

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Eng^a Elétrica & Computação
Departamento de Telemática

**NOTAS DE AULAS DE EA721
PRINCÍPIOS DE CONTROLE &
SERVOMECANISMOS**

Paulo Augusto Valente Ferreira
Fevereiro de 2006

Aula 1

Introdução ao Controle Automático

Terminologia básica

Malha aberta $\times$ malha fechada

Exemplos ilustrativos

Terminologia básica

1. Certos termos utilizados para descrever variáveis e configurações relacionadas a sistemas de controle tornaram-se padrões com o passar do tempo. Apresentamos a seguir alguns termos básicos. Termos mais específicos surgirão no transcorrer do curso.

Sistema. O termo **sistema** designa um arranjo, conjunto ou coleção de componentes conectados ou relacionados de maneira a formar ou agir como uma unidade. Um sistema não é algo necessariamente *físico*. O termo pode ser usado em referência a sistemas econômicos, biológicos ou mecânicos, entre outros;

Controle. O termo **controle** é usualmente empregado no sentido de regulação, direcionamento ou comando. Um **sistema de controle** seria um arranjo de componentes conectados ou relacionados de maneira a se auto-regular (direcionar, comandar), ou regular (direcionar, comandar) um outro sistema.

2. As definições acima são suficientemente gerais para que, num sentido mais abstrato, qualquer objeto físico possa ser considerado um *sistema de controle*. Uma simples superfície refletora *controla* raios de luz, refletindo-os de acordo com os seus ângulos de incidência. Qualquer coisa *controla* o ambiente a sua volta, passiva ou ativamente. Em Engenharia, **sistema de controle** adquire um sentido mais restrito, designando sistemas utilizados para controlar (ativamente) variáveis como temperatura, pressão e vazão em processos químicos, tensão e frequência em sistemas de geração e distribuição de energia, posição e velocidade angulares de motores, trajetória de veículos, etc.

Planta. O termo **planta** (ou **processo**, ou **sistema controlado**) é usado para designar o sistema que é objeto da ação do sistema de controle.

3. **Planta** é uma tradução da palavra inglesa *plant*, que também poderia ser traduzida como fábrica ou instalação industrial, ambiente onde muitos sistemas de controle tiveram origem. Geralmente utilizamos os termos **planta** e **processo**, sem distinção, para designar aquilo que queremos controlar, embora o termo **controle de processos** esteja mais frequentemente associado ao controle de sistemas que envolvam variáveis como temperatura, pressão e vazão, presentes em indústrias químicas, por exemplo. Neste curso adotamos o termo **planta** para designar o objeto da ação de controle. A planta é representada como um bloco relacionando uma **variável de entrada** a uma **variável de saída** (Figura 1.1).



Figura 1.1: Planta.

4. Definimos a seguir alguns termos relativos a quantidades presentes em sistemas de controle. Os valores dessas quantidades geralmente são funções da variável independente **tempo**.

Variável de referência. A variável de referência (ou **comandada**) serve de referência (no sentido de comportamento desejado) para a **variável controlada**;

Variável controlada. A variável controlada (ou **regulada**) é qualquer variável que se deseja controlar. A variável controlada é geralmente representada pela variável de saída do sistema de controle;

Variável de controle. A **variável de controle** (ou **manipulada**) é a quantidade determinada pela ação de um **controlador**. A variável de controle é geralmente identificada como a variável de entrada da planta;

Controlador. Um controlador (ou **compensador**) é qualquer sistema conectado à planta no sentido de fazer a variável controlada responder de acordo com o especificado pela variável de referência.

5. **Exemplos.** No controle de posição do eixo de um motor DC (planta), as variáveis de controle e controlada são, respectivamente, a tensão aplicada nos terminais de entrada do motor e a posição angular resultante do eixo. O controla-

dor poderia ser simplesmente um **transdutor**, que converteria a posição desejada (variável de referência) em radianos ou graus na tensão necessária para produzi-la. Num tanque para aquecimento de água (planta), as variáveis de controle e controlada são, respectivamente, a quantidade de calor transferida ao tanque e a temperatura resultante da água. Um controlador converteria a temperatura desejada (variável de referência) na quantidade de calor necessária para atingi-la.

6. Se as variáveis de referência, de controle e de saída forem denotadas por r , u e y , respectivamente, então é possível representar um **sistema de controle em malha aberta** como na Figura 1.2.

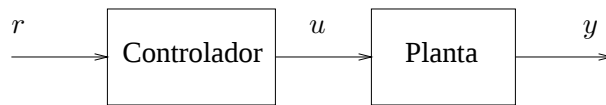


Figura 1.2: Sistema em malha aberta.

7. Os blocos (sistemas) Controlador e Planta são vistos agora como subsistemas de um sistema mais complexo. A principal característica do sistema em malha aberta da Figura 1.2 é inexistência de **realimentação**: os valores assumidos pela variável de controle não dependem dos valores da variável de saída. A ação de controle é função apenas do processamento da variável de referência pelo controlador. Por simplicidade, os termos variável de referência, variável de entrada e variável de saída serão abreviados para referência, entrada e saída do sistema, respectivamente.

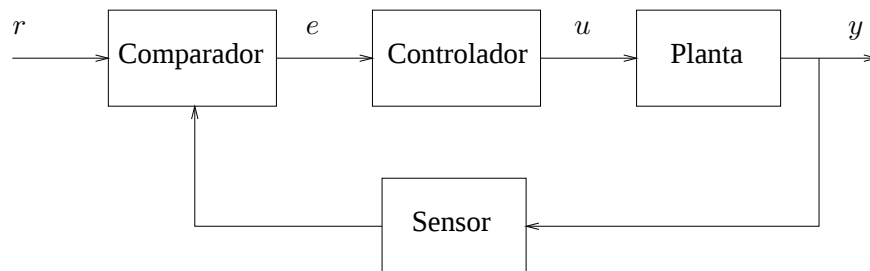


Figura 1.3: Sistema em malha fechada.

8. Em contraste com o sistema de controle em malha aberta da Figura 1.2, a Figura 1.3 ilustra um **sistema de controle em malha fechada**, realimentado, no sentido

de que a saída y é medida e comparada com a saída desejada, indicada através da referência r , para processamento através do controlador e a consequente definição da ação de controle u .

9. Dois novos componentes são introduzidos na Figura 1.3. A saída do sistema é medida através do componente representado no bloco **Sensor**. Em seguida, a referência é comparada com o valor medido, no bloco **Comparador**. A saída do comparador será denotada por e . Em geral, a saída do comparador é simplesmente o **erro** entre a referência e o valor medido, isto é, $e = r - y$.

10. **Exemplos.** No controle de posição do motor DC mencionado anteriormente, o sistema de controle encontra-se em malha aberta, uma vez que a tensão definida pelo controlador não depende da posição angular do eixo. O mesmo ocorre no controle de temperatura do tanque: a quantidade de calor definida pelo controlador não depende da temperatura da água. Nas versões em malha fechada desses sistemas, as variáveis de saída seriam medidas através de sensores apropriados e comparadas com os valores desejados. Os erros resultantes seriam então processados pelos respectivos controladores para os ajustes necessários (realimentação).

11. Às vezes torna-se conveniente explicitar a parte do sistema de controle responsável pela atuação na planta, como na Figura 1.4, através do bloco **Atuador**. Em sistemas físicos, o atuador é o componente que gera a potência necessária para produzir a saída do sistema. A descrição do atuador pode ser incorporada à do controlador ou à da planta. Neste curso, optamos por designar de controlador apenas a parte do sistema que é efetivamente projetável, sendo o atuador geralmente considerado como parte integrante da planta.

