Resolução da Prova 3 – EA721
Prof. Renato Lopes – 1o. semestre/2006

Questão 1

A planta tem as seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Os pólos desta planta são calculados como as raízes da equação $\det(\lambda I - A) = 0$. Então:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= 0 \\ (\lambda + 1)^2 - 1 &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda &= 0 \\ \lambda_1 = 0 \quad &\text{e} \quad \lambda_2 = -2 \end{aligned}$$

Deseja-se um controlador com realimentação de estados que resulte em um sistema com pólos em $-3 \pm 2j$. Para este caso, o polinômio característico deve ser:

$$p_c(s) \;=\; \Big(s - (-3 - 2j)\Big) \cdot \Big(s - (-3 + 2j)\Big) \;=\; s^2 + 6s + 13$$

Então, tem-se:

$$p_c(A) \;=\; A^2 + 6A + 13I \;=\; \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade é:

$$\mathcal{C} \;=\; \left[\; B \mid AB \; \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E então o controlador pode ser calculado como:

$$
\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} p_c(A) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

A entrada da planta u pode ser escrita em função dos estados como:

$$
\begin{aligned}
u &= -K\mathbf{x} \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= -4x_1 - 9x_2
\end{aligned}
$$

Não é necessário usar um estimador de estados, já que todos os estados são medidos diretamente na saída.

Questão 2

A planta tem função de transferência $P(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+1}$. A forma canônica controlável tem como equações de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Deseja-se um controlador com realimentação de estados que resulte em um sistema com pólos em $-3 \pm 2j$. Para este caso, o polinômio característico deve ser:

$$p_c(s) = \Big(s - (-3-2j)\Big) \cdot \Big(s - (-3+2j)\Big) = s^2 + 6s + 13$$

O controlador $K = [k_1 \quad k_2]$ é então calculado como:

$$\begin{aligned} k_1 &= q_0 - a_0 = 13 - 1 = 12 \\ k_2 &= q_1 - a_1 = 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Logo tem-se $K = [12 \quad 4]$.

Não podemos utilizar as equações de estado na forma observável. Deseja-se um estimador de estados que resulte em um sistema com pólos em $-5 \pm 2j$. Para este caso, o polinômio característico deve ser:

$$p_o(s) = \Big(s - (-5-2j)\Big) \cdot \Big(s - (-5+2j)\Big) = s^2 + 10s + 29$$

Então, tem-se:

$$p_o(A) = A^2 + 10A + 29I = \begin{bmatrix} 28 & 8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

A matriz de observabilidade é:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E então o controlador pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} L &= p_o(A)\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A função de transferência do controlador resultante fica:

$$G(s) \;=\; -K(sI - A + LC + BK)^{-1}L$$

$$G(s) \;=\; -\begin{bmatrix} 12 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$G(s) \;=\; -\begin{bmatrix} 12 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+8 & -1 \\ 25 & s+6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{-16(9s+19)}{s^2+14s+73}$$

Questão 3

Temos um sistema com equações de estado $\dot{x} = Ax + bu$. Suponha que exista um vetor $q \neq \mathbf{0}$ tal que $qA = \lambda q$ e $qb = 0$. Então pode-se escrever o seguinte:

$$\begin{array}{rcl} qAb & = & \lambda qb \;=\; 0 \\ qA^2b & = & (qA)(Ab) \;=\; (\lambda q)(Ab) \;=\; \lambda(qA)b \;=\; \lambda^2 qb \;=\; 0 \\ qA^3b & = & (qA)(A^2b) \;=\; (\lambda q)(A^2b) \;=\; \lambda(qA)Ab \;=\; \lambda^2 qAb \;=\; \lambda^3 qb \;=\; 0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Logo, pode-se montar a seguinte matriz:

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} qb & qAb & qA^2b & \cdots & qA^{n-1}b \end{bmatrix} & = & \mathbf{0} \\ q\begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} & = & \mathbf{0} \\ q\mathcal{C} & = & \mathbf{0} \end{array}$$

A existência do vetor q implica que a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ não é inversível. Conclui-se então que o sistema não é controlável.

Questão 4

Deseja-se determinar a resposta $\mathbf{x}(k)$ de um sistema com seguintes equações de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \qquad\qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para um sistema descrito por $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k)$, vamos aplicar a transformada Z. Tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\mathbf{x}(k+1)] &= \mathcal{Z}[A\mathbf{x}(k)] \\ zX(z) - z\mathbf{x}(0) &= AX(z) \\ (zI - A)X(z) &= z\mathbf{x}(0) \\ X(z) &= (zI - A)^{-1} z\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} z-2 & -3 \\ 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} z$$

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)} \begin{bmatrix} z+1 & 3 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z^2+7z}{(z-2)(z+1)} \\ \\ \dfrac{2z}{z+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3z}{z-2} - \dfrac{2z}{z+1} \\ \\ \dfrac{2z}{z+1} \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformada inversa à $X(z)$, obtém-se:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \begin{bmatrix} 3 \cdot (2)^k - 2 \cdot (-1)^k \\ \\ 2 \cdot (-1)^k \end{bmatrix}$$

Questão 5

O controlador com função de transferência $C(s) = \dfrac{1}{s+1}$ tem pólo em $s = -1$. Tem-se: $e^{sT} = e^{-T} = e^{-\ln 2} = 0.5$

A função de transferência do controlador discreto é então: $C(z) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{z+1}{z-0.5}\right)$

A função de transferência da planta discreta é:

$$\begin{aligned} P(z) &= (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right\} \\ &= (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]\right\} \\ &= (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}[kT] \\ &= (1 - z^{-1}) \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \frac{T}{z-1} \end{aligned}$$

Para obter os pólos do sistema em malha fechada, primeiramente precisamos da equação característica $1 + C(z)P(z) = 0$. Tem-se:

$$1 + \frac{1}{4}\left(\frac{z+1}{z-0.5}\right) \cdot \left(\frac{T}{z-1}\right) = 0$$

$$4z^2 + (T-6)z + (T+2) = 0$$

Sendo $T = \ln 2$, as raízes da equação aicma são: $z = 0.66336 \pm 0.48295j$

Os pólos contínuos que correspondem aos pólos discretos acima são calculados como:

$$s = \frac{\ln(z)}{T} = \frac{\ln(0.66336 \pm 0.48295j)}{\ln 2} = -0.28535 \pm 0.90789j$$

Para melhorar o fator de amortecimento, uma solução é diminuir o período de amostragem T, o que equivale a aumentar o valor de $\frac{1}{T}$. Outra possível solução seria utilizar outros projetos de controladores $C(z)$.