Gabarito da prova 1 (EA721) – 10. Semestre de 2006
Prof. Renato Lopes

Questão 1:
A função de transferência de y para r, com $w = 0$, é:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \\
&= \frac{\frac{k_c}{2s+1}}{1 + \frac{k_c}{2s+1}} \\
&= \frac{k_c}{2s + k_c + 1} \\
&= \frac{\frac{k_c}{k_c+1}}{\frac{2s}{k_c+1} + 1}
\end{aligned}$$

A constante de tempo do sistema é $\tau = \frac{2}{k_c+1}$. Para que ele atinga o regime permanente (cinco constantes de tempo) em 1 segundo, deve-se ter:

$$\begin{aligned}
5\tau &< 1 \\
5\left(\frac{2}{k_c + 1}\right) &< 1 \\
k_c + 1 &> 10 \\
k_c &> 9
\end{aligned}$$

Questão 2:
Para uma entrada $r(t) = \sin(2t)$, não podemos aplicar o Teorema do Valor Final, porque todos os sinais serão senoidais, e conseqüentemente não faz sentido falar de limite quando o tempo tende a infinito. Vamos então calcular a função de transferência de y para r:

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \\
&= \frac{k_c\left(\dfrac{s+1}{s^2+4}\right)}{1 + k_c\left(\dfrac{s+1}{s^2+4}\right)} \\
&= \frac{k_c(s+1)}{s^2 + k_c s + 4 + k_c}
\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
T(j2) &= \frac{k_c(j2+1)}{(j2)^2 + k_c(j2) + 4 + k_c} \\
&= \frac{k_c(j2+1)}{-4 + j2k_c + 4 + k_c} \\
&= \frac{k_c(j2+1)}{j2k_c + k_c} = 1
\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $T(j2) = 1$, o que implica que, em regime, dada uma entrada $r(t) = \sin(2t)$,

$$\begin{aligned}
y(t) &= |T(j2)| \sin(2t + \angle T(j2)) \\
&= \sin(2t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Assim, em regime, $y(t) = r(t)$. Portanto, o erro em regime permanente é zero para uma entrada do tipo $r(t) = \sin(2t)$.

Para uma entrada do tipo degrau unitário, ou seja $R(s) = \frac{1}{s}$, a expressão para o erro ($e = r - y$) é:

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{R(s)}{1 + C(s)P(s)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{s}}{1 + \dfrac{k_c(s+1)}{s^2+4}} \\
&= \frac{s^2+4}{s(s^2 + k_c s + k_c + 4)}
\end{aligned}$$

Em regime permanente:

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \lim_{s\to 0} [sE(s)] \\
&= \lim_{s\to 0} \left[s \cdot \frac{s^2+4}{s(s^2 + k_c s + k_c + 4)} \right] \\
&= \lim_{s\to 0} \left[\frac{s^2+4}{s^2 + k_c s + k_c + 4} \right] \\
&= \frac{4}{k_c + 4}
\end{aligned}$$

Questão 3:
Para $r = 0$ e sendo w um degrau unitário, a saída y é:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{W(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^3+4}}{1 + \frac{k_c}{s^3+4}} \\ &= \frac{1}{s(s^3 + k_c + 4)} \end{aligned}$$

Em regime permanente:

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \to 0} [sY(s)] \\ &= \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{s(s^3 + k_c + 4)} \right] \\ &= \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{s^3 + k_c + 4} \right] \\ &= \frac{1}{k_c + 4} \end{aligned}$$

Deve-se ter $y_{ss} = 0.001$, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_c + 4} &= 0.001 \\ k_c &= 996 \end{aligned}$$

Questão 4:
Com $w = 0$ e $R(s) = \frac{1}{s}$, a expressão para a saída y é:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}\ R(s) \\
&= \left(\frac{\dfrac{0.9R}{2s^2 + 3s + 1}}{1 + \dfrac{0.9R}{2s^2 + 3s + 1}} \right) \frac{1}{s} \\
&= \frac{0.9R}{s(2s^2 + 3s + 1 + 0.9R)}
\end{aligned}
$$

Em regime permanente:

$$
\begin{aligned}
y_{ss} &= \lim_{s \to 0} [sY(s)] \\
&= \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{0.9R}{s(2s^2 + 3s + 1 + 0.9R)} \right] \\
&= \lim_{s \to 0} \left[\frac{0.9R}{2s^2 + 3s + 1 + 0.9R} \right] \\
&= \frac{0.9R}{1 + 0.9R}
\end{aligned}
$$

Para $R = 10\Omega$, temos $y_{ss} = 0.9$.

A sensibilidade da saída em regime permanente y_{ss} em relação ao parâmetro R é:

$$
\begin{aligned}
S_R^{y_{ss}} &= \frac{\partial y_{ss}}{\partial R} \cdot \frac{R}{y_{ss}} \\
&= \left[\frac{0.9(1 + 0.9R) - 0.9 \cdot 0.9R}{(1 + 0.9R)^2} \right] \left[\frac{R}{\frac{0.9R}{1+0.9R}} \right] \\
&= \frac{0.9}{(1 + 0.9R)^2} \frac{1 + 0.9R}{0.9} \\
&= \frac{1}{1 + 0.9R}
\end{aligned}
$$

Para $R = 10\Omega$, temos $S_R^{y_{ss}} = 1/10$.