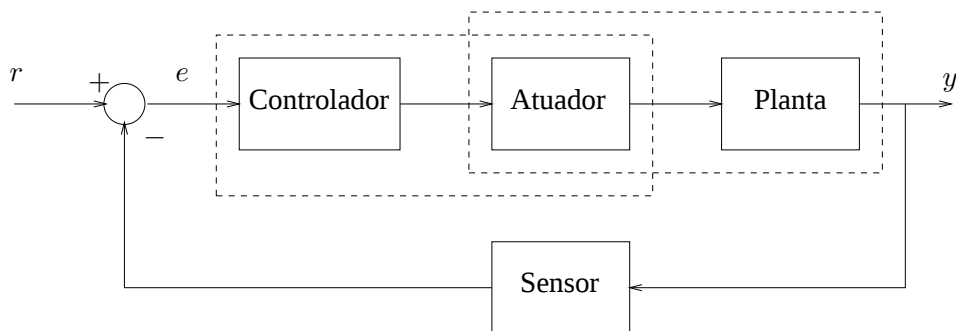


Figura 1.4: Sistema explicitando o atuador.

12. **Idealmente**, se fosse possível representar a planta, o controlador e o ambiente no qual o sistema de controle está inserido com precisão infinita, não seria necessário utilizar sistemas de controle em malha fechada; sistemas em malha aberta seriam suficientes. A principal razão para a utilização de um sistema de controle em malha fechada é a eventual presença de **distúrbios** agindo sobre o sistema.

Distúrbio. O termo **distúrbio** designa genericamente qualquer evento que tenda a afetar o funcionamento do sistema de controle de forma adversa. Pode ser gerado internamente ou externamente ao sistema de controle.

13. **Exemplos.** Um sensor descalibrado ou sujeito a ruídos gera medidas que não refletem os valores da saída, gerando um **distúrbio interno**. Os valores medidos incorretamente serão realimentados, afetando o funcionamento do sistema. Se parte da descrição da planta é omitida na etapa de modelagem do sistema, a parte não-modelada pode agir como distúrbio interno. A velocidade do vento representa um **distúrbio externo** para os sistemas de controle de trajetória de veículos. A força e a amplitude das ondas representam distúrbios externos para os sistemas de estabilização de plataformas marítimas.

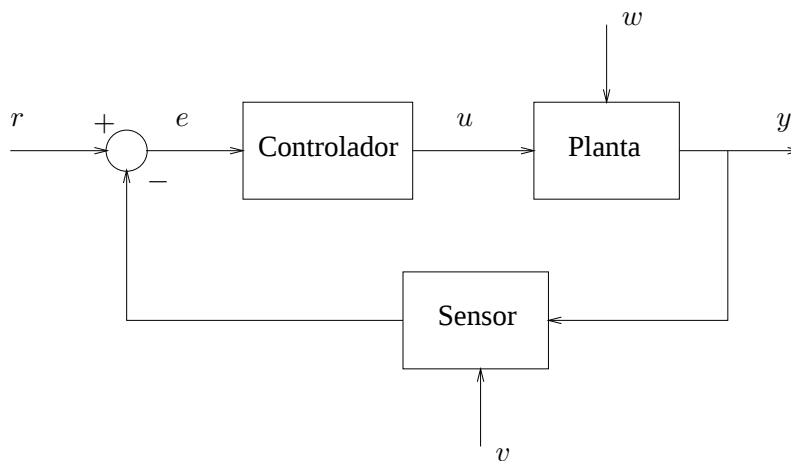


Figura 1.5: Sistema em malha fechada sujeito a distúrbios.

14. A tradução de distúrbios em termos de variáveis está diretamente ligada às características da planta, do sensor e do ambiente no qual o sistema em malha fechada opera. A Figura 1.5 ilustra um sistema de controle em malha fechada no qual variáveis de distúrbio agindo na planta e no sensor são explicitamente con-

sideradas. O diagrama da Figura 1.5 envolve dois grupos de três variáveis com características distintas. As variáveis r , w e v são **entradas externas** (independentes), no sentido de que afetam, mas não são afetadas pelas variáveis e , u e y . As variáveis e , u e y representam **saídas controladas** (dependentes).

15. Do ponto de vista de implementação física, classificamos um sistema de controle em malha fechada como **manual** ou **automático**.

Controle manual. Tipo de controle em malha fechada no qual a realimentação é implementada através de um operador humano, que realiza uma ou mais das funções de comparador, controlador ou sensor.

Controle automático. Tipo de controle em malha fechada no qual as funções de comparador, controlador e sensor são executadas sem a intervenção humana, através de sistemas eletrônicos, hidráulicos ou pneumáticos, por exemplo.

16. Uma característica inerente ao desenvolvimento da área de sistemas de controle é a progressiva substituição de sistemas de controle manuais por sistemas automáticos, particularmente em atividades que demandem assistência constante, ações repetitivas ou que possam ser potencialmente perigosas para a integridade física dos operadores. Sistemas de controle automáticos são geralmente capazes de executar suas funções com maior precisão e rapidez do que seria possível através de controle manual.

17. Do ponto de vista da função a ser executada, classificamos um sistema de controle em malha fechada como sendo do tipo **servomecanismo** ou **regulação**.

Servomecanismo. O termo **servomecanismo** surgiu no contexto do desenvolvimento de certos mecanismos de controle de posição. O termo **problema do servomecanismo** serve atualmente para designar o problema de fazer a saída do sistema seguir (**acompanhar, rastrear**) uma referência especificada.

Regulação. O termo **regulação** é empregado para designar a função de controle que visa **manter** a saída do sistema razoavelmente próxima à uma referência especificada. O termo **problema da regulação** designa o problema de regular a saída do sistema.

18. **Exemplo.** No controle em malha fechada do motor DC, o problema de **levar** o eixo do motor da sua posição inicial até a posição desejada (isto é, fazer a posição

do eixo começar a seguir uma função tipo degrau, de amplitude igual a posição desejada) constitui um problema de servomecanismo. **Manter** a posição do eixo suficientemente próxima à posição desejada, a despeito de possíveis distúrbios que possam afetar o sistema, constitui um problema de regulação.

19. O objetivo num problema de regulação é manter uma certa condição nominal de operação, caracterizada pelos valores nominais das variáveis presentes no sistema. Quando a saída se desvia do seu valor nominal por influência de algum distúrbio, as demais variáveis devem também sofrer desvios no sentido de restaurar a condição anterior ao distúrbio. Podemos representar o problema da regulação através do diagrama da Figura 1.5, substituindo cada variável pelo respectivo desvio em relação ao seu valor nominal. A referência seria o valor constante zero, uma vez que o objetivo agora seria levar o desvio da saída para zero, restaurando-se desta forma a condição nominal de operação do sistema.

Malha aberta × malha fechada

20. Sistemas de controle em malha aberta são de implementação e manutenção mais simples e são mais baratos - possuem menos componentes - do que os correspondentes sistemas de controle em malha fechada. Sistemas de controle em malha aberta podem ser a única alternativa quando a medição da saída é técnica ou economicamente inviável. Eletrodomésticos como máquinas de lavar convencionais são exemplos típicos. Por ser ainda economicamente inviável medir *grau de limpeza da roupa* para comparação com o grau de limpeza desejado, funcionam a base de ciclos (referências pré-programadas) controlados por *timers*.

21. Se adequadamente projetados, sistemas de controle em malha fechada tornam a saída do sistema relativamente insensível a distúrbios externos ou internos. Em princípio são mais caros - possuem mais componentes - mas por terem a capacidade de compensar distúrbios internos, podem ser implementados com componentes de menor qualidade e custo, sem prejuízo significativo em termos de desempenho global. Por outro lado, a realimentação pode produzir **instabilidade**. A questão da estabilidade da malha de controle deve ser cuidadosamente tratada ao se implementar sistemas realimentados.

