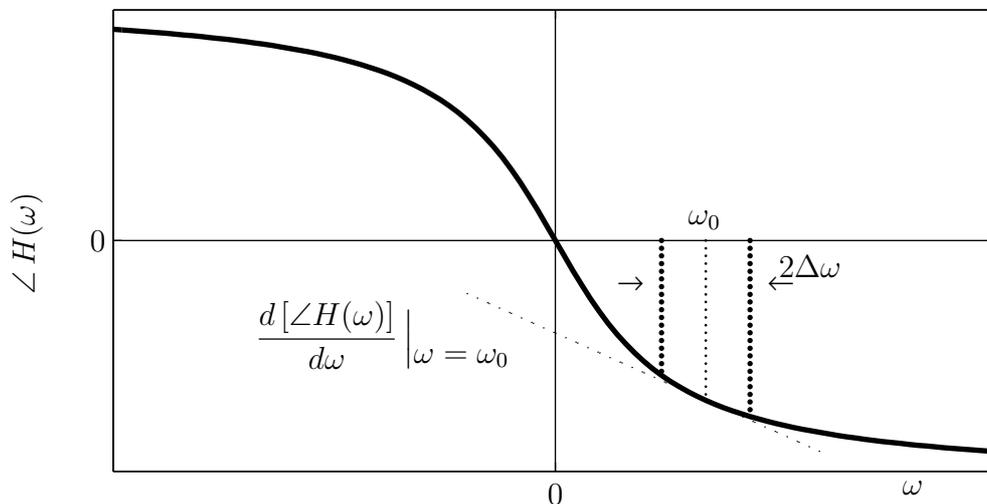


Figura 6.6: Resposta de fase de  $H(\omega)$  e sua derivada em  $\omega = \omega_0$ .

fase por

$$\phi(\omega) = (\omega + \omega_0)\phi'(-\omega_0) + \phi(-\omega_0); \quad |\omega + \omega_0| < \Delta\omega.$$

Suponha agora um sinal  $s(t)$  cujo espectro de amplitude ocupe apenas uma faixa estreita  $2\Delta\omega$  ao redor de  $\omega = 0$ , conforme mostra a Figura 6.7a). Vamos multiplicarmos este sinal por  $e^{j\omega_0 t}$  e por  $e^{-j\omega_0 t}$  gerando

$$x(t) = s(t)e^{j\omega_0 t} + s(t)e^{-j\omega_0 t}.$$

Observe que este sinal poderia ter sido escrito como

$$x(t) = 2s(t) \cos(\omega_0 t),$$

ou seja, é resultado da modulação de  $s(t)$  com uma portadora senoidal.

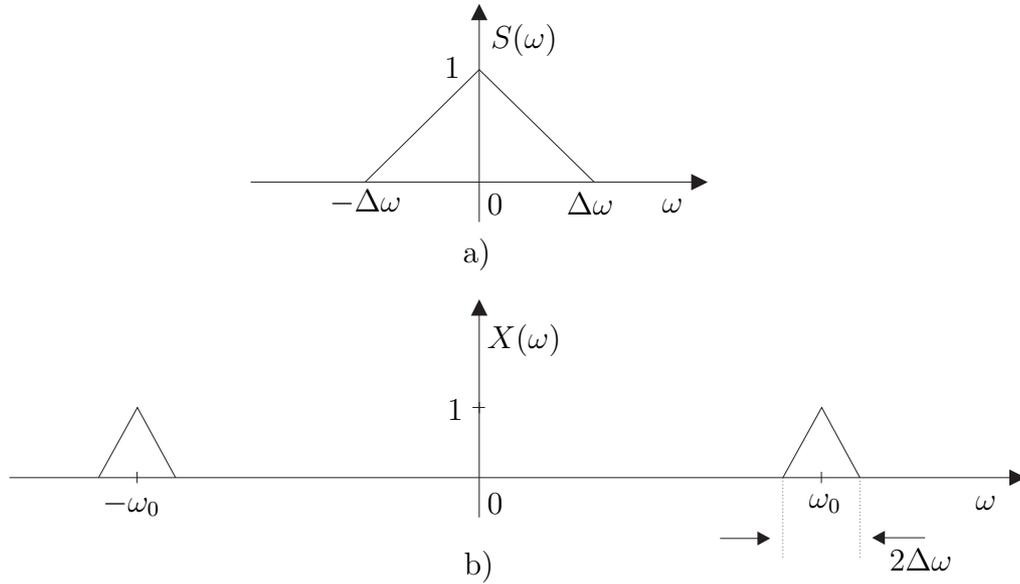


Figura 6.7: Espectros: a) do sinal  $s(t)$ ; b) do sinal  $x(t)$ .

O espectro de  $x(t)$  será

$$X(\omega) = S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0),$$

conforme mostra a Figura 6.7b).

Se colocarmos  $x(t)$  na entrada do SLIT obteremos um sinal  $y(t)$  na saída, onde

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega).$$

Observe que a parcela  $S(\omega - \omega_0)$  de  $x(t)$  é afetada apenas pela resposta do sistema em  $\omega > 0$ , enquanto que a parcela  $S(\omega + \omega_0)$  é afetada apenas pela resposta do sistema em  $\omega < 0$ .

Vamos supor  $|H(\omega)| = 1$ , uma vez que estamos interessados apenas nos efeitos da resposta de fase. Usando a aproximação para a resposta de fase do sistema, podemos escrever

$$Y(\omega) = S(\omega - \omega_0)e^{j(\omega - \omega_0)\phi'(\omega_0) + j\phi(\omega_0)} + S(\omega + \omega_0)e^{j(\omega + \omega_0)\phi'(-\omega_0) + j\phi(-\omega_0)}.$$

Sabemos que  $s(t - t_0) \rightarrow S(\omega)e^{-j\omega t_0}$  e que  $s(t + t_0) \rightarrow S(\omega - \omega_0)e^{-j(\omega - \omega_0)t_0}$ . Vamos definir

$$t_+ = -\phi'(\omega_0); \quad t_- = -\phi'(-\omega_0).$$

Com isto podemos escrever

$$Y(\omega) = S(\omega - \omega_0)e^{-j(\omega - \omega_0)t_+} e^{j\phi(\omega_0)} + S(\omega + \omega_0)e^{-j(\omega + \omega_0)t_-} e^{j\phi(-\omega_0)}.$$

de onde obtemos

$$y(t) = s(t - t_+)e^{j\omega_0 t} e^{j\phi(\omega_0)} + s(t - t_-)e^{-j\omega_0 t} e^{j\phi(-\omega_0)}.$$

Para  $x(t)$  real temos que  $|X(\omega)|$  é função par enquanto que  $\angle X(\omega)$  é função ímpar. Portanto,  $\phi'(-\omega_0) = -\phi'(\omega_0)$ . Logo,  $t_+ = t_- = t_0$ . Por outro lado,  $\phi(-\omega_0) = -\phi(\omega_0)$ . Com isto podemos escrever

$$y(t) = s(t - t_0) \{ e^{j\omega_0 t + j\phi(\omega_0)} + e^{-j\omega_0 t - j\phi(\omega_0)} \},$$

ou seja,

$$y(t) = 2 s(t - t_0) \cos[\omega_0 t + \phi(\omega_0)].$$

Concluimos que o sinal  $s(t)$  não sofre distorção de fase, mas apenas um atraso igual ao negativo da derivada da resposta de fase na frequência  $\omega_0$ . Também não há distorção de amplitude, mas apenas um ganho ou atenuação. Entretanto, o SLIT processou o sinal  $x(t)$ , o qual sofre sim distorção de fase. Quem não sofre distorção é o sinal  $s(t)$ , que compõe  $x(t)$  e cuja faixa de frequência se situa ao redor da origem.

A Figura 6.8 ilustra um sinal  $s(t)$  e o sinal  $x(t)$  correspondente. Observe que para as hipóteses assumidas para  $s(t)$  e  $x(t)$ , o sinal  $s(t)$  corresponde a uma envoltória de  $x(t)$ . As hipóteses que garantem esta propriedade são: 1-  $s(t)$  tem faixa  $2\Delta\omega$  ao redor de  $\omega = 0$ ; 2-  $x(t)$  é composto por  $s(t)$ , deslocando o espectro de  $s(t)$  para as frequências  $\pm\omega_0$ ; 3- A faixa  $2\Delta\omega$  de  $x(t)$  é estreita ao redor de  $\omega_0$ , isto é,  $2\Delta\omega \ll \omega_0$ .

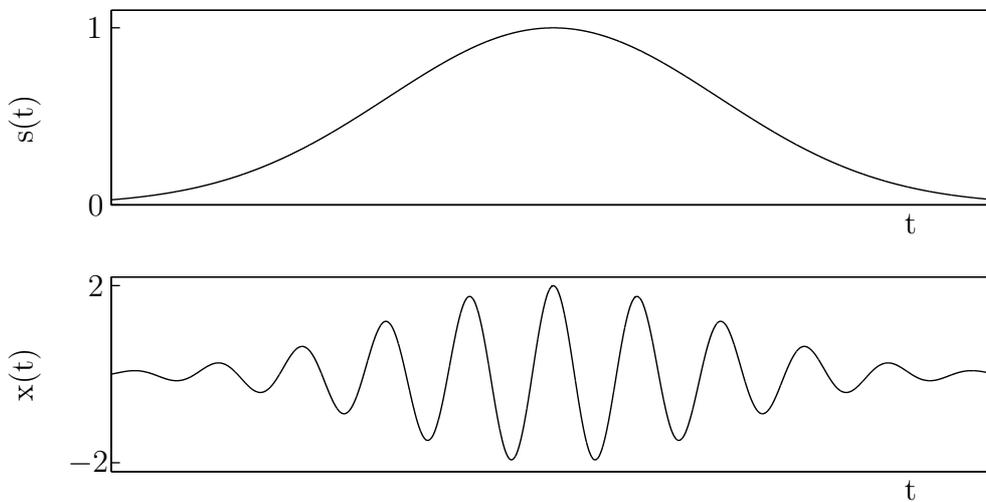


Figura 6.8: Sinais  $s(t)$  e  $x(t)$ .

Estas hipóteses são usuais em telecomunicações e o sinal  $s(t)$  é denominado de envoltória de  $x(t)$ . Lembre que o sinal  $x(t)$  é o resultado da modulação de uma portadora senoidal com  $s(t)$ .

Estes resultados mostram que apesar da fase do SLIT não ser linear, a envoltória do sinal  $s(t)$  não sofre distorção, mas apenas atraso. Este atraso é igual ao negativo da derivada da resposta de fase na frequência  $\omega_0$ . Este é o atraso que sofre um sinal que carrega informação em telecomunicações. Por isto recebeu o nome especial de **atraso de grupo**. Então:

**Definição:** Atraso de grupo ( $\omega_0$ )  $\triangleq - \left. \frac{d[\angle H(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0}$

Observe ainda que o atraso sofrido pela portadora  $\cos[\omega_0 t + \phi(\omega_0)]$  é determinado pela resposta de fase, ou seja, é o atraso convencional previsto pela propriedade da transformada de Fourier. Como a portadora contém apenas uma frequência, não tem sentido falar em distorção de fase.

Finalmente, é usual usar o conceito de atraso de grupo para analisar se um sistema produz ou não distorção de fase. Para isto calcula-se o atraso de grupo ao longo do eixo de frequências e observa-se se a curva resultante é constante ou não. Caso não seja constante, indicando que o atraso de grupo varia com a frequência, conclui-se que o SLIT produzirá distorção de fase. Porém, quando o atraso é constante, não podemos afirmar que não será produzida distorção, uma vez que uma resposta de fase do tipo  $\angle H(\omega) = \pi \sin(\omega)$  tem atraso constante mas produz distorção de fase.

**Exemplo 6.1**

A Figura 6.9 mostra uma resposta de fase e o atraso de grupo correspondente.

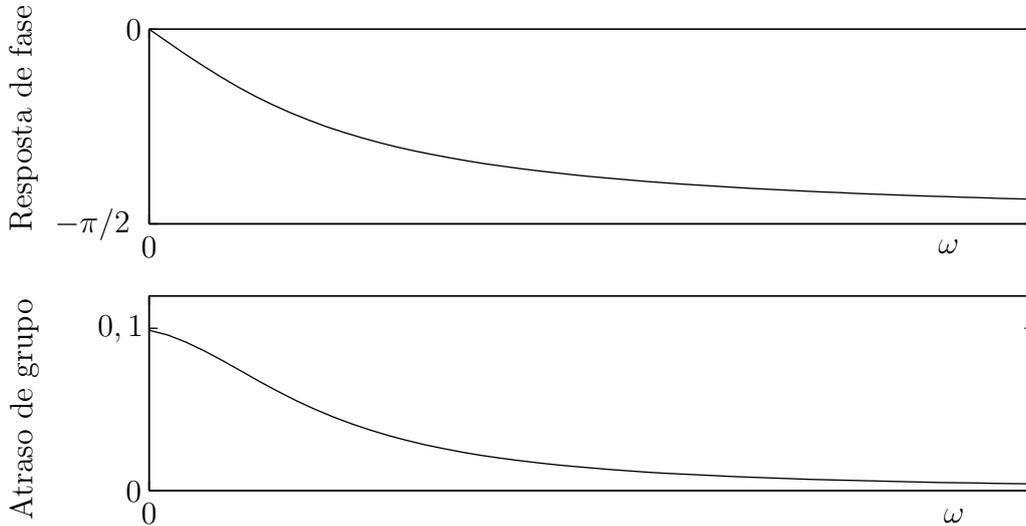


Figura 6.9: Resposta de fase e atraso de grupo correspondente.

## 6.4 Filtros ideais

**Definição:** Filtro é todo sistema que seleciona parte do espectro de um sinal.

Existem quatro tipos básicos de filtros: passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa.

A Figura 6.10 mostra a resposta em frequência de um filtro passa-baixas ideal. Observe que o filtro tem uma resposta de amplitude unitária constante desde a frequência zero até  $\omega_c$ . A partir desta frequência a resposta é nula. A faixa de frequências desde zero até  $\omega_c$  é denominada de faixa de passagem, enquanto que a faixa a partir de  $\omega_c$  é a faixa de rejeição. A frequência  $\omega_c$  é denominada de frequência de corte.

Esta característica de filtro passa-baixas é ideal devido aos seguintes aspectos: 1- a resposta na faixa de passagem é constante e, portanto, não deforma o espectro do sinal a ser filtrado que se enquadra nesta faixa; 2- a resposta na faixa de rejeição é nula, eliminando completamente o espectro do sinal nesta faixa; 3- a transição entre a faixa de passagem e a de rejeição tem derivada infinita.

Nenhuma destas características ideais é realizável com os circuitos disponíveis. Logo, a resposta de amplitude dos filtros práticos têm características semelhantes àquela da Figura 6.11. Observe que a resposta na faixa de passagem não é constante, a transição é suave e a rejeição não é total.

A Figura 6.12 mostra a forma típica como são fornecidas as especificações para a resposta de amplitude de um filtro passa-baixas. As regiões hachuradas são proibidas para a evolução da resposta

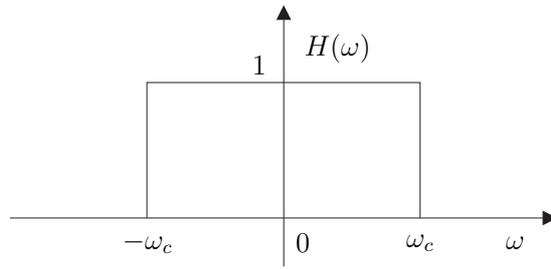


Figura 6.10: Resposta em frequência de um filtro passa-baixas ideal.

do filtro a ser projetado. Assim, existe uma região de folga tanto para a faixa de passagem como para a de rejeição. Observe também que é permitida uma transição suave.

Por fim, resposta de fase de um filtro ideal é nula ou linear na faixa de passagem de modo a não produzir distorção de fase nesta faixa. Fora da faixa de passagem, a resposta de fase pode ser qualquer pois a resposta de amplitude é nula. Esta característica de fase também é irrealizável e um filtro prático apresenta resposta semelhante àquela mostrada na Figura 6.11.

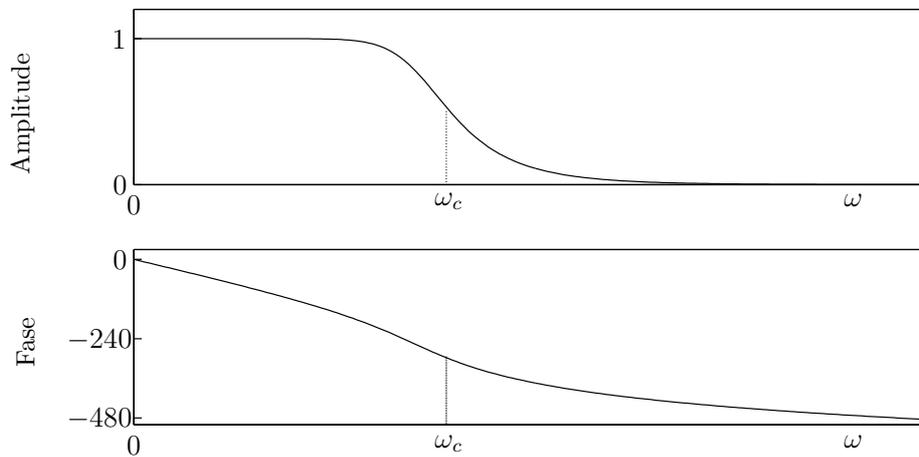


Figura 6.11: Resposta de amplitude e de fase de um filtro passa-baixas realizável.

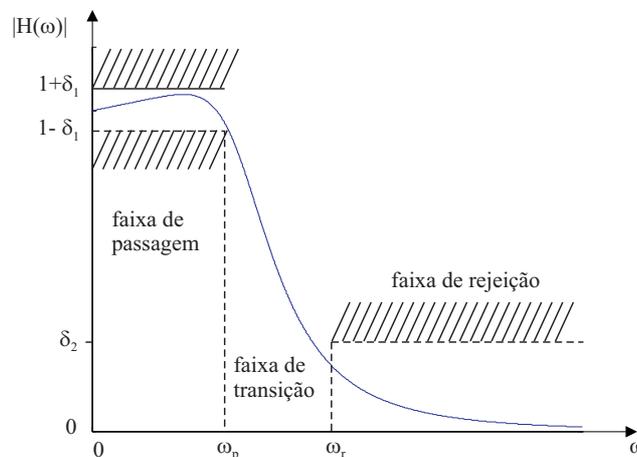


Figura 6.12: Máscara de especificação de um filtro passa-baixas.

