Resolução da Prova 2 – EA721
Prof. Renato Lopes – 1o. semestre/2006

Questão 1

Para determinar qual o valor de p, vamos calcular o centro das assíntotas do lugar das raízes. Sendo a função de transferência $P(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)(s+p)}$, o centro das assíntotas é calculado como:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{zeros}}{n_p - n_z} \\ &= \frac{(0-1-p)-(-2)}{3-1} = \frac{1-p}{2} \end{aligned}$$

- Para $p = 10$, tem-se $\sigma = -4.5$
- Para $p = 16$, tem-se $\sigma = -7.5$

Observando as figuras do enunciado, nota-se que $\sigma = -4.5$ é referente a figura 1(b), e portanto $p = 10$ para esta figura. Já $\sigma = -7.5$ é referente a figura 1(a), e portanto $p = 16$ para esta figura.

Considere agora a figura 1(a), com os pólos em malha aberta em: $0, -1, -16$. Portanto, um ramo sai de cada uma desses pólos, correspondendo aos trechos b, a, g respectivamente. Os ramos que saem do pólo $s = 0$ e do pólo $s = -1$ se encontram na intersecção dos trechos a e b, e cada um destes migra para os trechos c e d. Enquanto isso, o terceiro pólo do sistema em malha fechada está no trecho g. Enquanto 2 pólos do sistema em malha fechada estão cada um nos trechos c e d, o outro continua no trecho g e não pode sair de lá. Isso porque os dois primeiros são complexos conjugados e o terceiro necessariamente é real.

Quando os dois pólos em c e d se encontram na intersecção dos trechos e e f, o terceiro pólo continua no trecho g e não pode sair de lá, pelo mesmo motivo anterior. Seguindo em frente, depois que os dois pólos em c e d se encontram na intersecção dos trechos e e f, um deles vai para o zero em $s = -2$ (no trecho e) e o outro vai para o trecho f. Nesse momento, os 3 pólos estão nos trechos e, f e g. Quando o pólo que está no trecho f se encontra com o pólo que está no trecho g, estes dois pólos se tornam complexos e cada um deles vai para um dos trechos h e i. E o outro pólo continua no trecho e.

Respondendo a pergunta da questão, quando o sistema em malha fechada tem um pólo no trecho f, os outros dois estão cada um deles nos trechos e e g.

Questão 2

A equação do sistema com controle é:

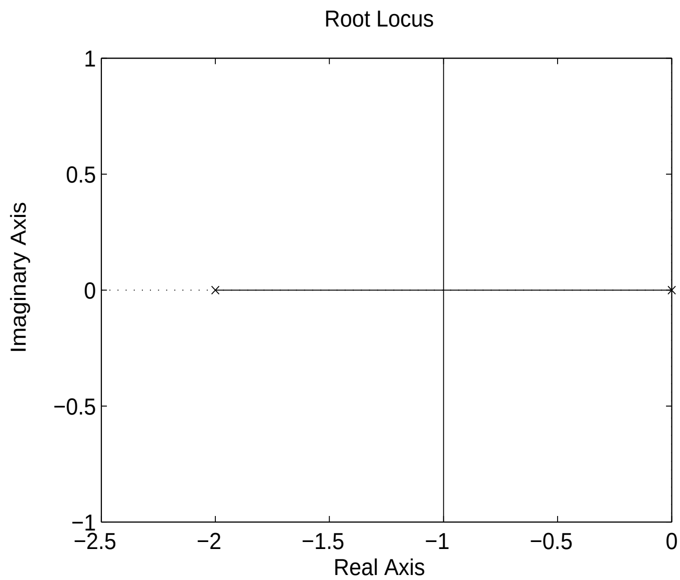
$$\begin{aligned} 1 + kP(s) &= 0 \\ 1 + k\frac{1}{s(s+2)} &= 0 \\ s^2 + 2s + k &= 0 \end{aligned}$$

Para que os pólos do sistema em malha fechada sejam $-1 \pm j$, estes pólos satisfazem a equação caraterística do sistema. Ou seja:

$$(-1 \pm j)^2 + 2(-1 \pm j) + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mp 2j - 2 \pm 2j + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Portanto, o controlador é $k = 2$.

Alternativamente, pode-se calcular o valor de k pelo lugar das raízes, mostrado na figura a seguir.