Exemplos ilustrativos

22. Sistemas de controle foram originalmente introduzidos para solucionar proble-

mas de regulação de sistemas mecânicos. A partir da compreensão e do domínio do princípio básico da realimentação, passaram a ser utilizados em diferentes campos da tecnologia e da ciência.

Eletromecânica

23. Atualmente uma parcela expressiva das aplicações de sistemas de controle envolvem sistemas eletromecânicos, como motores e robôs. Um exemplo nesta área é o controle de uma unidade de leitura de discos magnéticos, ilustrado na Figura 1.6. Um disco magnético é um dispositivo para armazenamento de dados e consiste de uma superfície circular coberta por material magnético. Os dados são armazenados numa série de círculos concêntricos, chamados de *trilhas*. Existem milhares de trilhas num disco magnético.

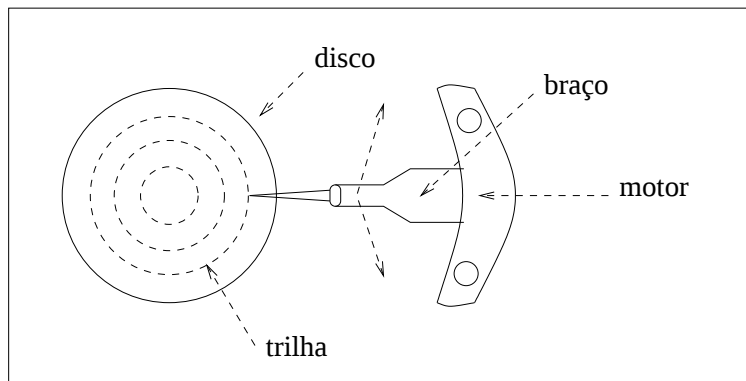


Figura 1.6: Unidade de leitura de disco magnético.

24. O objetivo no sistema ilustrado na Figura 1.6 é posicionar a cabeça da unidade de leitura de forma a ler os dados armazenados numa trilha qualquer do disco. A cabeça de leitura, construída com material do tipo *filme fino*, é montada num dispositivo deslizante conectado na extremidade de um braço mecânico e paira a uma distância de 100 nm da superfície do disco. A velocidade de rotação do disco, constante, encontra-se entre 1800 e 7800 rpm.

25. Um sistema de controle em malha fechada para o posicionamento da cabeça de leitura de um disco magnético é ilustrado na Figura 1.7. Cada trilha do disco possui um índice que pré-registra a sua posição. A cabeça de leitura lê a posição (índice) da trilha corrente, a qual é comparada com a posição (índice) desejada.

O sinal de erro de posição é transmitido ao amplificador, o qual por sua vez gera uma entrada de controle para um motor DC de imã permanente, responsável pelo posicionamento do braço da leitora.

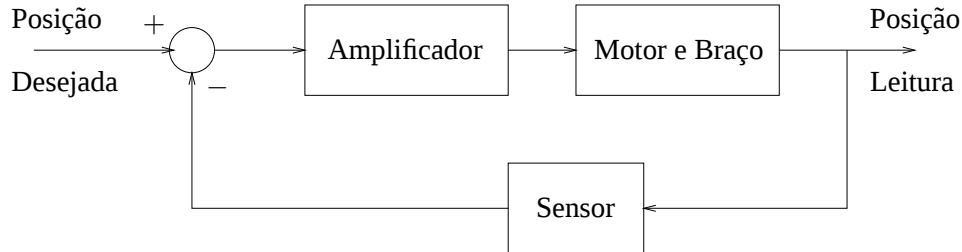


Figura 1.7: Sistema de controle da posição de leitura.

26. As especificações de desempenho para o sistema de controle em malha fechada são bastante rígidas: o erro entre a posição desejada e a posição final da cabeça de leitura deve ser da ordem de $\pm 1 \mu\text{m}$; a cabeça deve mover-se entre duas trilhas quaisquer do disco num intervalo de 50 ms.

Biomedicina

27. O uso de conceitos e técnicas de controle automático na área de biomedicina pode ser ilustrado através da discussão de um sistema automático para administração de **insulina**, um hormônio produzido no **pâncreas**.

28. A maioria dos alimentos que ingerimos é transformada em **glicose**, uma forma de açúcar que é transformada pelo corpo humano em energia. A insulina ajuda a glicose de origem alimentar a penetrar nas células, de forma a que estas produzam energia. Na ausência de insulina, a glicose se acumula no corpo ao invés de ser absorvida pelas células. O **diabetes** se manifesta quando o corpo não produz insulina suficiente ou é incapaz de utilizar eficientemente a insulina que produz.

29. A Figura 1.8 ilustra os perfis de produção de glicose e insulina de uma pessoa saudável, os quais servem de referência para um sistema automático para administração de **insulina** a ser implantado num paciente diabético. O sistema de controle representado na Figura 1.9 é do tipo malha aberta porque a tecnologia atual ainda não permite miniaturizar um sensor para níveis de glicose. Um sistema composto por um reservatório de insulina, motor, bomba e válvula administra uma taxa de

insulina como pré-programado num gerador de sinal.

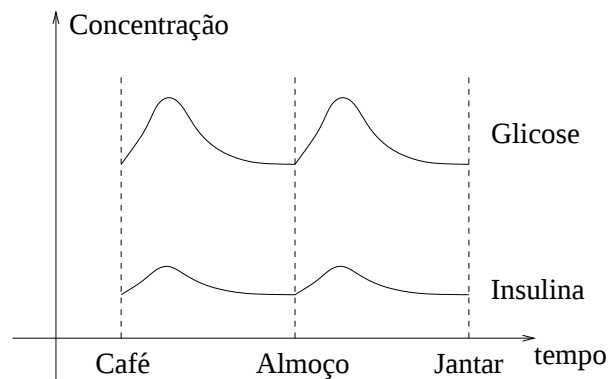


Figura 1.8: Perfis normais de glicose e insulina.

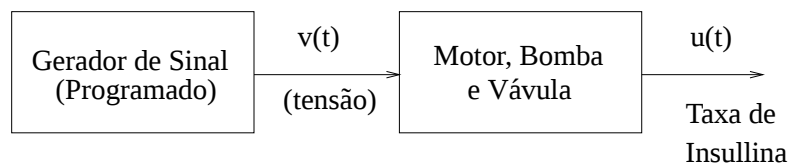


Figura 1.9: Controle em malha aberta de glicose.

30. Avanços na área de miniaturização de sensores deverão viabilizar sistemas em malha fechada implantados para controle do nível de glicose no sangue, pressão sangüínea e taxa de batimento cardíaco, entre outros.

Economia

31. Tentativas no sentido de modelar alguns processos no campo das ciências sociais como sistemas de controle têm sido realizadas com relativo sucesso. Embora a Sociedade, como um sistema, possua inúmeros componentes e muitas malhas de controle, certas relações de causa-e-efeito básicas em Economia, por exemplo, podem ser representadas de forma simplificada.

32. O **Produto Interno Bruto (PIB)** anualizado de um país é a soma dos valores de todos os produtos e serviços produzidos no país no período de um ano.

Um dos objetivos da ação governamental é promover e controlar o crescimento do PIB, nos moldes de um sistema de controle como o ilustrado na Figura 1.10. A principal variável de controle do governo, oriunda da coleta de impostos, são seus investimentos na atividade econômica, a qual também recebe entradas na forma de investimentos privados e gastos dos consumidores.