A Figura 6.13 mostra a resposta em frequência de um filtro passa-altas ideal. Valem aqui as mesmas considerações que foram feitas para o filtro passa-baixas ideal. Observe que a resposta de amplitude do filtro passa-altas ideal pode ser escrita como:  $H_{pa-ideal}(\omega) = 1 - H_{pb-ideal}(\omega)$ , onde  $H_{pa-ideal}(\omega)$  é a resposta de amplitude de um filtro passa-altas ideal com a mesma frequência de corte que a de um filtro passa-baixas ideal com resposta  $H_{pb-ideal}(\omega)$ .

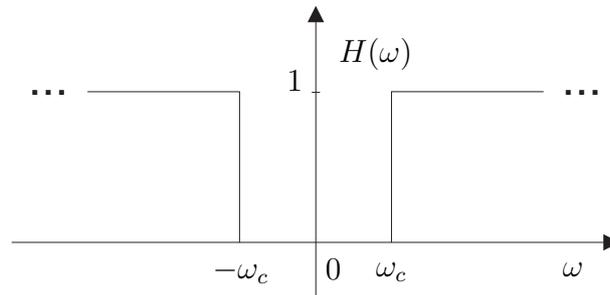


Figura 6.13: Resposta de frequência de um filtro passa-altas ideal.

A Figura 6.14 mostra a resposta em frequência de um filtro passa-faixa ideal. Observe que agora temos duas frequências de corte.

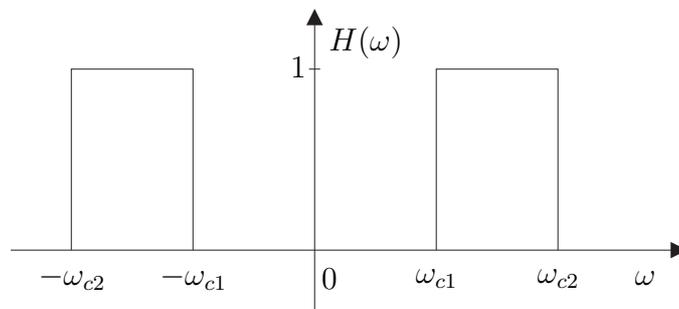


Figura 6.14: Resposta de frequência de um filtro passa-faixa ideal.

Por fim, a Figura 6.15 mostra a resposta em frequência de um filtro rejeita-faixa ideal.

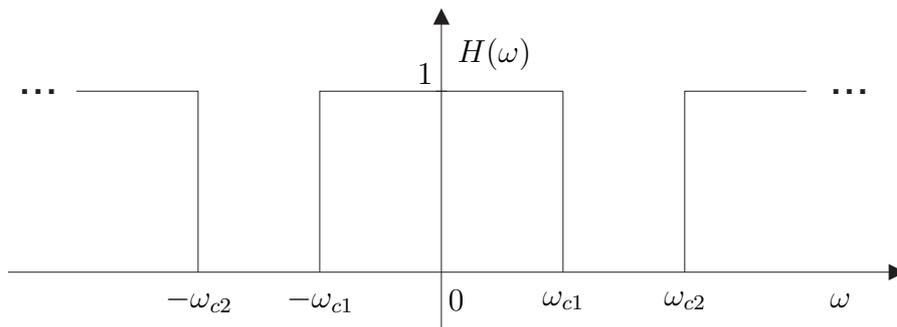


Figura 6.15: Resposta de frequência de um filtro rejeita-faixa ideal.

## 6.5 Exercícios

1. Considere um sistema LIT com resposta ao impulso real  $h(t)$  e função de transferência  $H(\omega)$ . Suponha que apliquemos  $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$  na entrada deste sistema. A resposta pode ser escrita na forma  $y(t) = Ax(t - t_0)$ , onde  $A$  é uma constante real não-negativa e  $t_0$  é um atraso.
  - a) Expresse  $A$  em termos de  $|H(\omega)|$ .
  - b) Expresse  $t_0$  em termos de  $\angle H(\omega)$ .
  - c) Repita para  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$ .
2. Considere um sistema LIT causal e estável com  $H(\omega) = (1 - j\omega)/(1 + j\omega)$ .
  - a) Mostre que  $|H(\omega)| = 1$  e determine o valor de  $A$ .
  - b) Determine quais das seguintes afirmações sobre o atraso de grupo  $\tau(\omega)$  do sistema são verdadeiras:
    - i -  $\tau(\omega) = 0$  para  $\omega > 0$ ,
    - ii -  $\tau(\omega) > 0$  para  $\omega > 0$ ,
    - iii -  $\tau(\omega) < 0$  para  $\omega > 0$ .
3. Considere um filtro ideal passa-faixa com

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \leq |\omega| \leq 3\omega_c; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- a) Se  $h(t)$  é a resposta ao impulso deste filtro, determine a função  $g(t)$  tal que  $h(t) = (\text{sen}(\omega_c t)/(\pi t)) g(t)$ .
  - b) Considere que  $\omega_c$  é aumentada. A resposta ao impulso  $h(t)$  se torna mais ou menos concentrada ao redor da origem?
4. Um filtro LIT causal tem a função de transferência  $H(\omega)$  mostrada na Figura 6.16. Determine a saída do filtro para cada um dos sinais de entrada listados a seguir.

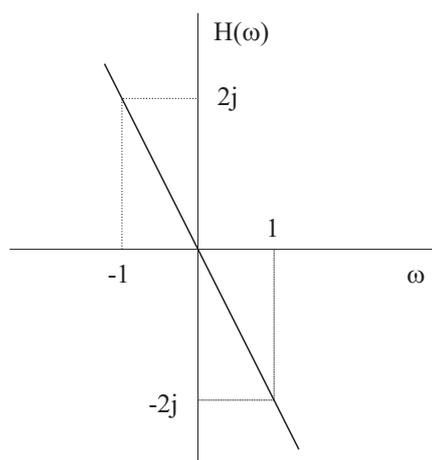


Figura 6.16: Resposta em frequência de um filtro.

- a)  $x(t) = e^{jt}$ ,
- b)  $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t) u(t)$ ,
- c)  $X(\omega) = 1/[j\omega(6 + j\omega)]$ ,
- d)  $X(\omega) = 1/(2 + j\omega)$ .

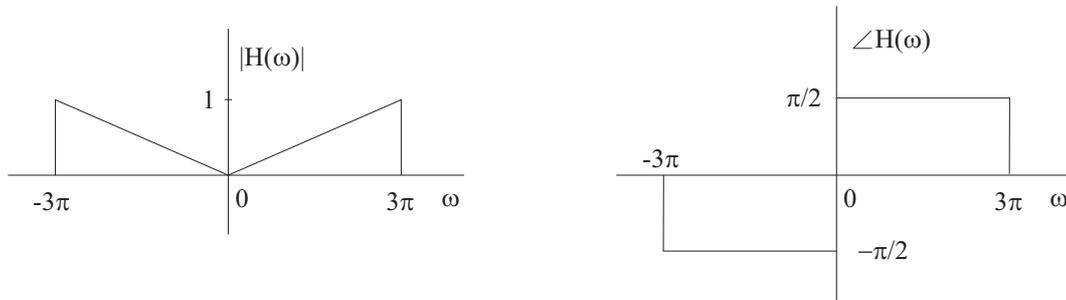


Figura 6.17: Resposta em frequência de um diferenciador passa-baixas.

5. Na Figura 6.17 está mostrada a função de transferência de um filtro LIT denominado diferenciador passa-baixas. Determine a saída do filtro para cada um dos sinais de entrada listados a seguir.
- a)  $x(t) = \cos(2\pi t + \theta)$ ,    b)  $x(t) = \cos(4\pi t + \theta)$ ,  
 c)  $x(t)$  é um sinal senoidal retificado em meia-onda, isto é,  

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t), & k \leq t \leq k + 0,5, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & k + 0,5 < t \leq k + 1 \end{cases} .$$
6. Considere um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\omega_c$ . Determine a resposta ao impulso do filtro para cada uma das respostas de fase a seguir.
- a)  $\angle H(\omega) = 0$ ,    b)  $\angle H(\omega) = \omega T$ , onde  $T$  é uma constante;    c)  $\angle H(\omega) = (\pi/2) \text{ sinal}(\omega)$ .
7. Considere um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\omega_c = 200\pi$ . Determine a resposta ao impulso **real** do filtro quando o seu atraso de grupo é um dos valores a seguir.
- a) i)  $\tau(\omega) = 5$ ,    ii)  $\tau(\omega) = 5/2$ ,    iii)  $\tau(\omega) = -5/2$ .  
 b) Se a resposta ao impulso não fosse restrita ao caso real, o conhecimento de  $|H(\omega)|$  e de  $\tau(\omega)$  seria suficiente para determinar univocamente a resposta ao impulso?
8. Calcule o atraso de grupo para as funções de transferências a seguir e verifique se o sistema correspondente tem fase linear.
- a)  $H(\omega) = 1/(a+j\omega)$ ,  $a$ =constante real    b)  $H(\omega) = 1/(1+j\omega)^2$ ,    c)  $H(\omega) = 1/[(1+j\omega)(2+j\omega)]$ .
9. Expresse a resposta em frequência de um filtro passa-faixa ideal em função da resposta de um filtro passa-baixas ideal adequado. Determine a relação correspondente no domínio do tempo.



# Capítulo 7

## Amostragem de sinais

### 7.1 Introdução

Neste capítulo trataremos da amostragem de sinais contínuos. A amostragem consiste em tomar amostras de um sinal contínuo regularmente espaçadas no tempo. Portanto, gera um sinal discreto no tempo correspondente ao sinal contínuo original.

Estabeleceremos também as condições para que o sinal contínuo original possa ser recuperado a partir das suas amostras.

Usando os resultados das questões acima, definiremos a transformada de Fourier para sinais discretos e mostraremos que esta é um caso particular da transformada para sinais contínuos.

Por fim, trataremos da representação dos sistemas discretos no domínio da frequência, definindo a função de transferência e os filtros ideais discretos.

### 7.2 Teorema da amostragem

Seja  $x(t)$  um sinal contínuo no tempo. Vamos tratar da amostragem de  $x(t)$  no tempo, com amostras regularmente espaçadas de  $T$  segundos, formando uma seqüência de valores ordenados  $x(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . A Figura 7.1 mostra um exemplo para  $x(t)$  e as suas amostras tomadas nos instantes  $t = nT$ .

Considere que  $x(t)$  tem faixa de frequências limitada a  $\omega_m$  rad/s. O desenvolvimento a seguir mostrará que as amostras de  $x(t)$ , tomadas a intervalos regulares de  $T$  segundos, contêm toda a informação de  $x_c(t)$ , desde que  $T < \pi/\omega_m$ . Lembrando que  $\omega = 2\pi f$ , onde  $f$  é a frequência expressa em Hertz, então  $\omega_m = 2\pi f_m$ . Com isto, a condição sobre o intervalo  $T$  de amostragem pode ser expressa como  $T < 1/(2f_m)$ .

Para demonstrar o resultado acima, vamos usar um processo ideal de amostragem, conforme detalhado a seguir.

#### 7.2.1 Amostragem teórica através de um trem periódico de impulsos

Considere a função pente ( $t$ )

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (7.1)$$

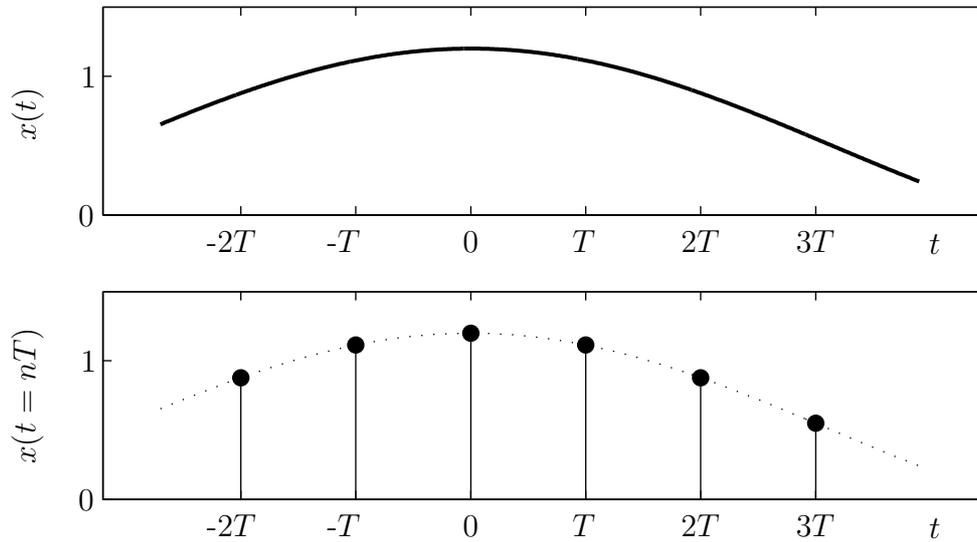


Figura 7.1: Um sinal contínuo no tempo e suas amostras nos instantes  $t = nT$ .

conforme mostrado na Figura 7.2. Uma forma de amostrarmos  $x(t)$  é multiplicarmos este sinal por  $\delta_T(t)$ , ou seja,

$$x_a(t) = x(t) \delta_T(t),$$

onde  $x_a(t)$  é o sinal resultante da amostragem.

Usando a definição em (7.1), temos

$$\begin{aligned} x_a(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT). \end{aligned}$$

A Figura 7.2 mostra uma ilustração deste processo e o sinal  $x_a(t)$  resultante. Observe que o valor das amostras do sinal  $x(t)$  estão representadas pelas áreas dos impulsos do sinal  $x_a(t)$ .

Embora este processo de amostragem não seja realizável, ele é interessante dada a facilidade que oferece para a análise das conseqüências da amostragem. Veremos mais adiante que o processo empregado na prática pode ser descrito com facilidade usando os resultados que serão alcançados com esta amostragem ideal.

O desenvolvimento das conseqüências da amostragem será realizado no domínio da frequência. Então, vamos calcular a transformada de Fourier de  $x_a(t)$ .

Vimos que a transformada da função  $\delta_T(t)$  é

$$\mathfrak{F} \{ \delta_T(t) \} = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s),$$

onde  $\omega_s = 2\pi/T$  e é denominada de frequência de amostragem.

Usando este resultado e lembrando que o produto no tempo gera a convolução em frequência, temos

$$X_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \omega_s X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s).$$

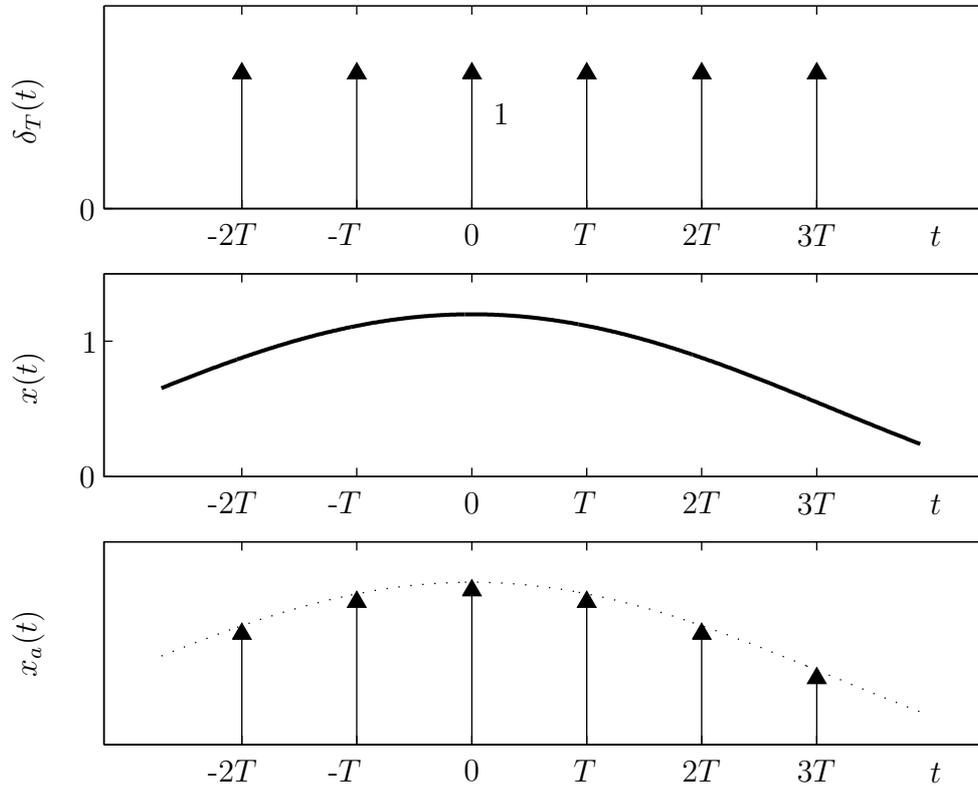


Figura 7.2: A função pente( $t$ ), um sinal contínuo no tempo e suas amostras nos instantes  $t = nT$  obtidas com a função pente( $t$ ).

Porém, a convolução de uma função com um impulso reproduz a função dotada do deslocamento do impulso. Assim,

$$X_a(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s). \quad (7.2)$$

Concluimos que o sinal resultante da amostragem tem um espectro composto por infinitas réplicas de  $X(\omega)$  divididas por  $T$  e deslocadas de  $\omega_s$  entre si.

Uma das conseqüências mais importantes produzidas pela amostragem é:

**O espectro do sinal amostrado é periódico com período  $\omega_s = 2\pi/T$ .**

A Figura 7.3 mostra o espectro de um sinal  $x(t)$  genérico. A forma triangular de  $X(\omega)$  é mera conveniência gráfica. Observe que este espectro tem faixa de freqüência limitada a  $\pm\omega_m$ .

A Figura 7.4 mostra o espectro de um sinal  $x_a(t)$  correspondente ao espectro da Figura 7.3. Podemos colocar as seguintes conclusões sobre o espectro do sinal amostrado  $x_a(t)$ :

- $X_a(\omega)$  é periódico com período  $\omega_s = 2\pi/T$ .
- O período de  $X_a(\omega)$  é inversamente proporcional ao intervalo de amostragem  $T$ . Assim, quanto menor  $T$ , mais próximas entre si as amostras no tempo e mais espaçados os espectros do sinal original  $x(t)$  que foi amostrado. No limite com  $T \rightarrow \infty$ , o sinal amostrado será o próprio sinal contínuo e o espectro  $X_a(\omega)$  será igual a  $X(\omega)$ .
- Os espectros  $X(\omega - k\omega_s)$  que compõem  $X_a(\omega)$  são multiplicados por  $1/T$ .