Utilizando o lugar das raízes acima, calcula-se geometricamente que os comprimentos dos vetores que ligam os pólos do sistema em malha aberta ($p_1 = 0$ e $p_2 = -2$) ao lugar das raízes em $s_1 = -1 + j$ fornecem um valor de k como sendo:

$$\begin{aligned} k &= |s_1 - p_1| \cdot |s_1 - p_2| \\ &= |-1 + j - 0| \cdot |-1 + j - (-2)| \\ &= 2 \end{aligned}$$

Questão 3

Observando o diagrama de Bode de magnitude, chega-se a 0dB em uma freqüência igual a $\omega_c = 4$ rad/s. Esta freqüência, quando projetada no diagrama de Bode de fase, resulta em $\phi = -150°$. Portanto, a margem de fase é MF $= 180° - 150° = 30° = \frac{\pi}{6}$.

Agora, um atraso do tipo $G(s) = e^{-sT}$ é introduzido no sistema. A fase do sistema será então adicionada de:

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega T} = -\omega T$$

Logo, a fase em $\omega_c = 4$ rad/s será alterada de $\angle G(j4) = -4T$, o que significa que a fase será atrasada de $4T$. Para que o sistema se torne instável, o atraso na fase deve ser maior que a margem de fase. Matematicamente:

$$\begin{aligned} 4T &> MF \\ 4T &> \frac{\pi}{6} \\ T &> \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

Portanto, o menor valor de T que leva o sistema à instabilidade é $T = \frac{\pi}{24}$ seg.

Questão 4

Para $\alpha = 0.25$, o ganho máximo de fase que o compensador avanço pode fornecer é:

$$\sin\phi_c \;=\; \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \;=\; \frac{1-0.25}{1+0.25} \;=\; 0.6$$

Portanto, $\phi_c = \sin^{-1}(0.6) \approx 37^\circ$ é o ganho máximo de fase do compensador avanço. Para este caso, a fase do sistema será aumentada de 37°, resultando em $\phi = -150^\circ + 37^\circ = -113^\circ$. Conseqüentemente, a margem de fase equivalente será $\text{MF} = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$.

Com a estrutura de avanço de fase inserida no sistema, a magnitude será aumentada de:

$$20\log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \;=\; 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{0.25}}\right) \;=\; 20\log\left(\frac{1}{0.5}\right) \;=\; 20\log(2) \;=\; 6\text{dB}$$

Logo, a magnitude do sistema compensado será aumentada de 6dB. Conseqüentemente, a freqüência de crossover será aquela para o qual a magnitude do sistema sem compensação era igual a -6dB. Observando o diagrama de Bode, esta freqüência é $\omega_c = 6$ rad/s, correspondendo a uma fase de $\phi = -170^\circ$.

Para a freqüência de crossover $\omega_c = 6$ rad/s, o valor de T é:

$$\omega_c = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{6\sqrt{0.25}} = 0.333 \text{ s}$$

Como a fase do sistema compensado é $\phi = -170^\circ$, a margem de fase resultante é $\text{MF} = (180^\circ - 170^\circ) + 37^\circ = 47^\circ$.

Questão 5

Queremos uma margem de fase de MF $= 42°$. Para facilitar a leitura de valores no diagrama de Bode, escolhemos uma margem de segurança para o compensador de atraso igual a $8°$, dando uma margem de fase de MF $= 50°$. Neste caso, a fase do sistema deve ser $\phi = 50° - 180° = -130°$.

Pelo diagrama de Bode, a fase de $\phi = -130°$ é atingida para uma freqüência de $\omega_c = 2.5$ rad/s. Esta deve ser a nova freqüência de crossover, e observa-se pelo gráfico que a atenuação necessária para isso acontecer é de 6dB. Deve-se ter então:

$$20\log\left(\frac{1}{\beta}\right) \;=\; -6 \qquad \Rightarrow \qquad -20\log(\beta) \;=\; -6 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 2$$

Alocando o zero do compensador uma década abaixo da freqüência de crossover:

$$\omega_z \;=\; \frac{\omega_c}{10} \;=\; \frac{2.5}{10} \;=\; 0.25 \text{ rad/s}$$

Então, o valor de T pode ser calculado a partir de:

$$T = \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ s}$$

Questão 6

Para o circuito em questão, a lei de Kirchoff das malhas fornece:

$$v(t) = Ri_l(t) + v_c(t) + L\frac{di_l(t)}{dt} \tag{1}$$

E como a corrente no capacitor é igual a corrente no indutor, tem-se também que:

$$i_l(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \tag{2}$$

Fazendo os estados $x_1(t) = i_l(t)$ e $x_2(t) = v_c(t)$, a equação (1) fica:

$$v(t) = Rx_1(t) + x_2(t) + L\dot{x}_1(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}v(t) \tag{3}$$

A equação (2) fica:

$$x_1(t) = C\dot{x}_2(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t) \tag{4}$$

E a equação da observação (tensão no resistor) é:

$$y(t) = Ri_l(t) = Rx_1(t) \tag{5}$$

Juntando as equações (3), (4) e (5), resulta que as equações de estado são:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]v(t) \end{aligned}$$