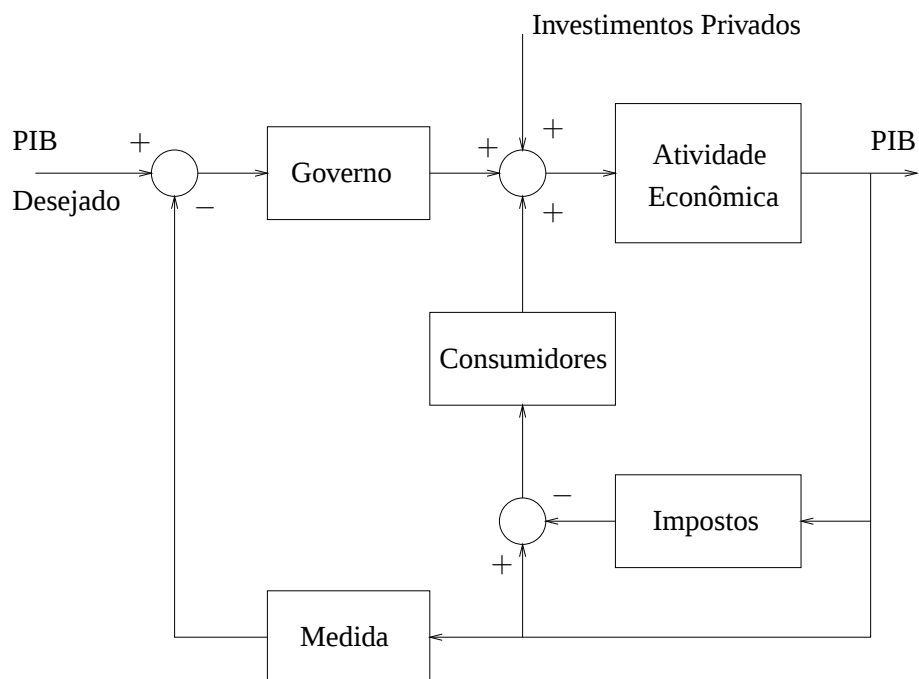


Figura 1.10: PIB como um sistema realimentado.

33. Embora bastante simplificado, o diagrama de blocos ajuda a entender os mecanismos básicos do comportamento do PIB numa economia nacional (capitalista). Dentre as malhas de controle não-evidenciadas, encontra-se a responsável pelo controle de **deficit**, isto é, da diferença entre o que é investido e o que é arrecadado pelo governo.

Revisão 1

Resposta Temporal

Função de transferência

Ganho DC

Sistemas de primeira ordem

Sistemas de segunda ordem

Função de transferência

1. Sistemas lineares invariantes no tempo podem ser genericamente representados por uma equação diferencial linear ordinária:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (m \leq n),$$

na qual y e u são as variáveis de saída e de entrada do sistema e $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$ são coeficientes constantes. A saída y fica completamente caracterizada a partir do conhecimento da entrada u , e das condições iniciais $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$. Aplicando a Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$) a ambos os lados da equação diferencial supondo condições iniciais nulas e dividindo $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ por $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, obtemos a função de transferência do sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

2. Através do conceito de função de transferência é possível representar um sistema dinâmico através de uma função algébrica racional (razão de dois polinômios) na frequência complexa s . Se a maior potência de s do denominador de $G(s)$ for n , dizemos que a **ordem** do sistema é n . A **forma fatorada** de $G(s)$ é

$$G(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)},$$

na qual k é uma constante, $z_1, z_2, \dots, z_m$ são as raízes do numerador e $p_1, p_2, \dots, p_n$ são as raízes do denominador de $G(s)$. Se a função de transferência for **irreduzível**, isto é, se $z_i \neq p_j$ para todo i e todo j , dizemos que $z_1, z_2, \dots, z_m$ são

os **zeros** e que $p_1, p_2, \dots, p_n$ são os **pólos** de $G(s)$. Ao lidarmos com sistemas representados pelas suas funções de transferência devemos atentar para as seguintes propriedades básicas:

- A função de transferência independe da entrada aplicada ao sistema. A **saída** do sistema depende da entrada pois $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$. A função de transferência depende apenas dos coeficientes (que também definem a ordem) da equação diferencial;
- A função de transferência é a transformada de Laplace da saída do sistema quando a entrada é a **função impulso** $\delta(t)$. De fato, se g é a saída do sistema devida à entrada $u(t) = \delta(t)$ ($U(s) = 1$), isto é, se g é a **reposta do sistema ao impulso**, então $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

3. A **resposta temporal** de um sistema linear invariante no tempo nada mais é do que a saída do sistema y para uma dada entrada u . Podemos obter a resposta temporal de um sistema representado pela sua função de transferência através do seguinte procedimento:

Passo 1: Obtenha a Transformada de Laplace da entrada: $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$;

Passo 2: Calcule $Y(s) = G(s)U(s)$. Expresse $Y(s)$ como soma de **frações parciais**:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s);$$

Passo 3: Obtenha as anti-transformadas de Laplace das frações de $Y(s)$. A soma dos termos resultantes é a resposta temporal do sistema:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)] + \dots + \mathcal{L}^{-1}[Y_n(s)], \quad t \geq 0.$$

Os Passos 1 e 3 são normalmente executados com o auxílio de uma **Tabela de Transformadas de Laplace**. O Passo 2 envolve o cálculo dos **resíduos** associados às frações parciais de $Y(s)$, através de regras dependentes da natureza dos pólos de $G(s)$ (distintos, múltiplos, complexos).

Ganho DC

4. Podemos calcular o valor final da resposta y de um sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência $G(s)$ a uma entrada particular u

através do chamado **Teorema do Valor Final**:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s), \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s).\end{aligned}$$

Supomos implicitamente que y possui um valor final, isto é, que y converge para algum número real quando t tende para o infinito. Se $u(t) = A$, $t \geq 0$ (degrau unitário de amplitude A), então $U(s) = A/s$ e

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)\frac{A}{s}, \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s)A.\end{aligned}$$

Se y possui um valor final, o limite indicado existe e o valor final de y é $G(0)A$. Entretanto, o limite pode existir, sem significado físico, mesmo que y não possua valor final. O valor $G(0)$ é chamado de **ganho DC** ou **ganho de regime** do sistema para uma entrada constante, em analogia ao termo utilizado para descrever sinais elétricos constantes.

Sistemas de primeira ordem

5. Modelos de primeira ordem são utilizados para descrever um grande número de processos simples, como a velocidade de uma massa, a temperatura de um reator, o nível de um tanque ou a tensão num circuito RC série. Sistemas de primeira ordem assumem a seguinte **forma padrão**:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}, \quad (1)$$

na qual k e τ são o **ganho** e a **constante de tempo** do sistema, respectivamente.

6. **Resposta ao degrau unitário.** Se $U(s) = 1/s$, então

$$\begin{aligned}Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)} = \frac{k/\tau}{s(s + 1/\tau)}, \\ &= \frac{k}{s} - \frac{k}{s + (1/\tau)}.\end{aligned}$$

A anti-transformada de $Y(s)$ (resposta ao degrau) é

$$y(t) = k - ke^{-t/\tau} = k(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

O termo k da resposta ao degrau unitário (2) é devido ao pólo na origem de $U(s)$, e é chamado de **resposta forçada** ou **resposta em regime** do sistema, porque o termo permanece quando t tende ao infinito. O termo $ke^{-t/\tau}$ é devido ao pólo de $G(s)$, e é chamado por sua vez de **resposta transitória** ou **resposta natural** do sistema, porque o termo desaparece quando t tende ao infinito. A Figura R1.1 ilustra a resposta típica de um sistema de primeira ordem à entrada degrau unitário. Para obter a resposta a um degrau de amplitude A , basta multiplicar a saída por A .