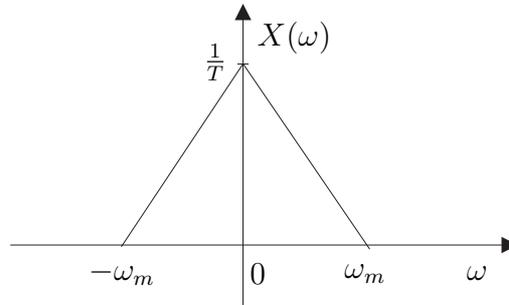


Figura 7.3: Espectro de um sinal genérico  $x(t)$ .

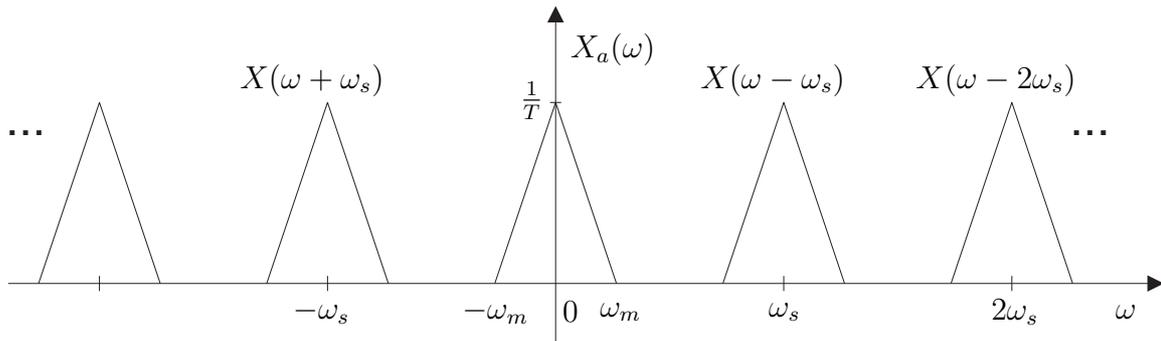


Figura 7.4: Espectro do sinal  $x_a(t)$ .

Vamos tratar agora da questão da recuperação do sinal original a partir do sinal amostrado  $x_a(t)$ . Esta questão será tratada no domínio da frequência.

Recuperar o sinal original  $x(t)$  significa recuperar o espectro  $X(\omega)$  a partir de  $X_a(\omega)$ . Observe que se o espectro do sinal original tem faixa de frequências limitada a  $\omega_m$ , e se  $\omega_s - \omega_m$  é maior que  $\omega_m$ , então a parcela  $X(\omega)$  na Figura 7.4 não tem intersecção com as parcelas  $X(\omega - \omega_m)$  e  $X(\omega + \omega_m)$ , ou seja, as posições relativas destas parcelas é semelhante àquela mostrada na Figura 7.4. Neste caso, o espectro  $X(\omega)$  do sinal original está intacto em  $X_a(\omega)$ , exceto por uma alteração de amplitude. Assim, se for possível extrair esta parcela de  $X_a(\omega)$ , obteremos o sinal original.

Podemos extrair a parcela central de  $X_a(\omega)$  usando um filtro passa-baixas analógico ideal com frequência de corte entre  $\omega_m$  e  $\omega_s - \omega_m$  e ganho  $T$ , conforme mostra a Figura 7.5.

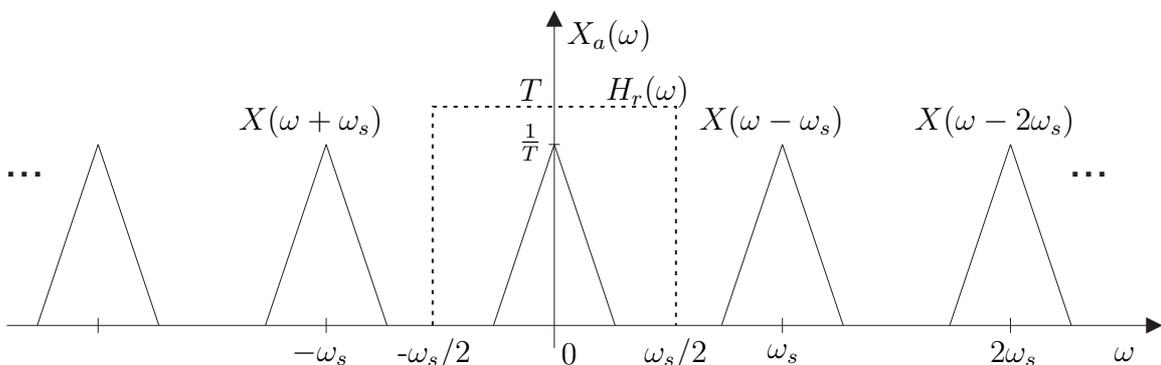


Figura 7.5: Espectro de um sinal amostrado e a resposta em frequência de um filtro passa-baixas ideal para recuperação do sinal original.

Na saída do filtro teremos o espectro do  $X(\omega)$  e, portanto, o sinal  $x(t)$ . Para isto basta que

o espectro  $X(\omega)$  tenha faixa de freqüências limitada a  $\omega_m$  e que  $\omega_s$  seja maior que  $2\omega_m$ . Porém,  $\omega_s = 2\pi/T$ , o que indica que o intervalo de amostragem  $T$  deve ser tal que  $T < 2\pi/2\omega_m$ . De outra forma,  $T < 1/2f_m$ .

Podemos então assegurar que o sinal original será recuperado se duas condições forem satisfeitas:

- 1- se  $x(t)$  tem faixa de freqüências limitada a  $\omega_m$  rad/s,
- 2- se

$$\omega_s > 2\omega_m \quad \text{ou} \quad T < \frac{2\pi}{2\omega_m} \quad \text{ou ainda} \quad T < \frac{1}{2f_m}. \quad (7.3)$$

Caso a condição  $\omega_s > 2\omega_m$  não seja respeitada, os espectros deslocados se sobrepõem conforme mostra a Figura 7.6. Os traços pontilhados nesta figura representam os espectros deslocados, enquanto que a linha cheia representa o espectro resultante. Neste caso não é possível recuperar o sinal original contínuo no tempo pois o espectro ao redor de zero sofre distorção pela sobreposição dos seus vizinhos.

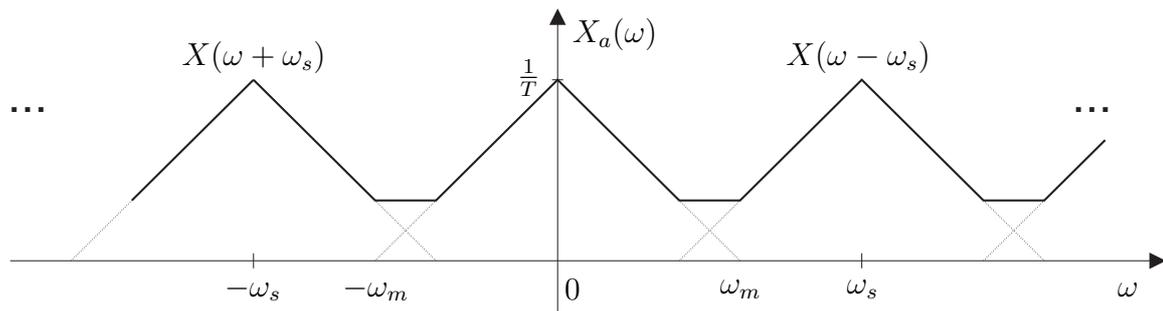


Figura 7.6: Espectro de um sinal amostrado com sobreposição entre os espectros deslocados.

Os sinais na natureza não apresentam limitações precisas de largura espectral. Esta limitação é sempre estabelecida através de filtragem do sinal de acordo com especificações padronizadas. Por exemplo, o sinal de voz de telefonia tem, de acordo com padrão internacional, faixa de freqüências compreendida entre 300 Hz e 3800 Hz, estabelecida através de filtro com especificações padronizadas. Como conseqüência, a freqüência de amostragem é padronizada em 8000 Hz, isto é, são tomadas 8000 amostras por segundo. Da mesma forma, o sinal de áudio tem faixa de freqüências limitada a 20 KHz através de filtragem passa-baixas. A taxa de amostragem padronizada é de 44.100 amostras/s. Por fim, o sinal de vídeo tem faixa de freqüências entre 4,5 MHz e 5,0 MHz e, em geral, a taxa de amostragem é de 10 Mamostras/s.

### Exemplo 7.1

Vamos considerar a amostragem do sinal  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ . Observe que o sinal senoidal tem faixa de freq limitada a  $\omega_0$  rad/s. Logo, o teorema da amostragem será respeitado se a freqüência de amostragem  $\omega_s$  for maior que duas vezes  $\omega_0$ . A Figura 7.7 mostra o resultado da amostragem para dois valores da freqüência de amostragem. O primeiro valor respeita o teorema da amostragem, enquanto que o segundo não.

Podemos notar que no primeiro caso temos os impulsos nas freqüências  $\pm\omega_0$  e os demais impulsos ao redor de múltiplos de  $\omega_s$ , isto é, estes conjuntos de impulsos estão claramente separados. Já no segundo caso, os impulsos nas freqüências  $\pm(\omega_s - \omega_0)$  estão mais próximos da origem que aqueles em  $\pm\omega_0$ . Assim, à primeira vista pode parecer que estamos tratando de um sinal senoidal na freqüência  $\omega_s - \omega_0$ .

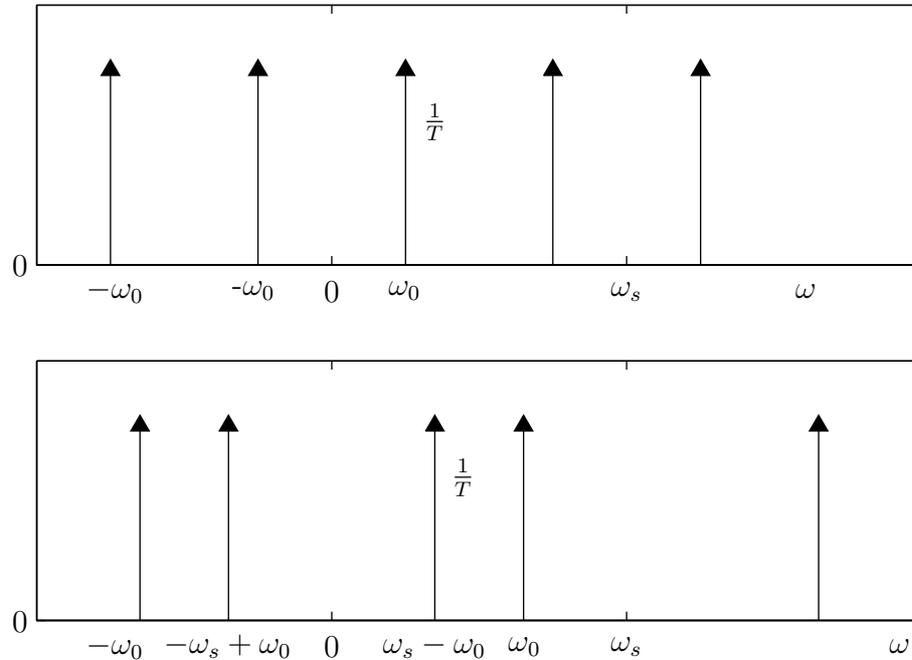


Figura 7.7: Espectro do sinal  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  sem sobreposição espectral e com sobreposição.

Podemos então enunciar o Teorema da Amostragem da seguinte forma.

*Um sinal  $x(t)$  contínuo no tempo é completamente representado por suas amostras colhidas a intervalos  $T$  desde que o espectro do sinal tenha faixa de frequência limitada a  $\omega_m$  rad/s e que o intervalo  $T$  seja tal que  $T < \pi/\omega_m$  ou  $T < 1/2f_m$ . As amostras representam o sinal no sentido de que  $x(t)$  pode ser recuperado de forma exata. A recuperação se faz com um filtro passa-baixas ideal com ganho  $T$  e frequência de corte  $\omega_c$  tal que  $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$ , onde  $\omega_s = 2\pi/T$ .*

**Definição:** Taxa de Nyquist =  $2\omega_m$  amostras/s

**Definição:** Frequência de amostragem de Nyquist =  $2\omega_m$

## 7.2.2 Amostragem com pulsos ou amostrador-segurador (sample-and-hold)

Vamos empregar os resultados da seção anterior para analisar o processo de amostragem conforme ele é implementado fisicamente.

A amostragem com os circuitos amostradores-seguradores emprega pulsos retangulares periódicos com período  $T$ , cujas amplitudes são condicionadas pelo valor da amostra do sinal no instante correspondente, conforme mostra a Figura 7.8

Vamos descrever as conseqüências desta forma de amostragem usando os resultados da seção anterior. Para isto observe que o sinal amostrado  $x_{as}(t)$  pode ser escrito como

$$x_{as}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t = nT) p(t - nT),$$

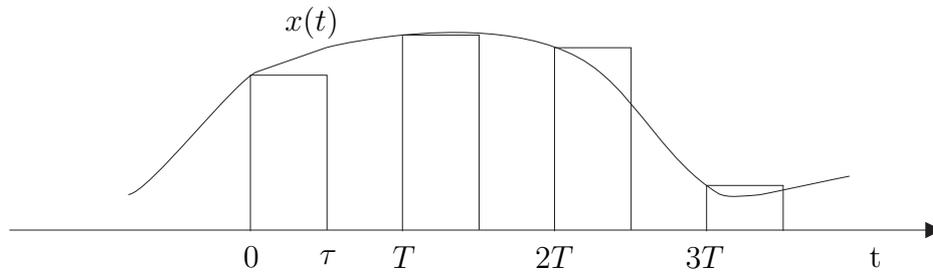


Figura 7.8: Amostragem do sinal  $x(t)$  através de pulsos retangulares.

onde  $p(t)$  descreve um pulso retangular com amplitude unitária, início em  $t = 0$  e final em  $t = \tau$ .

Observe que o trem de pulsos retangulares pode ser expresso usando a função  $\delta_T(t)$  da seguinte forma.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT) = p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Usando este resultado, o sinal amostrado  $x_{as}(t)$  será

$$x_{as}(t) = p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

O fator

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

é o sinal amostrado com a amostragem ideal. Logo seu espectro é conhecido. O espectro de  $p(t)$  também é conhecido. Então podemos calcular a transformada de Fourier de  $x_{as}(t)$  como

$$X_{as}(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2) e^{-j\omega\tau/2} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

ou seja,

$$X_{as}(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2) e^{-j\omega\tau/2} X_a(\omega)$$

Como  $X_a(\omega)$  é o espectro que resultou da amostragem ideal, concluímos que o espectro  $X_{as}(\omega)$  é igual a  $X_a(\omega)$  exceto pelo fator multiplicativo representado pela função Sa, conforme mostra a Figura 7.9. O fator  $e^{-j\omega\tau/2}$  representa apenas uma componente linear de fase e, portanto, um atraso no tempo.

Podemos então colocar as seguintes observações:

1- O espectro  $X_{as}(\omega)$  possui as versões deslocadas do espectro do sinal original, porém não é periódico.

2- Os espectros deslocados estão multiplicados pelo fator  $\tau \text{Sa}(\omega\tau/2) e^{-j\omega\tau/2}$ . Logo, como esta curva varia com a frequência, estes espectros estão deformados.

3- A deformação causada pelo fator multiplicativo pode ser corrigida passando o sinal amostrado por um equalizador com uma resposta em frequência igual ao inverso do fator multiplicativo, ou seja,

$$H_{eq}(\omega) = \frac{1}{\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)}$$

Observe que o fator exponencial  $e^{-j\omega\tau/2}$  não precisa ser corrigido por representar apenas um atraso.

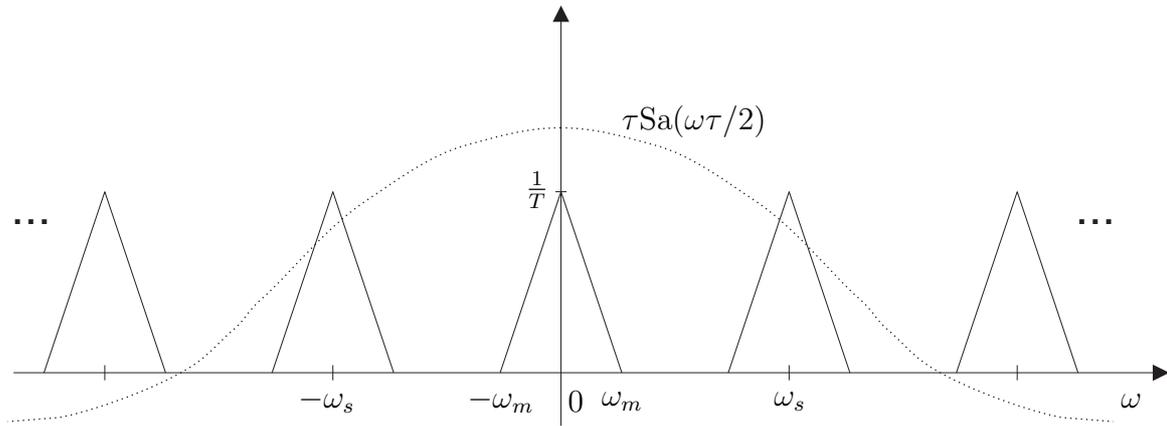


Figura 7.9: Espectro gerado pela amostragem ideal e o fator multiplicativo devido à amostragem por pulsos retangulares.

4- O sinal resultante da correção da distorção é idêntico àquele que é obtido com a amostragem ideal. Logo, é regido pelo teorema da amostragem.

O equalizador para correção da distorção produzida pelo fato de usarmos pulsos retangulares e não impulsos, é conhecido como **filtro**  $1/[\text{sen}(x)/x]$  e faz parte de todos os sistemas de recuperação de um sinal contínuo no tempo a partir de suas amostras nos sistemas práticos.

Observe, por fim, que, conforme mostra a Figura 7.10, este equalizador atua apenas na faixa correspondente ao filtro passa-baixas ideal para recuperação do sinal contínuo. Também, é usual associar o equalizador e filtro ideal em um único sistema, resultando na resposta mostrada na Figura 7.10.