Como o valor da resistência está numa faixa de 10% em torno de seu valor nominal, y_{ss} vai sofrer uma variação percentual de aproximadamente $S_R^{y_{ss}} \times 10\% = 1\%$. Assim, teremos

$$y_{\min} = y_{ss} - y_{ss} \times 1\% = 8.91$$

$$y_{\max} = y_{ss} + y_{ss} \times 1\% = 9.09$$

Questão 5:
Para $w = 0$, a função de transferência em malha aberta é:

$$C(s)P(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

cujo diagrama de Nyquist está ilustrado na figura abaixo:

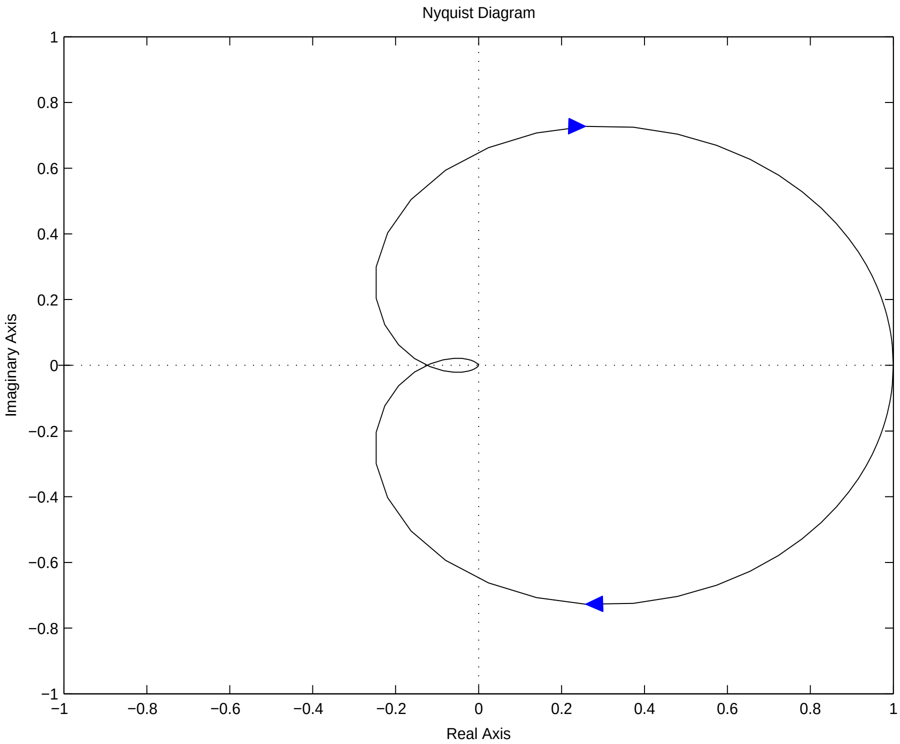

Figura 1: Diagrama de Nyquist para o sistema em questão

Precisamos saber em que ponto o diagrama cruza o eixo real negativo. Suponha que o diagrama de Nyquist cruze o eixo real negativo no ponto $(-a, 0)$, sendo a um número real positivo. Se o trecho do diagrama correspondente é aquele que mapeia pontos do tipo $s = j\omega$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s+1)^3} &= -a \\
\frac{1}{(j\omega+1)^3} &= a\angle 180 \\
(j\omega+1)^3 &= \frac{1}{a}\angle 180 \\
j\omega + 1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\angle 60
\end{aligned}$$

$$j\omega + 1 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Igualando as partes real e imaginária, tem-se:

$$1 = \frac{1}{2\sqrt[3]{a}} \qquad \text{e} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

de onde se tira $a = 1/8$ e $\omega = \sqrt{3}$. Portanto, o diagama de Nyquist da Figura 1 cruza o eixo real em $(-1/8, 0)$ para $s = j\sqrt{3}$.
Agora sejam:

- P: número de pólos instáveis em malha aberta;
- N: número de vezes que o diagrama circula o ponto $(-1, 0)$;
- Z=P+N : número de pólos instáveis do sistema em malha fechada.

Para o sistema em questão, os 3 pólos em malha aberta estão em -1. Logo, tem-se $P = 0$. E tem-se também $N = 0$, já que o diagrama não circula o ponto $(-1, 0)$. Com isso:

$$Z = P + N = 0 + 0 = 0$$

o que significa que não existem pólos instáveis em malha fechada. Então, o sistema em malha fechada é estável.

Ademais, temos que o ganho de margem é 8. Assim, se o ganho for menor que 8 o diagrama de Nyquist continuará não envolvendo o ponto $(-1, 0)$. Em outras palavras, se $k_c < 8$, o sistema continuará estável.