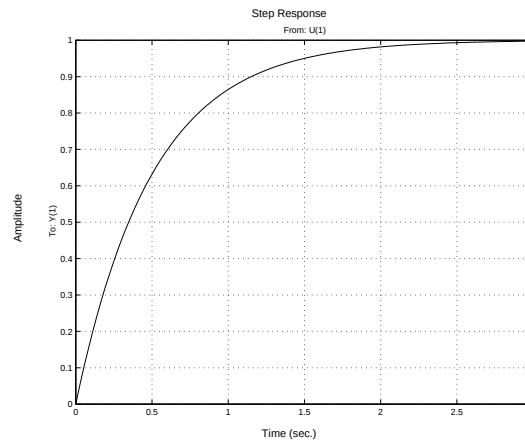


Figura R1.1: Resposta ao degrau unitário ($k = 1$, $\tau = 0.5$ s).

7. A tabela abaixo indica como a exponencial $e^{-t/\tau}$ decai em função de múltiplos da constante de tempo τ . Observamos que após quatro constantes de tempo o valor da exponencial é inferior a 2% do valor inicial. Consequentemente, após $t = 4\tau$ s (qualquer que seja τ) o valor da resposta é superior a 98% do seu valor final, k .

t	$e^{-t/\tau}$
0	1
τ	0.3679
2τ	0.1353
3τ	0.0498
4τ	0.0183
5τ	0.0067

8. O ganho DC do sistema de primeira ordem é $G(0) = k$. Se a amplitude do degrau for A , então o valor final da saída será kA . O valor DC de um sistema pode ser calculado mesmo que a entrada não seja constante. Na prática, se a entrada

permanecer igual a A por um período superior a 4τ s, o valor da saída tenderá à constante $G(0)A$.

9. Resposta à rampa unitária. Se $U(s) = 1/s^2$, então

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{k}{s^2(\tau s + 1)} = \frac{(k/\tau)}{s^2(s + 1/\tau)}, \\ &= -\frac{k\tau}{s} + \frac{k}{s^2} + \frac{k\tau}{s + (1/\tau)}. \end{aligned}$$

A anti-transformada de $Y(s)$ (resposta à rampa) é

$$y(t) = kt + k\tau e^{-t/\tau} - k\tau, \quad t \geq 0.$$

O fator que multiplica a exponencial agora depende de τ . Quanto maior τ , mais prolongada será a resposta transitória do sistema. A **resposta em regime** à rampa unitária, isto é, a parte da resposta à rampa que permanece quando t tende ao infinito, é $y(t)_{\text{re}} = kt - k\tau$ ($t \rightarrow \infty$). Observamos que a resposta à rampa tende a uma reta de inclinação k . A Figura R1.2 ilustra a resposta típica de um sistema de primeira ordem à entrada rampa unitária. Do mesmo modo, para obter a resposta a uma rampa de inclinação A (s^{-1}), basta multiplicar a saída por A .

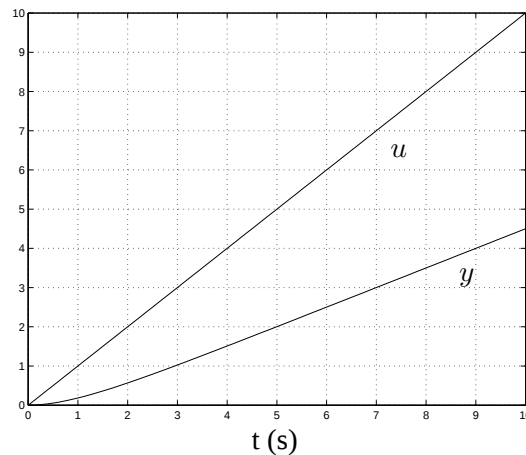


Figura R1.2: Resposta do sistema à rampa unitária ($k = 1$, $\tau = 0.5$ s).

Sistemas de segunda ordem

10. Modelos de segunda ordem são também representativos de um grande número de processos de interesse, como a posição de uma massa num sistema massa-mola-atrito, o deslocamento angular do eixo de um motor DC (modelo simplificado) ou a carga no capacitor de um circuito RLC série. A **forma padrão** de um sistema de segunda ordem é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

na qual ξ é o **fator de amortecimento** e ω_n é a **freqüência natural** (em rad/s) do sistema. Um sistema de segunda ordem é completamente caracterizado pelos valores de ξ e ω_n . A freqüência natural é também chamada de **freqüência não-amortecida**. Seria a freqüência de oscilação do sistema caso $\xi = 0$. O ganho DC do sistema de segunda ordem na forma padrão é $G(0) = 1$. O valor final da saída é igual a qualquer valor de entrada constante.

11. **Resposta ao degrau unitário.** Se $U(s) = 1/s$, então

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}.$$

A natureza das raízes de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$,

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1},$$

varia de acordo com o valor de $\xi \geq 0$:

$$\begin{aligned} \xi > 1 & : \text{raízes reais distintas;} \\ \xi = 1 & : \text{raízes reais múltiplas;} \\ \xi < 1 & : \text{raízes complexas conjugadas.} \end{aligned}$$

Resposta sub-amortecida. Se $\xi < 1$, dizemos que a resposta é **sub-amortecida** e representamos as raízes $s_{1,2}$ na forma

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d,$$

na qual $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ é a **freqüência de oscilação forçada** do sistema, dependente do fator de amortecimento ξ . Para obter a resposta do sistema sub-amortecido, expressamos $Y(s)$ em frações parciais:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}.
\end{aligned}$$

Anti-transformando $Y(s)$ com o auxílio de uma Tabela de Transformadas, obtemos então

$$\begin{aligned}
y(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right), \\
&= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_d t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

A resposta oscila com frequência amortecida ω_d e tende a 1 (amplitude do degrau unitário) quando t tende ao infinito. Se $\xi = 0$ ($\omega_d = \omega_n$), obtemos

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad t \geq 0.$$

A resposta oscila sem amortecimento em torno de 1 na frequência natural ω_n . Dizemos neste caso que a resposta é **não-amortecida**.

Resposta criticamente amortecida. Se $\xi = 1$, então

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \omega_n)^2$$

e as raízes são reais e múltiplas. A resposta correspondente, não-oscilatória, é

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \quad t \geq 0,$$

sendo chamada de **criticamente amortecida**.

Resposta super-amortecida. Se $\xi > 1$, então

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = \left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \right) \left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

e as raízes são reais e distintas. A resposta correspondente, não-oscilatória, é

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right], \quad t \geq 0,$$

na qual $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$, sendo chamada de **super-amortecida**. Se $|s_1| \ll |s_2|$, então $e^{s_2 t}$ decai muito mais rápido do que $e^{s_1 t}$ e a resposta pode ser aproximada por

$$y(t) \simeq 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{e^{s_1 t}}{s_1}, \quad t \geq 0.$$

Dizemos que a raiz s_1 é **dominante** em relação a s_2 . A resposta obtida é tipicamente a de um sistema de primeira ordem.

Revisão 2

Resposta Temporal

Sistemas de segunda ordem

Características da resposta ao degrau

Ganho DC não-unitário

Efeito da adição de um zero

Sistemas de segunda ordem

1. Dado um sistema de segunda ordem na forma padrão,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

seus pólos complexos conjugados ($\xi < 1$),

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2},$$

podem ser localizados no plano s como ilustra a Figura R2.1.

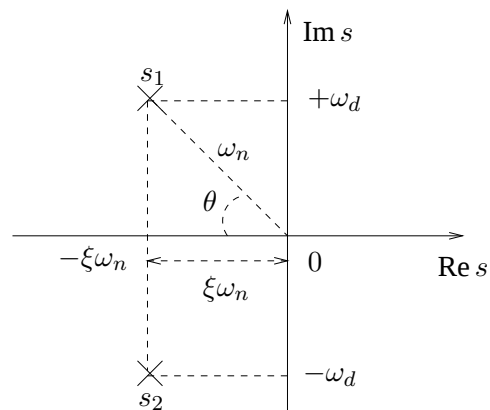


Figura R2.1: Localização dos pólos no plano s .