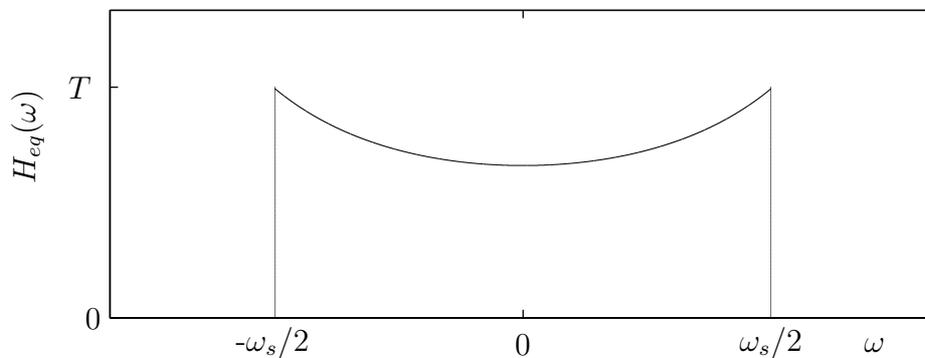


Figura 7.10: Resposta em frequência de um equalizador para corrigir a distorção provocada pela amostragem com pulsos retangulares e simultaneamente filtrar o sinal amostrado para recuperação do sinal contínuo.

### 7.2.3 Processo de recuperação no domínio do tempo

Vamos analisar o processo de recuperação do sinal contínuo usando as ferramentas do domínio do tempo, reproduzindo o processo elaborado no domínio da frequência.

O processo de recuperação consiste em filtrar o sinal amostrado com um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\omega_s/2$  e ganho  $T$ , ou seja,

$$X(\omega) = X_a(\omega)H_{pb}(\omega).$$

No domínio do tempo temos

$$x(t) = x_a(t) * h_{pb}(t).$$

Lembrando que

$$x_a(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT),$$

e que

$$h_{pb}(t) = \frac{\omega_s T}{2\pi} \text{Sa} \left( \frac{\omega_s t}{2} \right),$$

temos

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) * \frac{\omega_s T}{2\pi} \text{Sa} \left( \frac{\omega_s t}{2} \right).$$

Lembrando que  $\omega_s = 2\pi/T$  e realizando a convolução resulta finalmente

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa} \left[ \frac{\omega_s(t - nT)}{2} \right]. \quad (7.4)$$

Esta expressão mostra que o sinal original  $x(t)$  pode ser expresso como uma combinação linear de funções  $\text{Sa}(t)$  deslocadas e ponderadas pelas amostras de  $x(t)$ . Esta expressão é conhecida como **fórmula de interpolação de um sinal** e tem aplicações práticas.

A Figura 7.11 mostra um exemplo do processo de composição do sinal  $x(t)$  através da fórmula de interpolação.

Observe que as funções  $\text{Sa}(t)$  estão deslocadas de  $T$  entre si e que todas cruzam por zero no ponto de máximo de cada função deslocada. Portanto, todas as funções deslocadas não interferem sobre estes pontos de máximo. Dado que a amplitude destes máximos são os valores correspondentes das amostras do sinal, estes máximos já apresentam a amplitude correta para a representação do sinal contínuo nos instantes  $nT$ . Fora destes instantes, as amplitudes do sinal contínuo são formadas pela soma de todas as funções  $\text{Sa}(t)$  deslocadas.

## 7.3 Seqüências

Vamos definir aqui o conceito de seqüência conforme usualmente empregado no processamento de sinais discretos.

Neste contexto, uma seqüência representa uma lista ordenada de números. A ordem é indicada por uma variável de contagem, como se faz para a representação de dados armazenados na memória de um computador usando uma variável indexada.

As amostras  $x(nT)$  de um sinal  $x(t)$  podem ser representadas por uma seqüência de números  $x[n]$ . O intervalo de amostragem  $T$  não é explicitado no âmbito de uma seqüência, por conveniência.

Podemos interpretar os números  $x[n]$  como uma variável indexada que contém o valor da amostra correspondente.

Esta notação para seqüências é adequada para a representação das amostras em um computador, como, por exemplo, quando as amostras estão armazenadas em memória. Também, é uma notação

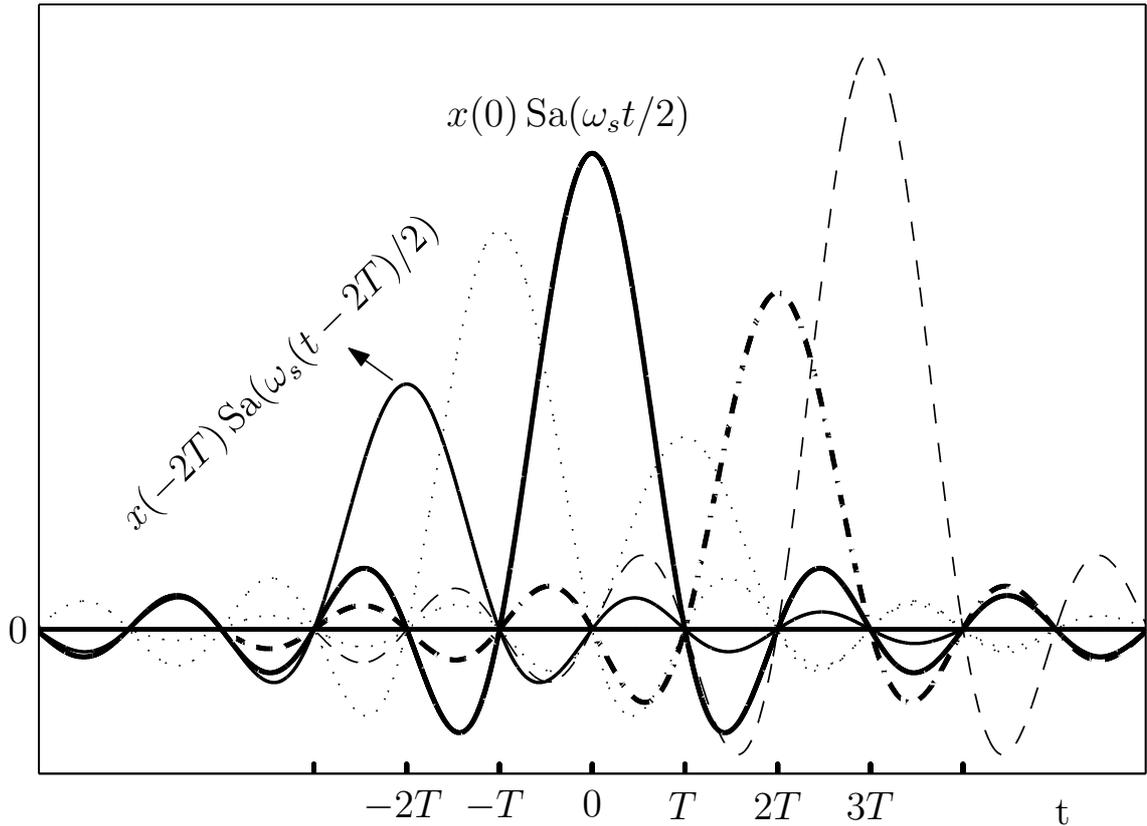


Figura 7.11: Ilustração do processo de reconstrução de um sinal contínuo a partir de suas amostras.

coerente com aquela usada nos capítulos iniciais. Com isto, por exemplo, a operação de convolução entre duas seqüências de amostras  $x(nT)$  e  $h(nT)$ , que seria escrita como

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h(nT - kT),$$

passa a ser escrita como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k].$$

## 7.4 A transformada de Fourier dos sinais discretos

A ausência do parâmetro  $T$  nas expressões envolvendo seqüências motiva a definição de uma nova expressão para a transformada de Fourier a ser utilizada no contexto das seqüências.

Vimos que o sinal resultante da amostragem ideal de um sinal contínuo  $x(t)$  com intervalo  $T$  entre amostras é escrito como

$$x_a(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Lembrando que  $\mathfrak{S}\{\delta(t)\} = 1$  e usando a propriedade do deslocamento no tempo temos:

$$X_a(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-j\omega Tn); \quad \text{para amostras.} \quad (7.5)$$

Partindo desta expressão definimos a transformada de Fourier para seqüências como

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n); \quad \text{para seqüências,} \quad (7.6)$$

onde

$$\Omega = \omega T \quad \text{ou} \quad \Omega = 2\pi fT. \quad (7.7)$$

A variável contínua  $\Omega$  é igual à frequência em radianos por segundo normalizada pelo intervalo de amostragem  $T$  associado ao processo de amostragem. Quando tratamos com seqüências que não decorrem de um processo de amostragem, podemos considerar  $T = 1$ . Denominamos  $\Omega$  de frequência angular normalizada da representação discreta no tempo ou, conforme alguns autores, radianos por amostra.

A condição suficiente para a convergência uniforme da transformada de Fourier  $X(\Omega)$  é dada por:

$$|X(\Omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty,$$

o que implica em

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty. \quad (7.8)$$

Vimos que a transformada de Fourier  $X_a(\omega)$  de um sinal amostrado é periódica com período  $\omega_s = 2\pi/T$ . A transformada de Fourier  $X(\Omega)$  também é periódica com período  $\Omega_s = \omega_s T = 2\pi$ , ou seja,

$$X(\Omega) = X(\Omega + k2\pi); \quad k \text{ inteiro.} \quad (7.9)$$

A Figura 7.12 mostra a comparação entre os eixos de frequência para  $f$ ,  $\omega$  e  $\Omega$  e a Figura 7.13 mostra a relação entre os espectros de frequências de um sinal analógico, da transformada de Fourier de suas amostras e da transformada de Fourier da seqüência correspondente. Em geral desenhamos o espectro  $X(\Omega)$  apenas no intervalo  $-\pi < \Omega \leq \pi$  ou  $0 \leq \Omega < 2\pi$ , devido à sua periodicidade com período  $2\pi$ . Adicionalmente, para o caso particular de seqüências reais, onde o espectro de amplitude possui simetria par e o espectro de fase possui simetria ímpar, é comum representarmos o espectro apenas no intervalo  $0 \leq \Omega < \pi$ .

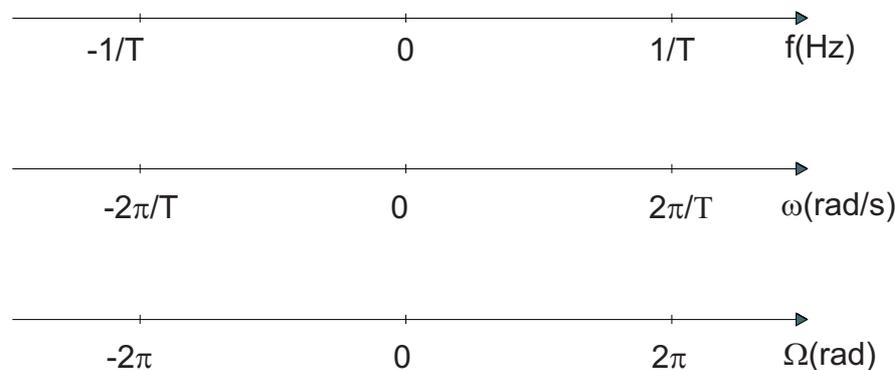


Figura 7.12: Comparação entre eixos de frequências.

Por fim é importante perceber que a transformada de Fourier para seqüências ou sinais discretos é um caso particular da transformada de Fourier estudada no Capítulo 5. Isto porque a expressão (7.6) descreve a transformada de Fourier usual de um sinal. Neste caso o sinal é composto por uma seqüência de impulsos e, portanto, é discreto no tempo. Porém, a transformada empregada é aquela definida no Capítulo 5 e, assim, o resultado desta operação é o espectro usual de Fourier.

*Esta conclusão indica que todas as propriedades estudadas no Capítulo 5 são válidas para a transformada de Fourier para os sinais discretos.*

Portanto, não estudaremos as propriedades da transformada de Fourier para seqüências.

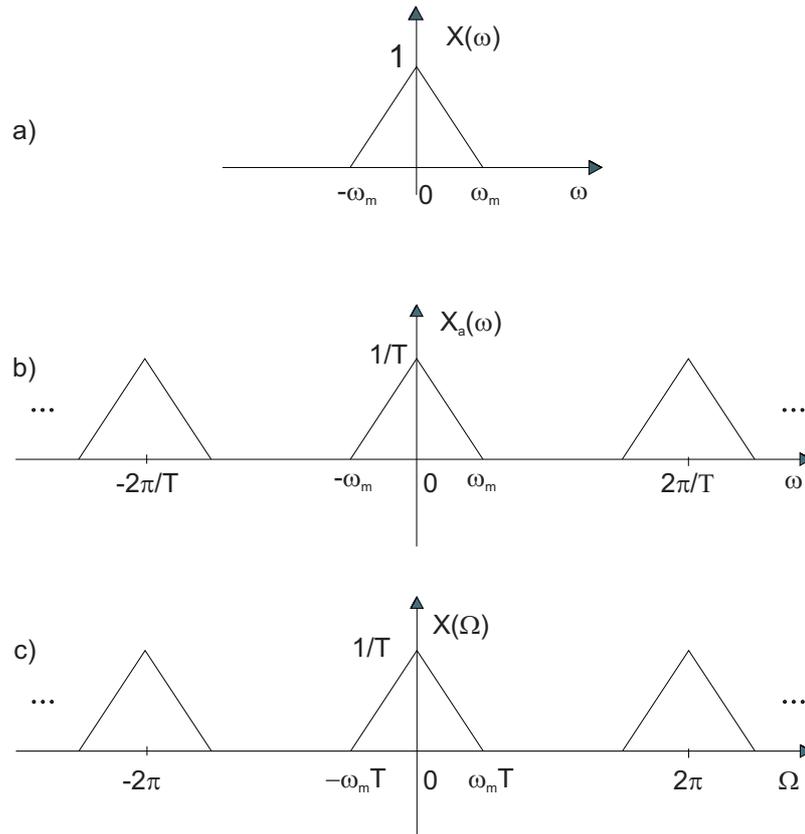


Figura 7.13: Comparação entre espectros de freqüência: a) sinal contínuo, eixo  $\omega$ ; b) sinal com amostragem ideal, eixo  $\omega$ ; c) seqüência correspondente, eixo normalizado  $\Omega$ .

### 7.4.1 Transformada inversa

Vamos mostrar que a transformada inversa de um espectro  $X(\Omega)$  é dada por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega. \quad (7.10)$$

Para tanto, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\Omega k} e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_0^{2\pi} e^{j\Omega(n-k)} d\Omega. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Mas:

$$\int_0^{2\pi} e^{j(n-k)\Omega} d\Omega = \begin{cases} 0; & k \neq n \\ 2\pi; & k = n. \end{cases}$$

Portanto, usando esta última igualdade na expressão (7.11) teremos finalmente a expressão de (7.10).

## 7.5 Cálculo da transformada de algumas seqüências

Vamos calcular o espectro de freqüências normalizadas de algumas seqüências importantes.

### 1- seqüência impulso unitária

$$\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

A transformada de Fourier desta seqüência é calculada como:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] \exp(-j\Omega n). \end{aligned}$$

Daí resulta :

$$X(\Omega) = 1. \quad (7.13)$$

A Figura 7.14 apresenta o espectro de freqüências discreto desta seqüência. Este é constante ao longo do eixo normalizado de freqüências, da mesma forma como o espectro da função Delta de Dirac.

### 2- seqüência degrau unitário

$$u[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

Dado que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] \rightarrow \infty,$$

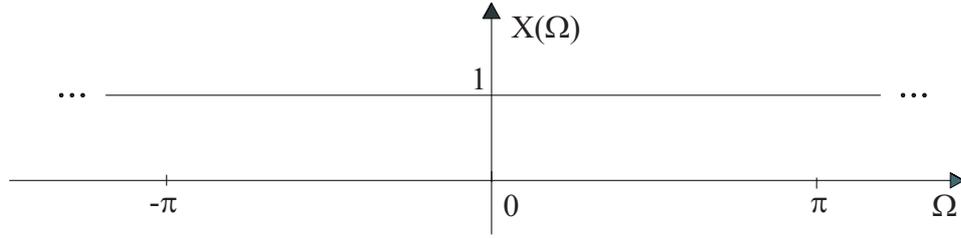


Figura 7.14: Espectro de frequências da sequência impulso unitário.

não existe a transformada de Fourier.

### 3- sequência retangular

$$r_N[n] \triangleq \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (7.15)$$

A transformada de Fourier de  $r_N[n]$  é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_N(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_N[n] \exp(-j\Omega n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-j\Omega n), \end{aligned}$$

ou seja, temos a soma de uma progressão geométrica com razão  $\exp(-j\Omega)$ . Lembrando que tal soma é dada por:

$$S = \frac{\text{elemento inicial} - \text{elemento final} \times \text{razão}}{1 - \text{razão}}, \quad (7.16)$$

podemos escrever:

$$R_N(\Omega) = \frac{1 - e^{-jN\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}. \quad (7.17)$$

Esta expressão pode ainda ser alterada da seguinte forma:

$$R_N(\Omega) = \frac{e^{-jN\Omega/2} (e^{jN\Omega/2} - e^{-jN\Omega/2})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})},$$

de onde resulta

$$R_N(\Omega) = e^{-j(N-1)\Omega/2} \frac{\text{sen}(N\Omega/2)}{\text{sen}(\Omega/2)}. \quad (7.18)$$

Os espectros de amplitude e de fase associados à transformada de Fourier desta sequência para o caso de  $N = 7$  estão mostrados na Figura 7.15.

Observamos pelo gráfico de magnitude que  $R_N(\Omega = 0) = N$ , o que também pode ser comprovado aplicando a regra de l'Hôpital para o cálculo do valor de  $R_N(\Omega)$  em  $\Omega = 0$ . Observamos ainda que no intervalo  $0 \leq \Omega < 2\pi$  existem seis cruzamentos por zero nos pontos  $2\pi k/N$ ;  $k = 1, 2, \dots, 6$ . Tais cruzamentos são marcados pelas descontinuidades da derivada de  $|R_N(\Omega)|$  e pelos saltos da resposta de fase nos pontos correspondentes, saltos estes com amplitude de  $\pi$ , indicando, cada um deles, uma inversão da polaridade da função  $R_N(\Omega)$ .

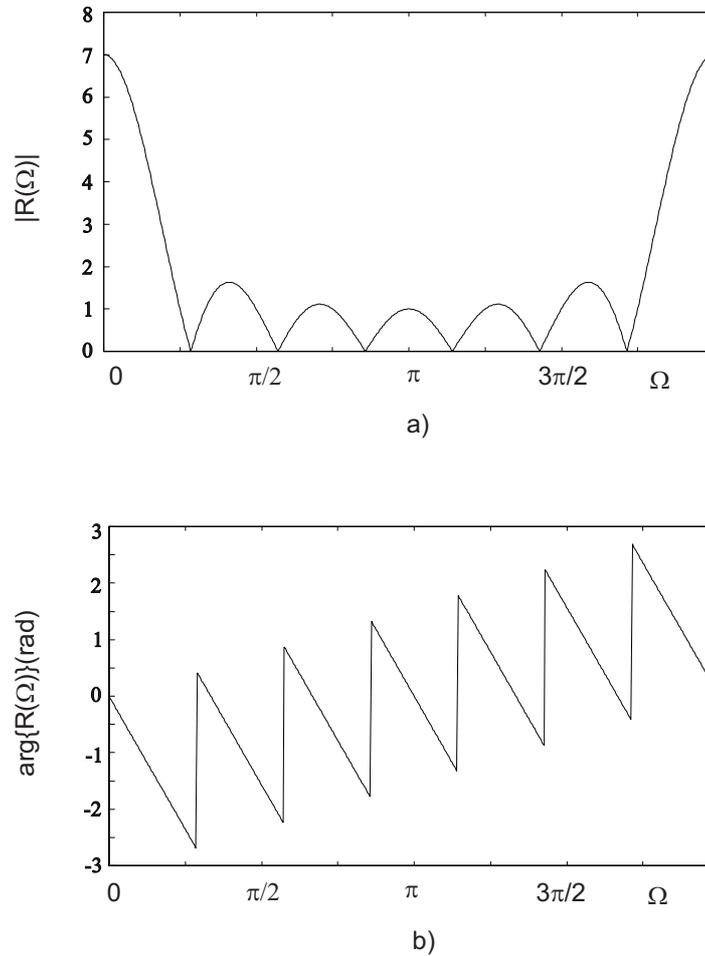


Figura 7.15: Espectro de frequências da seqüência retangular com  $N = 7$ .

#### 4- seqüência exponencial real

$$x[n] = a^n u[n], \quad a = \text{constante real e } |a| < 1. \quad (7.19)$$

Esta seqüência desempenha um papel bastante destacado no processamento de sinais discretos, em particular na análise de sistemas lineares.

Com base na expressão (7.16), podemos facilmente deduzir que a transformada de Fourier desta seqüência é dada por:

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}. \quad (7.20)$$

As Figuras 7.16 e 7.17 apresentam dois exemplos de curvas associadas à função espectral em (7.20).

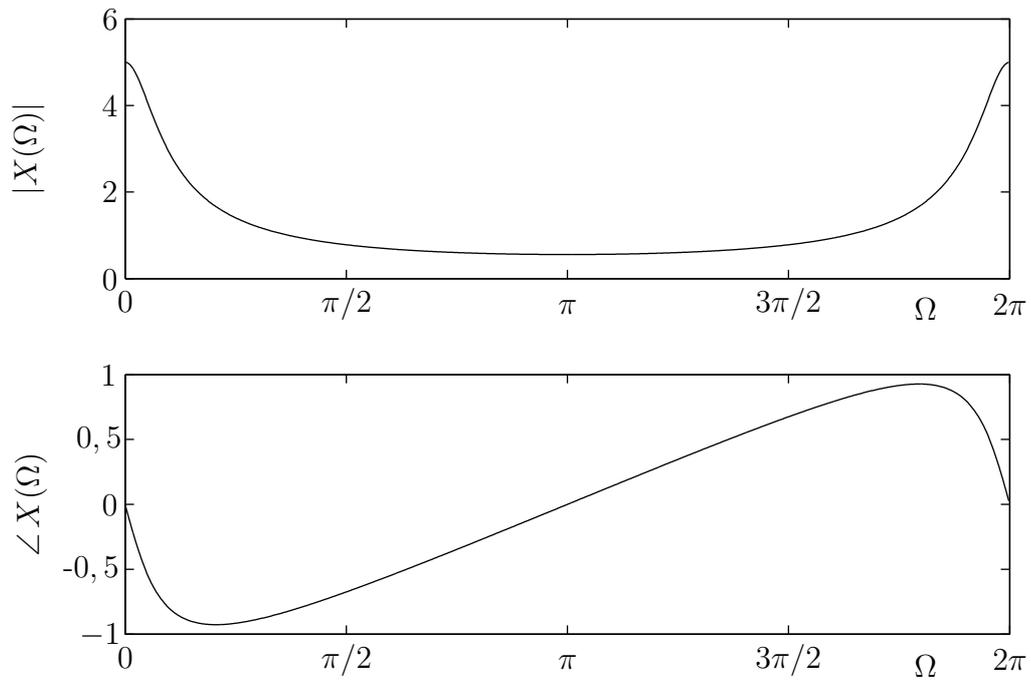


Figura 7.16: Espectro de frequências normalizadas para a sequência  $x[n] = a^n u[n]$  com  $a = 0,8$ .

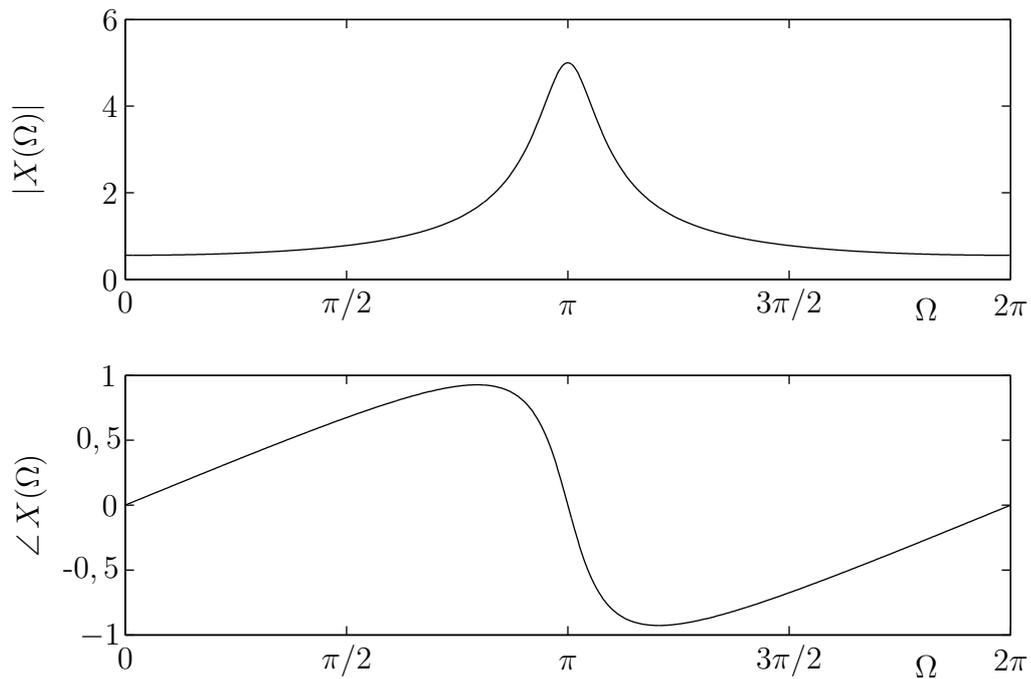


Figura 7.17: Espectro de frequências normalizadas para a sequência  $x[n] = a^n u[n]$  com  $a = -0,8$ .

**Exemplo 7.2**

Vamos tratar da propriedade da convolução no tempo no contexto da transformada para seqüências.

Suponha a convolução

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Vamos calcular a transformada de Fourier para seqüências desta relação.

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right\} e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{-j\Omega n} \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H(\Omega)e^{-j\Omega k} \\ &= H(\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k} \\ &= H(\Omega)X(\Omega). \end{aligned}$$

Este resultado confirma a propriedade da convolução no tempo.

**Exemplo 7.3**

Vamos tratar da propriedade da convolução na freqüência no contexto da transformada para seqüências.

Suponha o seguinte produto de seqüências

$$y[n] = x[n]h[n].$$

Vamos calcular a transformada de Fourier para seqüências deste produto.

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[n]e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\alpha)e^{j\alpha n} d\alpha \right\} h[n]e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\alpha) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\Omega-\alpha)n} \right\} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\alpha) H(\Omega - \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Este resultado confirma a propriedade do produto no tempo associado à convolução em frequência.

Observe que a convolução neste caso é realizada apenas em um período dos espectros periódicos. O resultado desta convolução é periódico com período  $2\pi$ .

## 7.6 Filtros discretos no tempo

As Figuras 7.18 até 7.21 mostram as características dos filtros discretos ideais. Observe que elas são idênticas àsquelas dos sistemas contínuos exceto pela periodicidade da resposta em frequência. Dado que a resposta ao impulso de um sistema discreto é uma seqüência, sua transformada gera uma função de transferência periódica.

Filtro passa-baixas ideal - Figura 7.18

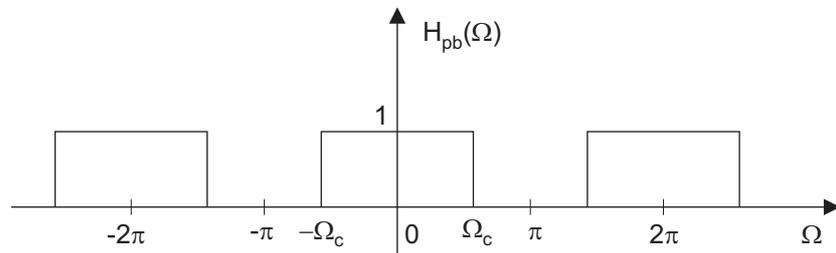


Figura 7.18: Resposta em frequência de um filtro discreto ideal passa-baixas.

*O filtro seleciona as frequências ao redor de  $\Omega = 0$ , até  $\Omega = \Omega_c$ . É importante observar que as altas frequências estão ao redor de  $\Omega = \pi$ , uma vez que a periodicidade no eixo  $\Omega$  faz com que ao redor de  $\Omega = 2\pi$  tenhamos o mesmo conteúdo espectral da região ao redor de  $\Omega = 0$ .*

Filtro passa- altas ideal - Figura 7.19

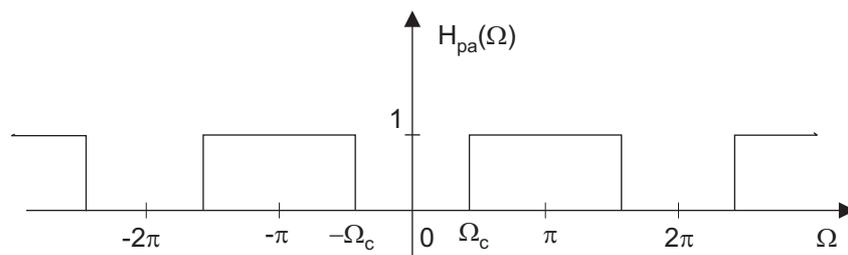


Figura 7.19: Resposta em frequência de um filtro discreto ideal passa-altas.

*Neste caso o filtro seleciona as altas frequências ao redor de  $\Omega = \pi$ . Sua frequência de corte ocorre em  $\Omega = \Omega_c$ .*

Filtro passa-faixa ideal - Figura 7.20

*O filtro passa-faixa seleciona as frequências na faixa que vai desde  $\Omega_{c1}$  até  $\Omega_{c2}$ .*

Filtro rejeita-faixa ideal - Figura 7.21

*O filtro rejeita-faixa elimina as frequências na faixa que vai desde  $\Omega_{c1}$  até  $\Omega_{c2}$ .*

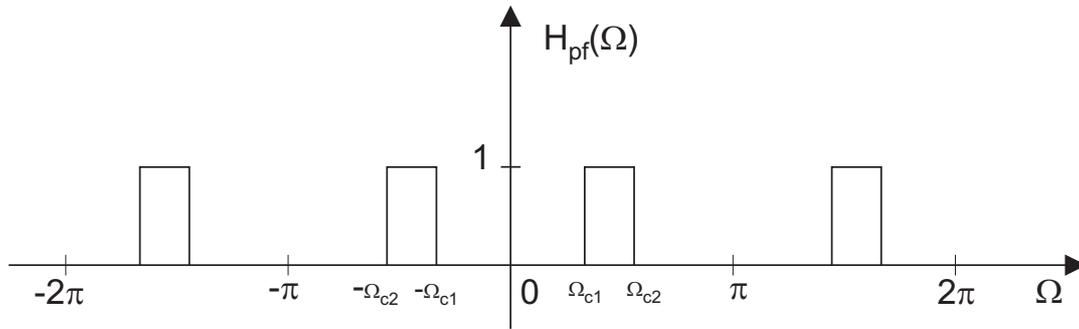


Figura 7.20: Resposta em frequência de um filtro discreto ideal passa-faixa.

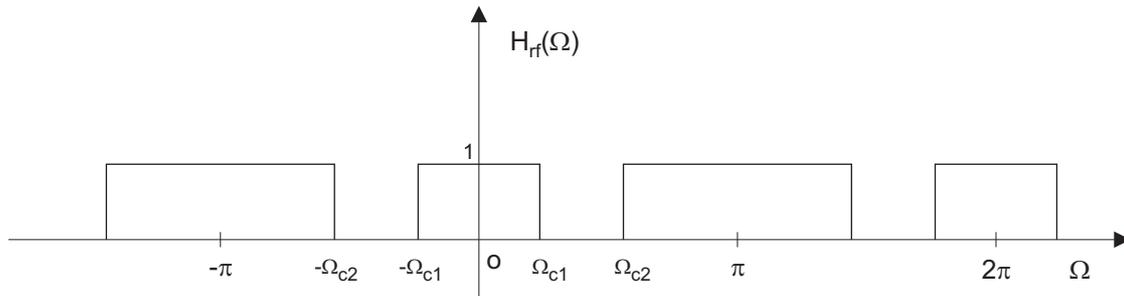


Figura 7.21: Resposta em frequência de um filtro discreto ideal rejeita-faixa.

## 7.7 Processamento discreto de sinais

Vamos analisar um exemplo que ilustra a relação entre um processamento analógico e um discreto. A Figura 7.22 apresenta todos os passos, a nível de espectros, de um processamento discreto que produz uma ação equivalente a uma filtragem passa-baixas com um filtro analógico ideal com frequência de corte  $\Omega_c$ . Portanto, o processamento discreto é equivalente ao processamento realizado por um filtro analógico com frequência de corte  $\Omega_c = \omega_c/T$ .

Podemos observar que esta frequência de corte equivalente depende da frequência de corte  $\Omega_c$  do filtro discreto e do intervalo de amostragem  $T$ . Assim, temos dois mecanismos para alterar o valor da frequência de corte analógica de modo a poder eventualmente ajustá-la a cada nova situação prática: variando  $\Omega_c$  ou variando  $T$ . Como estes dois mecanismos são mais simples que reprojeter e reconstruir um filtro analógico, concluímos que o equivalente discreto ainda oferece a vantagem de flexibilidade de ajuste deste parâmetro.

Outra questão que decorre do exemplo é que a filtragem passa-baixas permite que aceitemos um certo grau de sobreposição entre os espectros deslocados da Figura 7.22b) sem que isto implique em deformação do sinal  $y_r(t)$ . Basta que o intervalo de amostragem  $T$  seja escolhido de forma que

$$\frac{2\pi}{T} - \omega_m > \Omega_c/T.$$

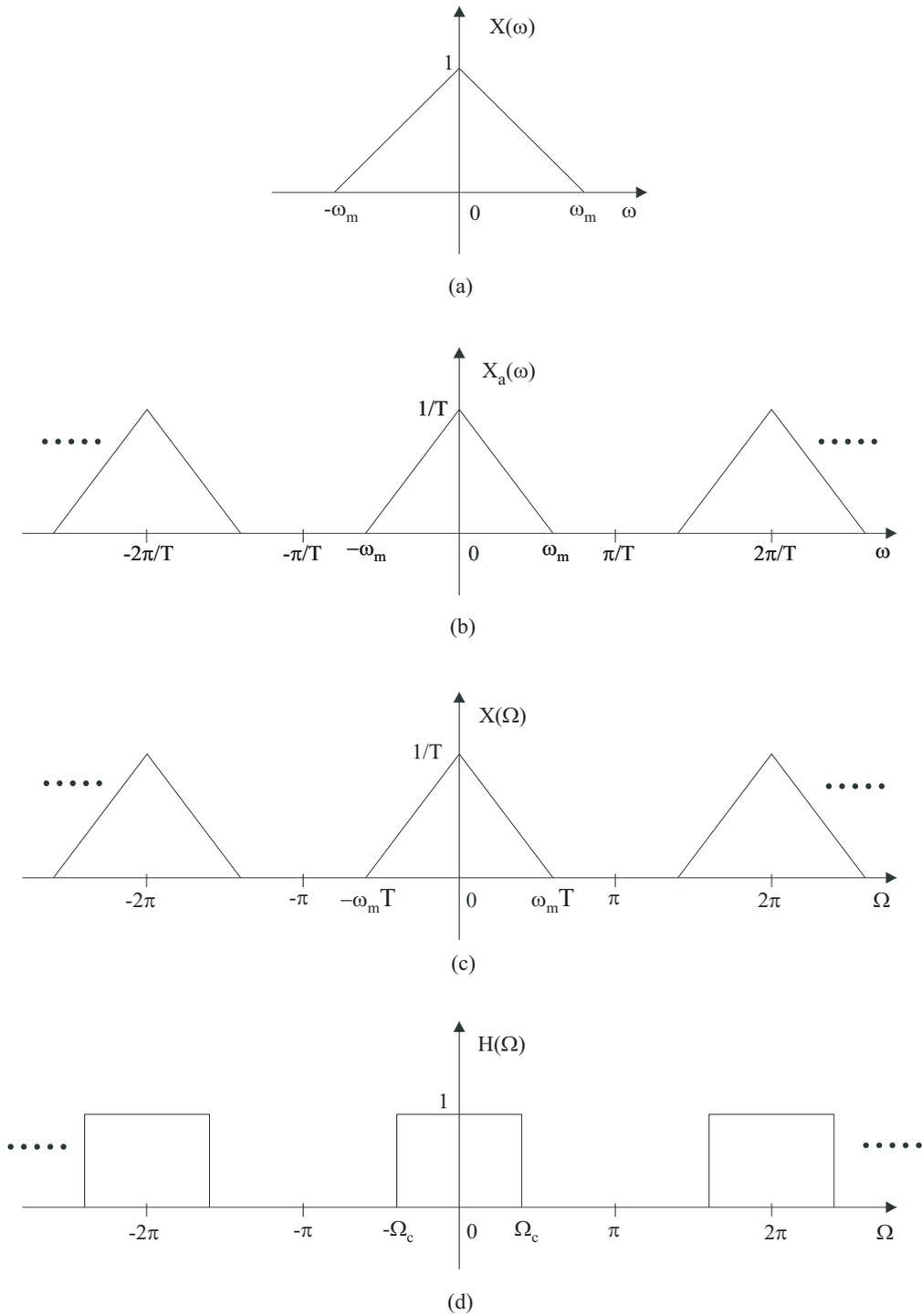


Figura 7.22: Etapas de processamento discreto de um sinal: a) espectro do sinal contínuo; b) espectro do sinal amostrado; c) espectro da seqüência correspondente; d) filtro passa-baixas discreto. *Continua na próxima página.*