Relações trigonométricas simples mostram que

$$|s_1| = |s_2| = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2} = \omega_n,$$

isto é, que a distância de s_1 (s_2) à origem do plano s é igual a frequência natural do sistema. Além disso, o ângulo θ indicado é tal que

$$\cos \theta = \frac{\xi \omega_n}{\omega_n} = \xi,$$

implicando que ξ tende a 1 (ω_d tende a 0) quando θ tende a 0, e que ξ tende a 0 (ω_d tende a ω_n) quando θ tende a $\pi/2$. A frequência de oscilação forçada ω_d aumenta com a diminuição de ξ ou com o aumento de ω_n .

Características da resposta ao degrau

2. Respostas ao degrau unitário típicas de sistemas de segunda ordem sub-amortecidos ($\xi < 1$), criticamente amortecidos ($\xi = 1$) e super-amortecidos ($\xi > 1$) são ilustradas na Figura R2.2. Dentre as respostas não-oscilatórias ($\xi \geq 1$), a que mais rápido se aproxima da referência degrau unitário é a correspondente ao caso criticamente amortecido. Excetuando-se casos onde oscilações não possam ser toleradas, como em determinadas aplicações em Robótica, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e amortecida, o que implica em fatores de amortecimento entre 0.4 e 0.8.

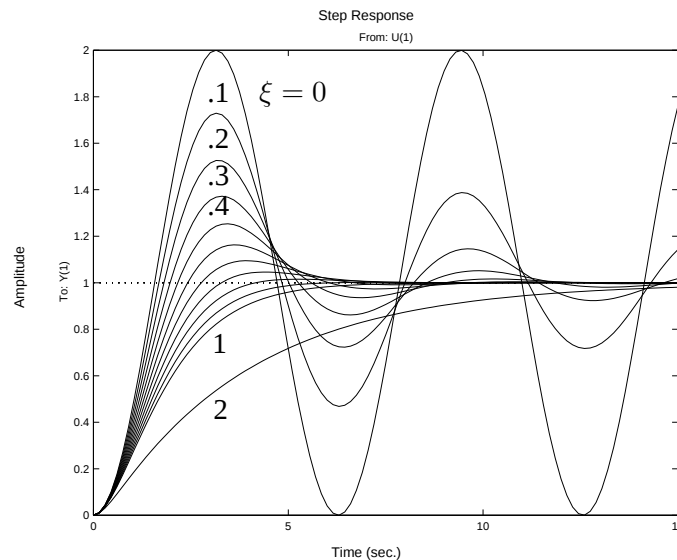


Figura R2.2: Respostas ao degrau em função de ξ ($\omega_n = 1$).

3. A resposta sub-amortecida de um sistema de segunda ordem pode ser expressa

na forma

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

A **constante de tempo** do sistema de segunda ordem é $\tau = 1/(\xi\omega_n)$, sendo assim inversamente proporcional ao valor absoluto da parte real dos pólos de $G(s)$.

4. Várias características da resposta sub-amortecida de um sistema de segunda ordem podem ser expressas através dos parâmetros ξ e ω_n . A resposta ilustrada na Figura R2.3 indica alguns dos índices que utilizamos para avaliar a qualidade da resposta. Todos os índices discutidos a seguir são calculados, alguns de forma aproximada, a partir da resposta sub-amortecida do sistema de segunda ordem, dada por (3).

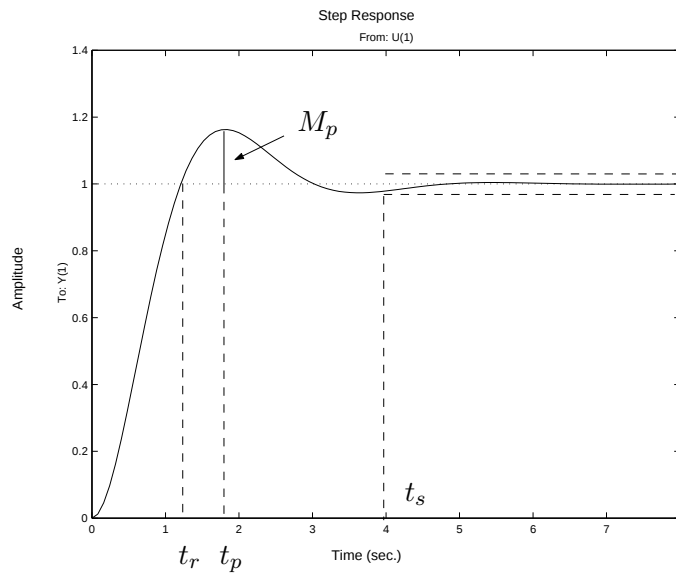


Figura R2.3: Resposta ao degrau unitário ($\xi = 0.5$, $\omega_n = 2$).

Tempo de subida, t_r . Intervalo de tempo necessário para que a resposta vá de 0% a 100%, como na Figura R2.3, ou, como será assumido, de 10% a 90% do seu valor final. Matematicamente, $t_r = t_2 - t_1$, onde t_1 e t_2 são tempos tais que $y(t_1) = 0.1$ e $y(t_2) = 0.9$. O tempo de subida possui uma pequena dependência do fator de amortecimento, como ilustra a Figura R2.2. Entretanto admitindo o

valor médio $\xi = 0.5$, podemos aproximar o tempo de subida por

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n}. \quad (\text{s})$$

O fator determinante do tempo de subida é a frequência natural do sistema.

Máxima sobre-elevação, M . Máximo valor da resposta medida a partir do seu valor final. A máxima sobre-elevação é obtida resolvendo-se $\dot{y}(t_p) = 0$ (condição de inclinação nula para um ponto de máximo de $y(t)$) para o menor tempo t_p possível, chamado de **tempo de pico**, t_p . Após as operações necessárias,

$$M = e^{-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}. \quad (\text{s})$$

É usual representarmos a máxima sobre-elevação em termos percentuais: $M_p = M \times 100$. A sobre-elevação depende apenas do fator de amortecimento do sistema; o tempo de pico depende também da frequência natural.

Tempo de acomodação, t_s . Tempo necessário para que a resposta alcance e permaneça dentro de uma faixa percentual do seu valor final. Se utilizarmos uma faixa de 2%, o tempo de acomodação será de aproximadamente quatro constantes de tempo:

$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\xi\omega_n}. \quad (\text{s})$$

O tempo de acomodação depende simultaneamente do fator de amortecimento e da frequência natural.

5. Exemplo. Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} = \frac{2^2}{s^2 + 2 \times 0.5 \times 2s + 2^2}.$$

O sistema exibe $\xi = 0.5$ e $\omega_n = 2$ rad/s.

Tempo de subida:

$$t_r = \frac{1.8}{2} = 0.90 \text{ s};$$

Máxima sobre-elevação:

$$M_p = e^{-(0.5/\sqrt{1-0.5^2})\pi} \times 100 = 16.30 \%;$$

Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{1.73} = 1.81 \text{ s};$$

Tempo de acomodação:

$$t_s = \frac{4}{0.5 \times 2} = 4.00 \text{ s}.$$

6. Em Controle estamos frequentemente interessados em **sintetizar** um sistema de segunda ordem, isto é, **construir** um sistema de segunda ordem que apresente características desejadas de resposta ao degrau, especificadas através de t_r , t_s e M_p , principalmente. Construir o sistema significa, é claro, determinar os valores de ξ e ω_n que satisfazem as especificações formuladas.