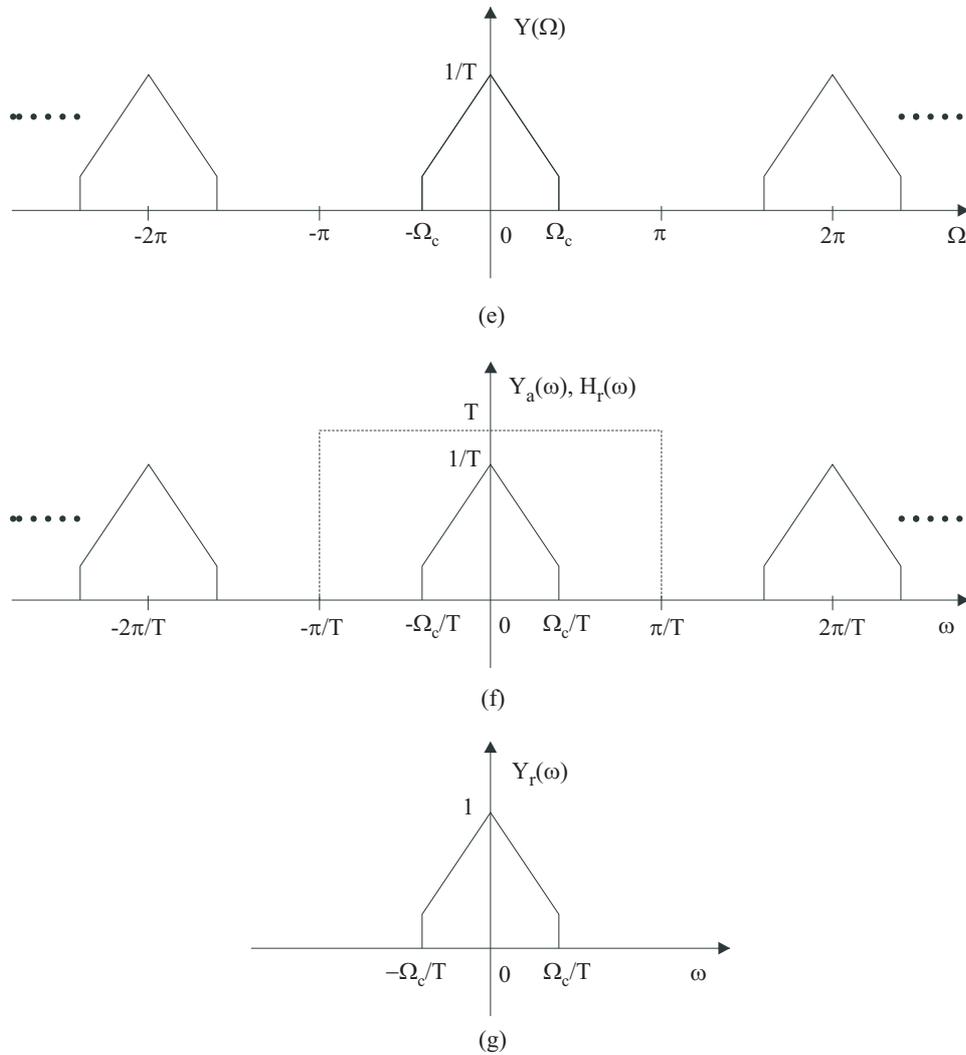


Figura 7.22: Etapas de processamento discreto de um sinal: a) espectro do sinal contínuo; b) espectro do sinal amostrado; c) espectro da seqüência correspondente; d) filtro passa-baixas discreto; e) espectro da seqüência após o filtro passa-baixas; f) filtragem para recuperação do sinal contínuo; g) espectro do sinal contínuo recuperado.

#### Exemplo 7.4

Vamos considerar a equação a diferenças linear com coeficientes constantes

$$y[n] = x[n] + ay[n - 1], \quad a = \text{real}$$

a qual pode ser associada a um sistema com a seqüência de cálculos ilustrada na Figura 7.23.

Observe que este sistema tem uma realimentação com ganho  $a$ .

Vamos calcular a saída para o caso particular em que  $x[n] = \delta[n]$ , ou seja, vamos calcular a resposta ao impulso deste sistema. Neste caso, a saída  $y[n] = h[n]$ . Vamos supor que o sistema está no estado inicial nulo, isto é, sua memória está zerada. Com isto temos  $h[n] = 0$ ,  $n < 0$ .

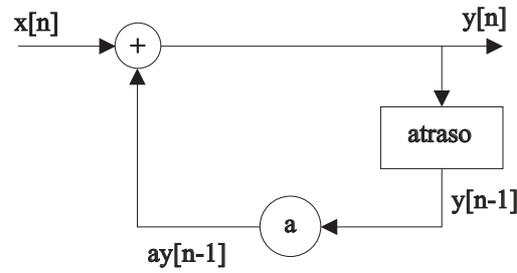


Figura 7.23: Representação de um sistema definido por  $y[n] = x[n] + ay[n - 1]$ .

A resposta impulsiva é dada por

$$h[n] = a^n u[n],$$

ou seja, é a seqüência exponencial.

A transformada de Fourier de  $h[n]$  é a função de transferência do sistema discreto e tem o formato ilustrado nas Figuras 7.16 e 7.17. Podemos observar que o sistema se comporta como um filtro passa-baixas discreto quando adotamos  $a = 0,8$ , enquanto que para  $a = -0,8$  o sistema se comporta como um filtro passa-altas.

---

## 7.8 Exercícios

- Um sinal  $x(t)$ , contínuo no tempo e real, é univocamente determinado por suas amostras quando a frequência de amostragem é  $\omega_s = 10.000\pi$ . Para quais valores de  $\omega$  o espectro de  $x(t)$  é, com certeza, nulo? Justifique.
- Suponha que um sinal contínuo  $s(t)$  é filtrado por um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\omega_c = 1000\pi$ , gerando um sinal  $x(t)$  na sua saída. Suponha que  $x(t)$  será amostrado com intervalo  $T$  entre amostras. Quais dos seguintes valores de  $T$  garantem que  $x(t)$  poderá ser recuperado sem erros a partir das amostras?
  - $T = 0,5 \times 10^{-3}$ ,
  - $T = 2 \times 10^{-3}$ ,
  - $T = 10^{-4}$ .
- A frequência mínima de amostragem de um dado sinal que garante a recuperação sem erros é denominada de **frequência de Nyquist**. Determine a frequência de Nyquist para os seguintes sinais:
  - $x(t) = 1 + \cos(2.000\pi t) + \sin(4.000\pi t)$ ,
  - $x(t) = \sin(4.000\pi t)/\pi t$ ,
  - $(\sin(4.000\pi t)/\pi t)^2$ .
- Um sinal  $x(t)$  tem frequência de Nyquist igual a  $\omega_0$ . Determine a frequência de Nyquist dos sinais a seguir.
  - $y(t) = x(t) + x(t - 1)$ ,
  - $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ,
  - $y(t) = x^2(t)$ ,
  - $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$ .
- Seja um sinal  $x(t)$  com frequência de Nyquist igual a  $\omega_0$ . Seja  $y(t) = x(t)p(t - 1)$ , onde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad e \quad T < 2\pi/\omega_0.$$

Especifique as restrições para as respostas de amplitude e de fase de um filtro que ao receber o sinal  $y(t)$  na entrada, fornece  $x(t)$  na saída.

- Dois sinais contínuos no tempo  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são multiplicados entre si como mostra a Figura 7.24, produzindo o sinal  $y(t)$ .

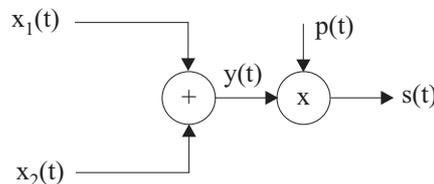


Figura 7.24: Sistema de amostragem.

O sinal  $y(t)$  é multiplicado pelo sinal  $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$  resultando no sinal  $s(t)$ . Suponha que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  têm faixa de frequência limitada a  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente. Determine o valor máximo para  $T$  de forma que  $y(t)$  possa ser completamente recuperado a partir de  $s(t)$ .

7. Demonstre quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas.

- O sinal  $x(t) = u(t+T_0) - u(t-T_0)$  pode ser amostrado sem que ocorra superposição espectral desde que o intervalo de amostragem  $T < 2T_0$ .
- O sinal  $x(t)$  com transformada de Fourier  $X(\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$  pode ser amostrado sem que ocorra superposição espectral desde que o intervalo de amostragem  $T < \pi/\omega_0$ .
- O sinal  $x(t)$  com transformada de Fourier  $X(\omega) = u(\omega) - u(\omega - \omega_0)$  pode ser amostrado sem que ocorra superposição espectral desde que o intervalo de amostragem  $T < 2\pi/\omega_0$ .

8. Dois sistemas  $S_1$  e  $S_2$  foram propostos para implementar um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\omega_c = \pi/4$ . O sistema  $S_1$  está especificado na Figura 7.25a), onde  $S_a$  provoca a inserção de uma amostra nula após cada amostra de sinal e  $S_b$  elimina uma amostra a cada duas amostras de sinal. O sistema  $S_2$  está especificado na Figura 7.25b).

Demonstre se os dois sistemas propostos implementam o filtro desejado.

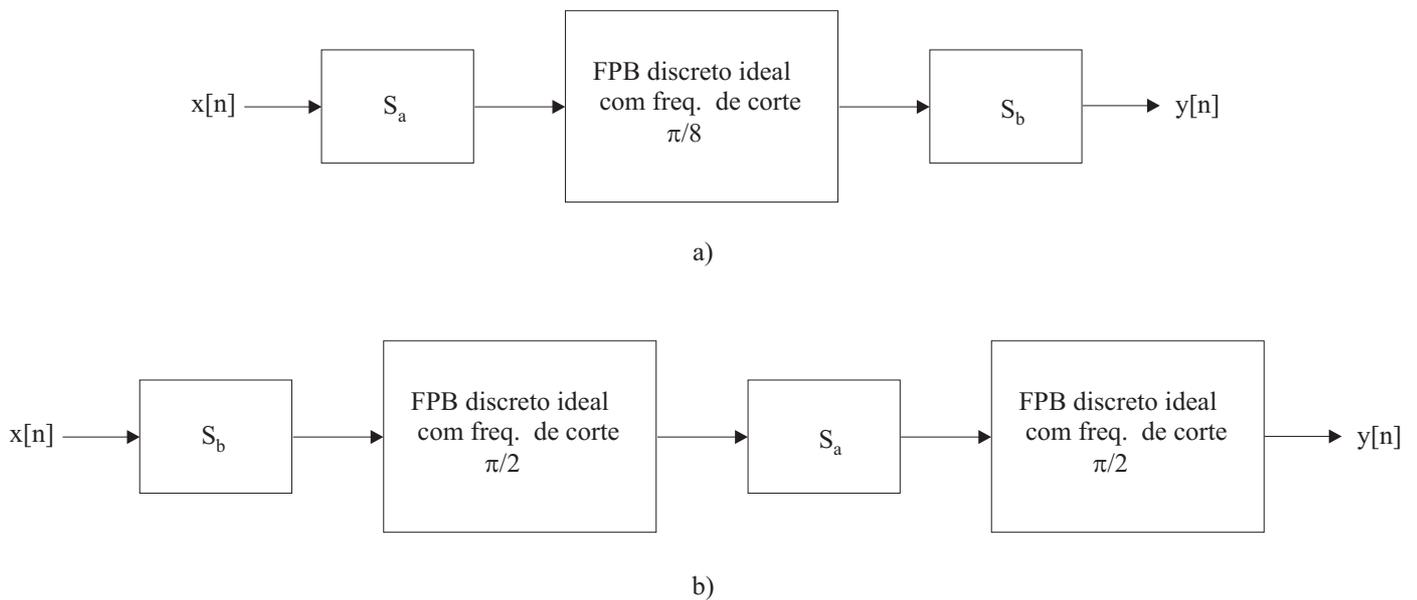


Figura 7.25: Dois sistemas propostos para a implementação de um filtro discreto ideal passa-baixas.

- Um sinal  $x(t)$  sofre uma amostragem ideal e gera o sinal discreto  $x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$ ,  $T = 10^{-4}$ . Demonstre para cada caso a seguir, se o sinal  $x(t)$  pode ser recuperado sem erros.
  - $X(\omega) = 0$ ,  $|\omega| > 5000\pi$ .
  - $X(\omega) = 0$ ,  $|\omega| > 15000\pi$ .
  - $\Re\{X(\omega)\} = 0$ ,  $|\omega| > 5000\pi$ .
  - $x(t)$  real e  $X(\omega) = 0$ ,  $|\omega| > 5000\pi$ .
  - $x(t)$  real e  $X(\omega) = 0$ ,  $\omega < -15000\pi$ .
  - $X(\omega) * X(\omega) = 0$ ,  $|\omega| > 15000\pi$ .
  - $|X(\omega)| = 0$ ,  $\omega > 5000\pi$ .

10. Seja  $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$  onde  $X_1(\omega) = 0, |\omega| > 1000\pi$  e  $X_2(\omega) = 0, |\omega| > 2000\pi$ . O sinal  $y(t)$  é amostrado com período  $T$ . Especifique a faixa de valores de  $T$  que asseguram que  $y(t)$  pode ser recuperado sem erros.
11. Um sinal  $x(t)$  com faixa de frequências limitada a  $\omega_m$  rad/s é multiplicado por um trem de pulsos retangulares  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_\tau(t - nT)$ ,  $r_\tau(t) = u(t) - u(t - \tau)$ , gerando um sinal  $y(t)$ . Calcule e esboce o espectro do sinal  $y(t)$ . Demonstre quais as condições para que o sinal  $x(t)$  possa ser recuperado a partir de  $y(t)$ .
12. Um sinal  $x(t)$  complexo e contínuo no tempo tem o espectro mostrado na Figura 7.26. Este sinal é amostrado produzindo  $x[n] = x(nT)$ .

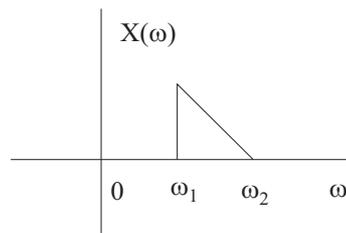


Figura 7.26: Espectro de um sinal genérico complexo.

- a) Esboce  $X(\Omega)$  para  $T = \pi/\omega_2$ .
- b) Supondo que  $\omega_2 = 2\omega_1$ , qual é a menor frequência de amostragem sob a restrição que  $x(t)$  possa ser recuperado de  $x[n]$ ?
- c) Desenhe um diagrama de blocos de um sistema que recupera  $x(t)$  nas condições do item b).
13. O sinal  $x(t)$ , com o espectro mostrado na Figura 7.27, é amostrado com  $T = 2\pi/\omega_1$ , gerando  $x[n]$ .

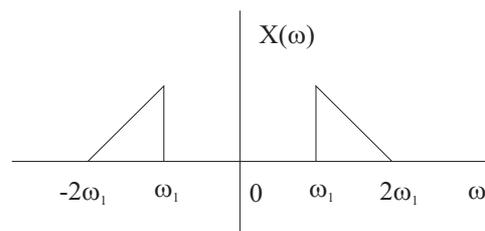


Figura 7.27: Espectro de um sinal genérico.

- a) Esboce  $X(\Omega)$ .
- b) Desenhe um diagrama de blocos de um sistema que recupera  $x(t)$  a partir de  $x[n]$ .
14. Um sinal  $x(t)$  com faixa de frequências limitada a 10 KHz é amostrado a uma taxa de 40.000 amostras/s gerando a seqüência  $x[n]$ .
- a) Esboce  $X(\Omega)$ .

- b) Esboce a resposta de amplitude de um filtro discreto passa-baixas ideal que, atuando sobre  $x[n]$ , produza uma limitação de faixa equivalente à de um filtro analógico passa-baixas ideal com frequência de corte igual a 8KHz.
- c) Esboce  $Y(\Omega)$  na saída do filtro do item b).
15. O sistema padronizado pela ITU para a avaliação objetiva de qualidade de áudio realiza um processamento que se inicia com uma amostragem do sinal contínuo a ser analisado. Suponha que a taxa de amostragem é 45 Kamostras/s.
- a) Supondo que o sinal de áudio tem faixa limitada a 20 KHz, esboce o espectro de frequências do sinal amostrado (eixo  $\omega$ ) e da seqüência resultante (eixo  $\Omega$ ).
- b) O sinal amostrado é submetido a um filtro discreto passa-baixas ideal que limita o espectro em uma frequência correspondente a 18 KHz. Especifique este filtro passa-baixas no eixo  $\Omega$ , fornecendo a frequência de corte. Esboce o espectro da seqüência resultante.
- c) O espectro da seqüência resultante da filtragem passa-baixas do item anterior é dividido em 40 faixas de frequências através de filtros discretos passa-faixa cobrindo o espectro na região correspondente à faixa de zero até 18 kHz. Suponha que os filtros são ideais e que as faixas são de mesma largura. Esboce a resposta de amplitude dos filtros, especificando as frequências de corte.

# Capítulo 8

## A Transformada Z

### 8.1 Introdução

### 8.2 Transformada Laplace

Seja  $s = \sigma + j\omega$ , uma variável complexa definida no plano complexo  $s$ .

**Definição:** a transformada de Laplace unilateral de uma função  $x(t)$  é definida como

$$L\{x(t)\} = X(s) \triangleq \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (8.1)$$

para valores de  $s$  onde a integral converge.

A variável  $s = \sigma + j\omega$ , quando tomada no eixo vertical  $\sigma = 0$ , se torna semelhante à variável da transformada de Fourier. Também, a integral da transformada de Laplace para  $\sigma = 0$  se torna igual à de Fourier. Porém, a transformada de Laplace se aplica apenas ao intervalo  $0 < t < \infty$ . Assim, por exemplo, ela não pode calcular a transformada de  $\cos(\omega_0 t)$ , uma vez que esta função seria tratada como se fosse  $\cos(\omega_0 t)u(t)$ .

Enquanto que a transformada de Fourier se mostra mais apropriada para a análise de sinais e da resposta de sistemas em regime estacionário, a transformada de Laplace é mais interessante para a análise do comportamento dos sistemas lineares e para a sua síntese.

---

#### Exemplo 7.1

Vamos calcular a transformada de Laplace de  $x(t) = e^{-at}u(t)$ .

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} ds \\ &= \frac{1}{s+a}; \quad \text{Re}(s+a) > 0. \end{aligned}$$

Observe que a transformada do exemplo só existe para os valores de  $s$  onde  $\text{Re}(s) > \text{Re}(-a)$ . Dizemos então que a **Região de Convergência** da transformada de  $x(t) = e^{-at}u(t)$  é  $\sigma > \text{Re}(-a)$ .

O conceito de região de convergência é importante para a transformada e uma transformada somente estará completamente especificada se fornecermos o funcional em  $s$  e sua região de convergência.

### Exemplo 7.2

Vamos calcular a transformada de Laplace de  $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$ .

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-as} ds \\ &= 0,5 \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega_0)t} ds + 0,5 \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega_0)t} ds \\ &= \frac{0,5}{s-j\omega_0} + \frac{0,5}{s+j\omega_0} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}; \quad \sigma > 0. \end{aligned}$$

Observe que este resultado quando particularizado para  $\sigma = 0$ , não é igual à transformada de Fourier de  $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$ . Logo, não é válido dizer que a transformada de Fourier é um caso particular da transformada de Laplace.

## 8.2.1 Propriedades

### 1. Linearidade

$$L\{x_1(t) + x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} + L\{x_2(t)\}$$

2.

$$L\{x(t)e^{-at}\} = X(s+a)$$

3.

$$L\{-tx(t)\} = \frac{dX(s)}{ds}$$

Portanto,

$$L\{(-1)^n t^n x(t)\} = \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

4. Se  $y(t) = dx(t)/dt$ , então  $Y(s) = sX(s) - x(0)$ .

5.  $y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow Y(s) = X(s)H(s)$

6.  $x(t - \tau) \longrightarrow X(s) e^{-s\tau}$

## 8.3 A transformada Z

Sabemos que a transformada de Fourier transforma uma seqüência  $x[n]$  em uma função contínua  $X(\Omega)$  periódica com período  $2\pi$  e que normalmente é representada no eixo  $\Omega$  das freqüências normalizadas, conforme ilustrado na Figura 8.1a.

Vamos agora tomar o plano complexo com a variável independente  $z$  conforme mostrado na Figura 8.1b.

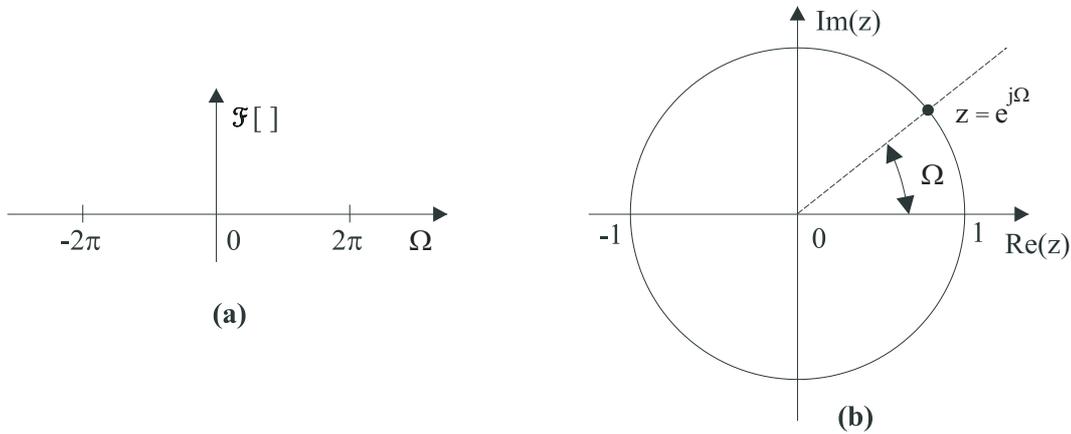


Figura 8.1: Espaços de representação de transformadas: a) Fourier no eixo linear  $\Omega$ ; b) Fourier na circunferência de raio unitário do plano complexo  $Z$ .

Neste plano destacamos a circunferência de raio unitário (CRU) e denominamos seus pontos de  $z = \exp(j\Omega)$ . Podemos interpretar esta circunferência como uma versão circular do eixo normalizado de freqüências para a representação da transformada de Fourier. Com isto, cada período  $2\pi$  é representado por uma volta na circunferência. Podemos então escrever

$$\mathfrak{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \Big|_{z = e^{j\Omega}}. \quad (8.2)$$

A expressão (8.2) permite interpretar a transformada de Fourier como um caso particular de uma transformada envolvendo a variável  $z$ , a qual toma valores em todo o plano complexo. Definimos então a transformada Z de uma seqüência  $x[n]$  como

$$X(z) = Z\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (8.3)$$

É evidente que podemos interpretar a transformada de Fourier como um caso particular da transformada Z, fazendo  $z = \exp(j\Omega)$ . Porém, podemos ainda estabelecer outra relação entre estas transformadas. Fazendo  $z = r \exp(j\Omega)$  na expressão (8.3), obtemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\Omega n} = \\ &= \mathfrak{F}\{x[n]r^{-n}\}, \end{aligned}$$

ou seja, a transformada de  $x[n]$  pode ser interpretada como a transformada de Fourier da seqüência  $x[n]$  multiplicada por  $r^{-n}$  onde  $r = |z|$ .

### 8.3.1 Regiões de convergência da transformada Z

A transformada Z de uma seqüência  $x[n]$  é definida apenas para os valores de  $z$  tais que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty,$$

ou seja, onde

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}e^{-j\Omega n}| = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Dizemos então que a transformada existe nos pontos  $z$  onde a série  $x[n]z^{-n}$  converge de forma uniforme. Os pontos onde ocorre a convergência definem a Região de Convergência (RC) da transformada.

Como a região de convergência depende apenas de  $r = |z|$ , se existe a convergência para  $z = z_1$ , então haverá a convergência para todos os pontos  $z$  tais que  $|z| = r$ , ou seja, haverá a convergência numa circunferência de raio  $r$  centrada na origem do plano Z. Como, por definição, não pode haver pontos de divergência no interior de uma região de convergência, podemos afirmar que as regiões de convergência são delimitadas por circunferências, ou seja, são sempre o exterior ou o interior de uma circunferência, ou ainda, um anel definido por duas circunferências. A Figura 8.2 ilustra estas situações.

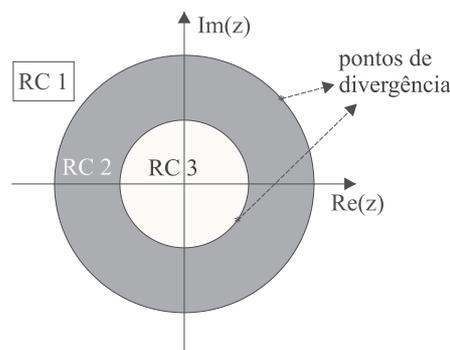


Figura 8.2: Exemplos de regiões de convergência.

Como decorrência da definição da transformada Z, podemos ainda extrair duas outras propriedades.

Sabemos que a transformada de Fourier de uma seqüência é igual à transformada Z desta seqüência calculada na CRU. Por outro lado, a transformada Z só existe na região de convergência correspondente. Logo:

A transformada de Fourier de uma seqüência existe se e somente se a região de convergência da transformada Z correspondente contiver a CRU

A série de potências na definição da transformada é uma série de Laurent, a qual apresenta uma série de propriedades importantes. Uma delas é que a função resultante  $X(z)$  é analítica, ou seja, é contínua e possui todas derivadas também contínuas. Portanto, como decorrência desta propriedade, a transformada de Fourier  $X(\Omega)$  de uma seqüência, se existir, é contínua com derivada contínuas.

Vamos agora analisar alguns exemplos de cálculo da transformada Z:

### Exemplo 7.3

Seja  $x[n] = \cos(n\Omega_0)$ ,  $-\infty < n < \infty$ .

Não existe a transformada Z desta seqüência pois nenhum valor de  $r$  em (8.4) assegura a convergência uniforme da série associada. Se tomarmos  $r \leq 1$ , a soma divergirá para  $n \rightarrow \infty$ . Da mesma forma, se  $r > 1$  a soma divergirá para  $n \rightarrow -\infty$ . Logo, não existe a transformada de seqüências senoidais. Pelo mesmo motivo não existe a transformada da seqüência exponencial complexa.

### Exemplo 7.4

Seja  $x[n] = u[n]$ .

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}, \end{aligned}$$

a qual é uma soma de infinitos termos de uma progressão geométrica. Lembrando que tal soma converge somente quando a razão tem valor absoluto inferior a 1, isto é, quando  $|z^{-1}| < 1$ , podemos escrever:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}; \quad |z| > 1, \quad (8.5)$$

ou

$$X(z) = \frac{z}{z - 1}; \quad |z| > 1. \quad (8.6)$$

Podemos notar que  $X(z)$  tem um zero em  $z = 0$  e um pólo em  $z = 1$ , conforme ilustrado na Figura 8.3. Também, a região de convergência é o exterior da CRU. Assim, não existe a transformada de Fourier de  $u[n]$ .

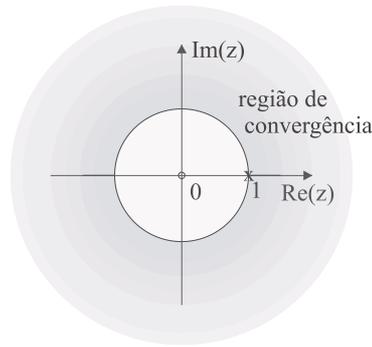


Figura 8.3: Pólos, zeros e região de convergência para  $X(z) = z/(z-1)$ ;  $|z| > 1$ ; “0”  $\rightarrow$  zero; “x”  $\rightarrow$  pólo.

As transformadas mais importantes para o processamento digital de sinais são aquelas descritas pela relação entre polinômios, ou seja, descritas por funções racionais:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}; P(z) \text{ e } Q(z) \text{ polinômios em } z.$$

Tais funções estão associadas a sistemas lineares invariantes com o deslocamento descritos por equações a diferenças lineares e com coeficientes constantes.

As raízes de  $P(z)$  e  $Q(z)$  são os zeros e os pólos, respectivamente, da transformada. Sabemos que a série associada à transformada Z não converge nos pólos. Logo, a região de convergência não contém pólos e, na verdade, é delimitada pelos pólos.

### Exemplo 7.5

Seja  $x[n] = a^n u[n]$ ;  $|a| = \text{constante}$ .

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}, \end{aligned}$$

de onde resulta, após somarmos os termos da progressão geométrica,

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ para } |z| > |a|. \quad (8.7)$$

Neste caso temos um zero em  $z = 0$  e um pólo em  $z = a$ . A região de convergência é o exterior da circunferência de raio  $|a|$ .

Podemos perceber que a situação do Exemplo 4.2 é um caso particular deste, quando fazemos  $a = 1$ . Dependendo do valor de  $a$ , poderemos calcular a transformada de Fourier da seqüência  $x[n] = a^n u[n]$ . Esta transformada existirá se a região de convergência de  $X(z)$

contiver a CRU. Assim, a transformada de Fourier existirá para  $|a| < 1$  e será descrita como

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} ; \quad |a| < 1.$$


---

### Exemplo 7.6

Seja agora  $x[n] = -a^n u[-n - 1]$ ,  $|a| = \text{constante}$ .

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}, \end{aligned}$$

de onde obtemos, após a soma dos termos da progressão geométrica,

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ para } |z| < |a|. \quad (8.8)$$


---

Comparando as expressões (8.7) e (8.8), podemos perceber que a expressão algébrica para  $X(z)$  é a mesma nos dois casos e que as transformadas se diferenciam apenas quanto às regiões de convergência. Os Exemplos 4.3 e 4.4 são clássicos pela importância das seqüências envolvidas e também por evidenciar a importância da definição e explicitação da região de convergência de uma transformada Z.

---

### Exemplo 7.7

Sejam  $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  e  $x_2[n] = \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n]$ .

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \text{ para } |z| > \frac{1}{2},$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \text{ para } |z| > \left|\frac{-1}{3}\right|.$$

Seja agora  $y[n] = x_1[n] + x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n]$ .

Como a transformada Z é linear em termos da seqüência a ser transformada, temos

$$\begin{aligned} Y(z) &= X_1(z) + X_2(z) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \text{ para } |z| > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Observe que a região de convergência é a interseção entre as regiões originais, uma vez que deve atender simultaneamente às duas transformadas. Assim, ela é determinada pelo pólo de maior raio. A Figura 8.4 ilustra as posições dos pólos e a região resultante. Mostra também que existem duas outras regiões de convergência possíveis: uma formada pelo anel delimitado pelas circunferências que passam pelos pólos e outra no interior da circunferência pelo pólo em  $z = -1/3$ . Estas regiões alternativas estão associadas a seqüências distintas daquela  $y[n]$  antes obtida. Iniciando pelo anel, podemos observar que esta região é formada pela interseção de uma região  $|z| > 1/3$  com outra  $|z| < 1/2$ . Assim, associada a  $|z| > -1/3$  temos a seqüência  $x_2[n]$ , enquanto que associada a  $|z| < 1/2$  temos, segundo o Exemplo 4.4, a seqüência  $x_3[n] = -(1/2)^n u[-n - 1]$ . Logo, a seqüência resultante associada ao anel será

$$y_2[n] = -(1/2)^n u[-n - 1] + (-1/3)^n u[n],$$

com transformada

$$Y_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \text{ para } \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}.$$

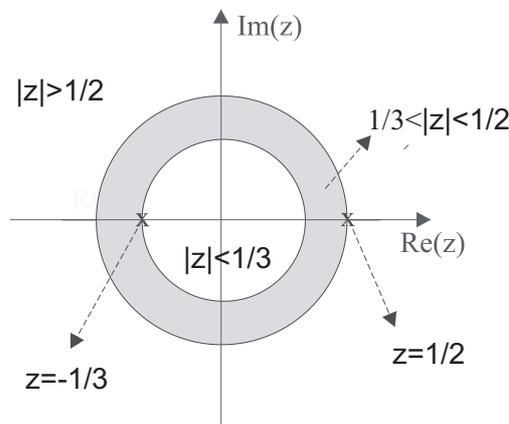


Figura 8.4: Regiões de convergência delimitadas pelos pólos em  $z = 1/2$  e  $z = -1/3$ .

Para a última alternativa temos a interseção das regiões  $|z| < 1/2$  com  $|z| < 1/3$ , as quais estão associadas às seqüências

$$x_4[n] = -(-1/3)^n u[-n - 1]$$

e

$$x_3[n] = -(1/2)^n u[-n - 1],$$

respectivamente. Assim, a seqüência resultante será

$$y_3[n] = -(1/2)^n u[-n - 1] - (-1/3)^n u[-n - 1],$$

com transformada

$$Y_3(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \text{ para } |z| < \frac{1}{3}.$$

Concluimos que uma dada função racional no plano Z pode ser a transformada Z de várias seqüências distintas, uma para cada possível região de convergência, onde estas possibilidades são definidas pelos pólos associados à função racional. Esta conclusão estende o conceito estabelecido no Exemplo 4.4, evidenciando a importância da definição da região de convergência associada a uma dada transformada no plano Z.

### Exemplo 7.8

Vamos agora considerar uma seqüência com comprimento finito  $x[n] = a^n r_N[n]$ , com  $|a| =$  um número finito. Sua transformada é dada por

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} \\ &= \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}}, \end{aligned}$$

de onde obtemos finalmente

$$X(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \text{ para } z \neq 0.$$

A região de convergência associada a esta transformada é todo o plano exceto  $z = 0$ , uma vez que  $x[n]$  é uma seqüência de comprimento finito cujas amostras se localizam em  $n \geq 0$ , isto é, é uma seqüência causal. Assim, a transformada Z envolve apenas um número finito de potências negativas de  $z$ , convergindo, portanto, para qualquer valor de  $z$  diferente de zero.

Vamos agora calcular os pólos e zeros de  $X(z)$ . Temos um pólo em  $z = a$  e  $(N - 1)$  pólos em  $z = 0$ . Por outro lado, os zeros são dados por

$$z^N = a^N,$$

que podemos escrever como

$$z^N = a^N e^{j2k\pi}, \quad k = \text{inteiro}.$$

Supondo que  $a = |a| \exp(j\theta)$ , podemos calcular os zeros

$$z_k = |a| \exp[j(\theta + 2k\pi/N)], \quad 0 \leq k \leq N - 1,$$

onde os valores de  $k$  foram restringidos de modo a contarmos apenas as soluções distintas. A Figura 8.5 ilustra estas soluções para o caso em que  $N = 4$  e  $\theta = \pi/6$ .

Os zeros se situam sobre uma circunferência de raio  $|a|$  e estão uniformemente distribuídos. Também, o zero definido por  $k = 0$ ,  $z_0 = a$ , coincide com o pólo na mesma posição. Assim, a transformada apresenta apenas um pólo efetivo com multiplicidade  $(N - 1)$  na origem do plano Z. Logo, a região de convergência pode ser todo o plano Z com exceção de  $z = 0$ .

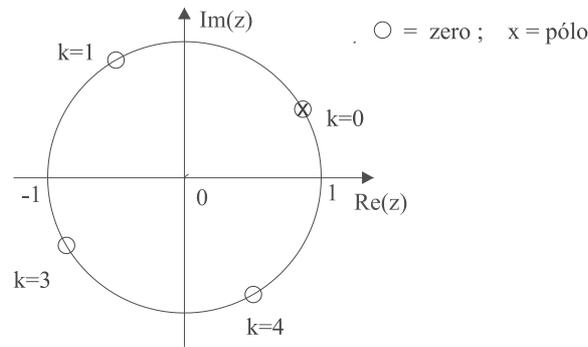


Figura 8.5: Zeros e pólos para a seqüência do Exemplo 4.6.