7. **Exemplo.** Considere o problema de sintetizar um sistema de segunda ordem, ou seja, determinar ξ e ω_n , tal que

$$\begin{aligned} M_p &\leq 10\%, \\ t_r &\leq 1 \text{ s}, \\ t_s &\leq 3 \text{ s}. \end{aligned}$$

Gráficos $M_p \times \xi$ são apresentados na maioria dos livros introdutórios de Controle. Veja, por exemplo, Ogata, pg. 155. Para que $M_p \leq 10\%$, devemos impor $\xi \geq 0.6$. O tempo de subida impõe uma restrição à frequência natural:

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \geq 1.8 \text{ rad/s}.$$

O tempo de acomodação impõe uma restrição adicional, agora sobre o valor de $\xi\omega_n$:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n \geq \frac{4}{3}$$

Os valores mínimos $\xi = 0.6$ e $\omega_n = 1.8 \text{ rad/s}$ não satisfazem a especificação relativa ao tempo de acomodação. A solução mais simples é aumentar ω_n . Se $\omega_n = 2.3 \text{ rd/s}$, então $t_s = 2.9 \text{ s}$. O sistema que sintetiza a resposta desejada é

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{5.29}{s^2 + 2.76s + 5.29}.$$

8. A dependência da resposta de um sistema de segunda ordem ao degrau em relação aos parâmetros ξ e ω_n sugere ser possível delimitar **regiões** do plano s

que caracterizem determinados tipos de resposta. Em outras palavras, uma dada localização de pólos – **alocação de pólos** no problema de síntese – implica numa resposta ao degrau descrita em termos de t_r , t_s e M_p , como ilustra a Figura R2.4. Em particular,

- Uma sobre-elevação máxima $\overline{M}_p$ implica um fator de amortecimento mínimo $\underline{\xi}$ e um conseqüente ângulo máximo $\overline{\theta}$, o que cria um **setor** no semi-plano esquerdo;
- Um tempo de subida máximo $\overline{t}_r$ implica uma frequência natural mínima $\underline{\omega}_n$, o que exclui o interior de um **semi-círculo** de raio $\underline{\omega}_n$;
- Um tempo de acomodação máximo $\overline{t}_s$ implica uma parte real dos pólos $\xi\omega_n$ mínima $\underline{\xi\omega_n}$, o que exclui a região à esquerda de $\underline{\xi\omega_n}$.

Um sistema de segunda ordem com pólos complexos conjugados pertencentes à interseção das três regiões acima (região hachurada na Figura R2.4) será tal que $M_p \leq \overline{M}_p$, $t_r \leq \overline{t}_r$ e $t_s \leq \overline{t}_s$.

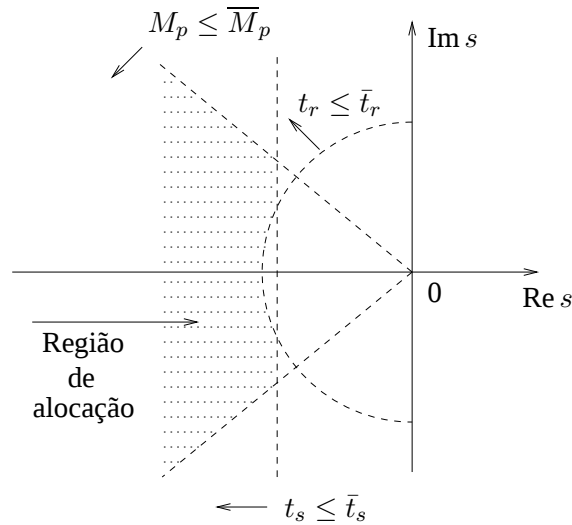


Figura R2.4: Especificações em termos de regiões no plano s .

Ganho DC não-unitário

9. Pode ocorrer do sistema de segunda ordem se apresentar na forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

na qual k é um ganho qualquer, não necessariamente unitário. Neste caso, o ganho DC do sistema passa a valer $G(0) = k$ e a resposta ao degrau do sistema é simplesmente multiplicada por k . Em particular, o valor final de y será $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k$. Uma modificação conveniente para máxima sobre-elevação quando $y(\infty) \neq 1$ é

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100.$$

Efeito da adição de um zero

10. O sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(\omega_n^2/a)(s+a)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

possui um zero adicional em $s = -a$. Observamos que o ganho $k = \omega_n^2/a$ foi definido de tal maneira que $G(0) = 1$ qualquer que seja a , facilitando a análise a seguir, no sentido de que todas as respostas tenderão ao valor final 1. Para uma análise do comportamento típico do sistema após a introdução do zero, suponha $\xi = 0.7$, $\omega_n = 2$ rad/s e os seguintes valores para a : 5, 2, 1 e 0.5. As respostas ao degrau correspondentes são apresentadas na Figura R2.5.

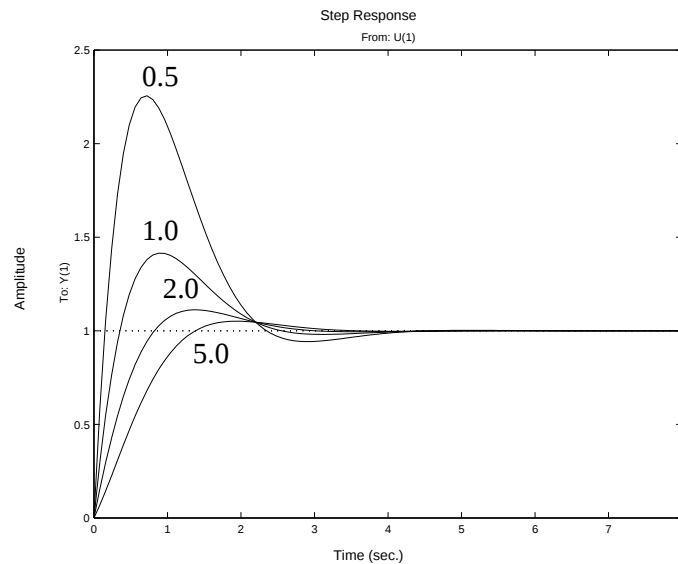


Figura R2.5: Efeito da introdução de um zero.

11. A parte real do par de pólos complexos conjugados é $-\xi\omega_n = -0.7 \times 2 = -1.4$; o zero encontra-se em $s = -a$. Quando o zero está relativamente distante do pólos ($a = 5$), seu efeito sobre o amortecimento do sistema é desprezível. O sistema se comporta como se não houvesse o zero. À medida que o zero se desloca na direção do eixo imaginário, passando pelo pólos, produz um efeito equivalente ao de reduzir o amortecimento do sistema, aumentando assim a sua máxima sobre-elevação.

Revisão 3

Resposta em Frequência

Resposta à entrada senoidal

Diagramas de Bode

Resposta à entrada senoidal

1. Considere um sistema linear invariante no tempo qualquer modelado pela função de transferência $G(s)$. Desejamos obter a resposta em regime do sistema, isto é, $y(t)$ para $t \rightarrow \infty$, quando a entrada r é um sinal senoidal de amplitude A e frequência ω dadas: $r(t) = A \sin \omega t$, $t \geq 0$. No domínio da Transformada de Laplace,

$$Y(s) = G(s)R(s), \quad R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

2. É sempre possível expressar a transformada de Laplace da saída como

$$Y(s) = Y_G(s) + Y_R(s),$$

na qual $Y_G(s)$ e $Y_R(s)$ representam as parcelas da expansão em frações parciais de $Y(s)$ que envolvem exclusivamente os pólos de $G(s)$ e de $R(s)$, respectivamente. A resposta temporal da saída pode então ser vista como

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)], \\ &= \mathcal{L}^{-1}[Y_G(s)] + \mathcal{L}^{-1}[Y_R(s)], \\ &= y_G(t) + y_R(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