## 8.4 Propriedades da região de convergência

Apresentamos aqui um resumo das propriedades da região de convergência já enunciadas na seção anterior e algumas propriedades adicionais.

- 1- A RC é um anel ou um disco com centro na origem do plano Z.
- 2- A RC não contém pólos. É delimitada pelos pólos da transformada correspondente.
- 3- A transformada de Fourier de  $x[n]$  existe se e somente se a região de convergência de  $X(z)$  inclui a CRU.
- 4- Se  $x[n]$  tem duração finita então a RC é todo o plano Z com exceção de  $z = 0$  e/ou  $z \rightarrow \infty$ . Seja

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} ; N_1 \text{ e } N_2 \text{ finitos.}$$

Se  $N_1 < 0$ , não há convergência para  $z \rightarrow \infty$ , pois teremos potências positivas de  $z$  na série que define  $X(z)$ . Por outro lado, se  $N_2 > 0$ , não há convergência para  $z = 0$  pois teremos potências negativas de  $z$ .

5- Se a RC de  $X(z)$  é o exterior de uma circunferência, então  $x[n]$  é uma seqüência à direita, isto é,  $x[n] = 0$  para  $n < N_1$ ,  $N_1$  finito ( $N_1 < 0$  exclui a condição  $z \rightarrow \infty$ ).

6- Se a RC de  $X(z)$  é o interior de uma circunferência, então  $x[n]$  é uma seqüência à esquerda, isto é,  $x[n] = 0$  para  $n > N_2$ ,  $N_2$  finito ( $N_2 > 0$  exclui a condição  $z = 0$ ).

7- Se a RC de  $X(z)$  for um anel, então  $x[n]$  é uma seqüência bilateral, isto é, se estende indefinidamente em ambas as direções do eixo  $n$ .

## 8.5 Transformada Z inversa

Vamos mostrar que a expressão geral da transformada inversa é

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1}dz, \quad (8.9)$$

onde a integral é realizada sobre um contorno  $c$  fechado, anti-horário e ao redor da origem do plano  $z$ .

Para atingir este resultado, da teoria de funções complexas temos:

$$\oint_c z^{-k} dz = \begin{cases} 0; & k \neq 1 \\ 2\pi j; & k = 1, \end{cases}$$

onde  $k$  é um inteiro e  $c$  é um contorno fechado, anti-horário ao redor da origem do plano  $z$ . Este resultado é obtido fazendo  $c = r \exp(j\theta)$ ,  $r = \text{constante}$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Com isto, teremos no contorno  $c$ ,

$$\begin{aligned} z &= r e^{j\theta}, \\ dz &= j r e^{j\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \oint_c z^{-k} dz &= \int_0^{2\pi} r^{-k} e^{-jk\theta} j r e^{j\theta} d\theta \\ &= r^{-k+1} j \int_0^{2\pi} e^{-j(k-1)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 0; & k \neq 1 \\ 2\pi j; & k = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos agora aplicar este resultado no cálculo da seguinte integral

$$\oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

com o contorno  $c$  contido na região de convergência de  $X(z)$ . Usando a definição da transformada Z para substituir  $X(z)$  teremos

$$\begin{aligned} \oint_c X(z) z^{n-1} dz &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \oint_c z^{-(k-n+1)} dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \begin{cases} 0; & k \neq n \\ 2\pi j; & k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a expressão (8.9) desejada.

Escolhendo o contorno  $c$  como a CRU teremos  $z = \exp(j\Omega)$  e a expressão em (8.9) dá lugar à expressão da transformada inversa de Fourier.

Embora a expressão (8.9) permita obter a transformada inversa, em geral sua utilização não é simples. Entretanto, existem vários métodos alternativos que simplificam esta tarefa. Vamos apresentar os mais importantes para o processamento digital de sinais.

### 1- Métodos dos resíduos

Este é um método de cálculo da transformada através da expressão (8.9) baseado no conceito de resíduos de uma função racional complexa em seus pólos. Embora não se enquadre na categoria das alternativas mais simples, será apresentado para uso eventual.

Da teoria de funções racionais complexas, sabemos que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1}dz = \sum_i \text{resíduos de } X(z)z^{n-1} \text{ nos pólos } z_i \text{ situados no interior de } c,$$

onde

$$\text{resíduo de } X(z)z^{n-1} \text{ em } z_i \text{ de ordem } N = \left. \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^N \Psi(z)}{dz^{N-1}} \right|_{z=z_i}$$

e

$$\Psi(z) = X(z)z^{n-1}(z - z_i)^N,$$

## 2- Método da inspeção

Consiste em usar pares transformados conhecidos.

### Exemplo 7.9

Sabemos que

$$\begin{aligned} a^n u[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ para } |z| > |a|, \\ -a^n u[-n - 1] &\longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ para } |z| < |a|. \end{aligned}$$

Com isto podemos deduzir por inspeção

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}, |z| > 0,5 \longleftrightarrow x[n] = (0,5)^n u[n].$$

## 3- Expansão em frações parciais e inspeção

Este se aplica ao cálculo da anti-transformada de funções racionais. Após a expansão em frações parciais, aplicamos o método da inspeção.

Seja

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \\ &= \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \end{aligned}$$

onde  $c_k$  e  $d_k$  são, respectivamente, os zeros e os pólos não nulos de  $X(z)$ .

A expansão de  $X(z)$  em frações parciais segue as regras a seguir.

a) para  $M < N$  e todos os pólos de primeira ordem:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad \text{onde } A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z = d_k} ;$$

b) para  $M \geq N$  e todos os pólos de primeira ordem:

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad \text{onde } A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z = d_k} ;$$

e o primeira somatória é obtida através da divisão polinomial entre o numerador e o denominador de  $X(z)$ ;

c) para  $M \geq N$  e com pólos de ordem maior que a unidade:

Supondo que o pólo em  $z = d_i$  é de ordem  $P$  temos

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^P \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m},$$

onde

$$C_m = \frac{1}{(P-m)! (-d_i)^{P-m}} \left\{ \frac{d^{P-m}}{dw^{P-m}} \left[ (1 - d_i w)^P X(w^{-1}) \right] \right\} \Big|_{w = d_i^{-1}} .$$

Note que em todos os casos são geradas parcelas que podem ser anti-transformadas pelo método da inspeção.

### Exemplo 7.10

Seja

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} ; |z| > 1,$$

a qual apresenta pólos simples em  $z = 0,5$  e  $z = 1$ .

Como  $M \geq N$ , devemos realizar a divisão entre o numerador e o denominador de  $X(z)$  até que o grau do numerador resultante seja inferior a  $N$ . Obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} &= 2 - \frac{1 - 5z^{-1}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} \\ &= 2 + \frac{A_1}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}. \end{aligned}$$

Expandindo o segundo termo da divisão em frações parciais resulta

$$A_1 = (1 - 0,5z^{-1}) \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - z^{-1})} \Bigg|_{z=0,5} = -9,$$

$$A_2 = (1 - z^{-1}) \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - z^{-1})} \Bigg|_{z=1} = 8.$$

Portanto,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}} ; |z| > 1,$$

o que permite escrever

$$x[n] = 2\delta[n] - 9(0,5)^n u[n] + 8u[n].$$


---

#### 4- Expansão em séries de potências

Este método faz uso da expressão que define a transformada Z para obter a anti-transformada por comparação entre termos. Para isto exige a expansão de  $X(z)$  em série de potências. Assim, lembrando que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$= \dots x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots ,$$

ao expandirmos  $X(z)$  em série de potências de  $z$ , por comparação termo a termo podemos identificar os valores das amostras  $x[n]$ .

---

#### Exemplo 7.11

Seja

$$X(z) = z^2(1 - 0,5z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - z^{-1}).$$

Desenvolvendo os produtos temos

$$X(z) = z^2 - 0,5z - 1 + 0,5z^{-1},$$

a qual nos permite escrever

$$x[n] = \delta[n + 2] - 0,5\delta[n + 1] - \delta[n] + 0,5\delta[n - 1].$$


---

Este método pode ainda ser aplicado para a obtenção da anti-transformada de algumas funções não-rationais.

### Exemplo 7.12

Seja

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}); \quad |z| > a.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \end{aligned}$$

temos

$$\ln(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} z^{-n}; \quad |z| > a,$$

a qual nos permite escrever

$$x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}; & n > 0 \\ 0; & n \leq 0 \end{cases}.$$

## 8.6 Propriedades da transformada Z

Vamos agora explicitar algumas propriedades da transformada Z. Verificaremos que várias delas são extensões de propriedades da transformada de Fourier.

Ao longo desta seção, usaremos o seguinte conjunto de seqüências e transformadas:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\longleftrightarrow X_1(z) \text{ com RC } R_{x_1}, \\ x_2[n] &\longleftrightarrow X_2(z) \text{ com RC } R_{x_2}. \end{aligned}$$

### Propriedade 1 - Linearidade

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$$

e a região de convergência resultante é pelo menos a interseção de  $R_{x_1}$  com  $R_{x_2}$  (pode ser maior se na soma aparecerem zeros que cancelem pólos).

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ax_1[n] + bx_2[n]\} z^{-n} &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z) \quad c.q.d. \end{aligned}$$


---

### Exemplo 7.13

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ para } |z| > |a|,$$

$$X_2(z) = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} \text{ para } |z| > |a|.$$

Portanto,

$$X_1(z) - X_2(z) = 1 ; \forall z.$$

No outro domínio, temos

$$x_1[n] = a^n u[n],$$

$$x_2[n] = a^n u[n - 1]$$

e, portanto,

$$x_1[n] - x_2[n] = \delta[n]. \quad (8.10)$$


---

### Propriedade 2 - Deslocamento no eixo $n$

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

e a região de convergência resultante é igual à região inicial exceto pela adição ou exclusão de  $z = 0$  e  $z \rightarrow \infty$ , provocadas pelo termo  $z^{-n_0}$ .

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0]z^{-n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-(k-n_0)} \\ &= z^{-n_0} X(z) \quad c.q.d. \end{aligned}$$

**Exemplo 7.14**

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(z) = 1 ; \forall z.$$

Então

$$\delta[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} ; \forall z, \text{ exceto } z = 0 \text{ se } n_0 > 0 \text{ ou exceto } z \rightarrow \infty \text{ se } n_0 < 0.$$

**Propriedade 3 - Multiplicação por exponencial**

$$a^n x[n] \longleftrightarrow X(z/a) ; \text{ RC} = |a| \text{ Rx}.$$

A região de convergência fica alterada pois, dado que  $X(z)$  existe em Rx tal que Rx:  $R_- < |z| < R_+$ , então  $X(z/a)$  existe em  $R_- < |z/a| < R_+$ , ou seja, existe em  $|a| R_- < |z| < |a| R_+$ .

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z/a)^{-n} \\ &= X(z/a) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

**Propriedade 4 - Diferenciação de  $X(z)$** 

$$nx[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

e a região de convergência é Rx, exceto pela adição ou exclusão de  $z = 0$  ou  $z \rightarrow \infty$ .

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\ \frac{dX(z)}{dz} &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{nx[n]\} z^{-n-1} \\ &= (-1/z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{nx[n]\} z^{-n}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$nx[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{c.q.d.} \quad (8.11)$$

**Propriedade 5 - Reversão no eixo  $n$** 

$$x[-n] \longleftrightarrow X(1/z) ; \text{ RC} = 1/R_x.$$

A região de convergência fica alterada pois  $X(1/z)$  existe em  $R_- < |1/z| < R_+$ .

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](z)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](1/z)^{-k} \\ &= X(1/z) \quad c.q.d. \end{aligned}$$

**Propriedade 6 - Convolução no eixo  $n$** 

$$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z)X_2(z).$$

RC será pelo menos a interseção das regiões de convergências

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} x_1[n] * x_2[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k]. \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x_1[n] * x_2[n]\} z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n} \\ &= X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} \\ &= X_1(z)X_2(z) \quad c.q.d. \end{aligned}$$

**Propriedade 7 - Produto no eixo  $n$** 

$$x_1[n] x_2[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv.$$

RC será pelo menos a interseção das regiões de convergências.

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n] z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v)v^{n-1}dv \right] x_2[n] z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n](z/v)^{-n} \right] v^{-1}dv = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv \quad c.q.d. \end{aligned}$$

**Propriedade 8 - Teorema do valor inicial**

Se  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ , então  $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ .

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \\ &= x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0] \quad c.q.d.$$

**Propriedade 9 - Teorema de Parseval**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2^*(1/v^*) v^{-1} dv. \quad (8.12)$$

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) v^{n-1} dv \right] x_2^*[n] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2^*[n] (1/v)^{-n} \right] v^{-1} dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] (1/v^*)^{-n} \right]^* v^{-1} dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2^*(1/v^*) v^{-1} dv \quad c.q.d. \end{aligned}$$

Este teorema generaliza o Teorema de Parseval do capítulo 2, o qual apresenta a energia de uma seqüência em termos do espectro correspondente. Observe que para  $x_2[n] = x_1[n]$  e  $z = \exp(j\Omega)$ , o Teorema de Parseval desta seção apresenta a mesma relação expressa no capítulo 2.

**Propriedade 10 - Pólos e zeros de funções racionais**

Seja  $X(z) = P(z)/Q(z)$ ;  $P(z)$  e  $Q(z)$  funções racionais e  $z_0$  um pólo (zero) de  $X(z)$ . Se  $x[n]$  é real então os pólos (zeros) de  $X(z)$  ocorrem em pares complexos conjugados.

*Demonstração:*

Se  $x[n]$  é real então os coeficientes do numerador e do denominador de  $X(z)$  são reais, uma vez que as amostras de  $x[n]$  são os coeficientes das potências de  $z^{-n}$  na expressão da transformada. Logo, os coeficientes dos polinômios  $P(z)$  e  $Q(z)$  são função das amostras de  $x[n]$  e, portanto, são reais.

Se  $z_0$  é uma raiz de um polinômio  $P(z)$  em uma variável complexa  $z$  e com coeficientes reais  $c_n$ , então  $z_0^*$  também será uma raiz, pois se  $P(z_0) = 0$  então

$$\begin{aligned} P(z_0^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0^*)^{-n} \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0)^{-n} \right]^* \\ &= P^*(z_0) = 0 \quad c.q.d. \end{aligned}$$

Como consequência desta propriedade, é fácil verificar que se  $A_p$  é o coeficiente da fração parcial de  $X(z)$  com coeficientes reais, referente ao pólo  $z_p$ , então o coeficiente da fração parcial referente a  $z_p^*$  será  $A_p^*$ .

## 8.7 Exercícios

1. Determine a transformada  $Z$  e a região de convergência para cada uma das seguintes seqüências:

a)  $(\frac{1}{2})^n u[n]$ ; b)  $-(\frac{1}{2})^n u[-n - 1]$ ; c)  $(\frac{1}{2})^n u[-n]$ ; d)  $\delta[n]$ ; e)  $\delta[n - 1]$ ; f)  $\delta[n + 1]$ ; g)  $(\frac{1}{2})^n (u[n] - u[n - 10])$ .

2. Determine a transformada  $Z$ , a região de convergência e esboce o diagrama de pólos e zeros para cada uma das seguintes seqüências:

a)  $\alpha^{|n|}$ ; b)  $x[n] = u[n] - u[n - N]$ ; c)  $x[n] = \begin{cases} n; & 0 \leq n \leq N \\ 2N - n; & N + 1 \leq n \leq 2N \\ 0; & c.c. \end{cases}$ .

3. Considere uma transformada  $X(z)$  com os seguintes pólos:  $p_1 = 1/3$ ;  $p_2 = 2$ ;  $p_3 = 3$ ; e com o zero  $z_1 = -1$ .

a) Determine a região de convergência de  $X(z)$  para o caso em que existe a transformada de Fourier. Determine se a seqüência  $x[n]$  é à direita ou à esquerda ou bilateral.

b) Quantas seqüências bilaterais podem ser associadas aos pólos e zeros acima?

4. Determine a seqüência  $x[n]$  cuja transformada  $Z$  é  $X(z) = (1 + 2z)(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})$ .

5. Determine a transformada  $Z$  inversa para as funções a seguir e indique, em cada caso, se existe a transformada de Fourier.

a)  $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$ ,  $|z| > 1/2$ ;

b)  $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$ ,  $|z| < 1/2$ ;

c)  $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$ ,  $|z| > 1/2$ ;

d)  $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$ ,  $|z| > 1/2$ ;

e)  $X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}$ ,  $|z| > |1/a|$ .

6. A entrada de uma sistema LID causal é  $x[n] = u[-n - 1] + (\frac{1}{2})^n u[n]$ . A transformada  $Z$  da saída correspondente é

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}$$

a) Determine  $H(z)$  e indique a região de convergência.

b) Qual a região de convergência de  $Y(z)$  ?

7. Determine a região de convergência da transformada  $Z$  de cada uma das seqüências a seguir, sem calcular  $X(z)$ , mas apenas por inspeção. Determine se a transformada de Fourier converge em cada caso.

a)  $x[n] = \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] u[n - 10];$

b)  $x[n] = \begin{cases} 1; & -10 \leq n \leq 10 \\ 0; & c.c. \end{cases};$

c)  $x[n] = 2^n u[-n];$

8. Determine quais das transformadas abaixo poderia ser a transformada de uma seqüência à direita em  $n \geq 0$ . Você deve resolver apenas por inspeção e não calcular a transformada inversa.

a)  $X(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - 0,5z^{-1}};$

b)  $X(z) = \frac{(z - 1)^2}{z - 0,5};$

c)  $X(z) = \frac{(z - 1/4)^5}{(z - 0,5)^6};$

d)  $X(z) = \frac{(z - 1/4)^6}{(z - 0,5)^5};$

9. Calcule a transformada inversa à direita em  $n \geq 0$  de  $X(z) = 1 / (1 - \frac{1}{4}z^{-2})$ .

10. Considere um sistema LID com resposta ao impulso  $h[n] = a^n u[n]$  e entrada  $x[n] = u[n] - u[n - N]$ .

a) Obtenha a resposta  $y[n]$  calculando a convolução entre  $h[n]$  e  $x[n]$ .

b) Obtenha  $y[n]$  usando a transformada  $Z$ .

11. Calcule a transformada inversa para:

a)  $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}; \quad x[n] \text{ à direita};$

b)  $X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}; \quad \text{a CRU pertence à R.C.};$

c)  $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-3}}; \quad |z| > (3)^{-1/3};$

d)  $X(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1}}; \quad |z| > 0,5.$

e)  $X(z) = \frac{1 - z^{-2}}{(1 - 0,5z^{-1})^2}; \quad |z| > 0,5;$

---