3. Assumindo que $G(s)$ possui apenas pólos com partes reais estritamente negativas (pólos reais, distintos ou múltiplos, pólos complexos conjugados), a anti-transformada $y_G(t)$ conterá apenas termos do tipo $e^{-\sigma t}$, $t^p e^{-\sigma t}$ ou $e^{-\sigma t} \sin \omega_d t$, em que p e σ representam genericamente um inteiro e uma constante positivas. Assim sendo, $y_G(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ (devido às exponenciais negativas) e a resposta em regime do sistema se reduz a

$$y(t) = y_R(t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

4. Para obter $y_R(t)$ é necessário anti-transformar a expressão

$$Y_R(s) = \frac{\alpha}{s - j\omega} + \frac{\bar{\alpha}}{s + j\omega},$$

na qual α e $\bar{\alpha}$ (complexo conjugado de α) são os resíduos associados aos pólos de $R(s)$ ($s = j\omega$, $s = -j\omega$). Observamos que os resíduos de $Y_R(s)$ dependem de $G(s)$. De fato,

$$\begin{aligned}\alpha &= (s - j\omega)G(s)R(s)|_{s=j\omega}, \\ &= G(j\omega)\frac{A\omega}{2j\omega}, \\ &= \frac{AG(j\omega)}{2j}. \\ \bar{\alpha} &= (s + j\omega)G(s)R(s)|_{s=-j\omega}, \\ &= G(-j\omega)\frac{A\omega}{-2j\omega}, \\ &= \frac{-AG(-j\omega)}{2j}.\end{aligned}$$

Podemos expressar o número complexo $G(j\omega)$ na forma exponencial

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(j\omega)}, \quad (4)$$

na qual $|G(j\omega)|$ é a **magnitude** (ganho) e $\phi(j\omega)$ é a **fase** (ângulo) de $G(j\omega)$ na frequência ω . Representamos alternativamente a fase como $\angle G(j\omega)$. O fato de $G(j\omega)$ ser uma função racional em $j\omega$ garante as seguintes propriedades:

$$|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|, \quad (5)$$

$$\phi(-j\omega) = -\phi(j\omega). \quad (6)$$

A resposta em regime do sistema é

$$\begin{aligned}y(t) &= \alpha e^{j\omega t} + \bar{\alpha} e^{-j\omega t}, \\ &= \frac{AG(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{AG(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t}.\end{aligned}$$

Usando a representação (4), as propriedades (5)-(6) e denotando por simplicidade $\phi = \phi(j\omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{A}{2j}|G(j\omega)|e^{j(\omega t+\phi)} - \frac{A}{2j}|G(-j\omega)|e^{-j(\omega t+\phi)}, \\
 &= A|G(j\omega)| \left[\frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \right].
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y(t) = A|G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (7)$$

A resposta em regime do sistema $G(s)$ a uma entrada senoidal $r(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, $t \geq 0$, é também senoidal, da mesma frequência ω da entrada, porém defasada de ϕ (dependente de ω) em relação à entrada. A amplitude da resposta senoidal é $A|G(j\omega)|$, sendo a quantidade $|G(j\omega)|$ chamada de **ganho de regime** do sistema na frequência ω . Dizemos que o sistema $G(s)$ **amplifica** ou **atenua** a entrada $r(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, $t \geq 0$, quando $|G(j\omega)| > 1$ ou $|G(j\omega)| < 1$, respectivamente.

5. Exemplo. Considere o sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{5}{s+2}, \quad r(t) = 7 \operatorname{sen} 3t \quad (A = 7, \omega = 3 \text{ rad/s}).$$

Na frequência $\omega = 3 \text{ rad/s}$,

$$G(s)|_{s=j3} = \frac{5}{j3+2}, \quad |G(j3)| = 1.39, \quad \angle G(j3) = -56.3^\circ.$$

A resposta em regime do sistema é

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A|G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \\
 &= 7 \times 1.39 \times \operatorname{sen}(3t - 56.3^\circ), \\
 &= 9.71 \operatorname{sen}(3t - 56.3^\circ) \quad (t \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Diagramas de Bode

6. Suponha que os valores de $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$ sejam conhecidos para toda frequência ω no intervalo $0 < \omega < \infty$. Como $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$ caracterizam completamente $G(j\omega)$, dizemos conhecer a **resposta em frequência** do sistema modelado por $G(s)$. Os diagramas (gráficos)

$$|G(j\omega)| \times \omega \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) \times \omega$$

são chamados de **diagrama de magnitude** e **diagrama de fase** de $G(j\omega)$, respectivamente. Quando os diagramas são apresentados na forma $\log |G(j\omega)| \times \log \omega$ e $\angle G(j\omega) \times \log \omega$, recebem a denominação particular de **diagramas de Bode**. Normalmente a magnitude é representada em dB (decibél):

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)|,$$

na qual $\log$ significa logaritmo na base 10. A fase $\angle G(j\omega)$ é representada em graus. Utilizamos escalas lineares para representar a magnitude e a fase de $G(j\omega)$ e escala logarítmica para representar a frequência ω .

7. A obtenção dos diagramas de Bode de uma dada função $G(j\omega)$ seria uma tarefa mais árdua não fosse a possibilidade de construirmos **diagramas assintóticos** para $G(j\omega)$ a partir da sua decomposição em fatores mais simples. O procedimento geral para se obter os diagramas assintóticos de uma dada função $G(j\omega)$ será discutido através de um exemplo. Considere

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}.$$

- Fazendo $s = j\omega$, obtemos

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega+2)[(j\omega)^2+j\omega+2]};$$

- Os diversos fatores de $G(j\omega)$ são colocados na **forma padrão** ou **forma de Bode**, na qual os coeficientes constantes são todos iguais a 1:

$$G(j\omega) = \frac{7.5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]};$$

- As **frequências de corte** de $G(j\omega)$ são $\omega = 3$ (zero em $s = -3$), $\omega = 2$ (pólo em -2) e $\omega = \omega_n = \sqrt{2}$ (ω_n é a frequência natural dos pólos complexos conjugados);
- Magnitude de $G(j\omega)$ em dB:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log 7.5 + \\ &+ 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{3}\right)^2 + 1} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1} - \\ &- 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2}; \end{aligned}$$

- Fase de $G(j\omega)$ em graus:

$$\angle G(j\omega)|_{\text{graus}} = \tan^{-1} \frac{\omega}{3} - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{\frac{\omega}{2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)};$$

Obtemos a magnitude (em dB) e a fase (em graus) de $G(j\omega)$ subtraindo a soma das parcelas referentes aos fatores do numerador da soma das parcelas referentes aos fatores do denominador de $G(j\omega)$;

- Fatores assintóticos:

- Ganho constante:

$$\begin{aligned} \text{Magnitude: } & 20 \log 7.5 \text{ dB}, \quad 0 < \omega < \infty \\ \text{Fase: } & 0^\circ, \quad 0 < \omega < \infty \end{aligned}$$

- Zero em $s = -3$:

$$\begin{aligned} \text{Magnitude: } & \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } \omega \ll 3 \\ 20 \text{ dB/dec} & \text{se } \omega \gg 3 \end{cases} \\ \text{Fase: } & \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \ll 3 \\ 90^\circ & \text{se } \omega \gg 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- Pólo em $s = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Magnitude: } & -20 \log \omega, \quad 0 < \omega < \infty \\ \text{Fase: } & -90^\circ, \quad 0 < \omega < \infty \end{aligned}$$

- Pólo em $s = -2$:

$$\begin{aligned} \text{Magnitude: } & \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } \omega \ll 2 \\ -20 \text{ dB/dec} & \text{se } \omega \gg 2 \end{cases} \\ \text{Fase: } & \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \ll 2 \\ -90^\circ & \text{se } \omega \gg 2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Pólos complexos

Magnitude:

Se $\omega \ll \omega_n = \sqrt{2}$, então

$$-20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2} \simeq 0 \text{ dB}$$

Se $\omega \gg \omega_n = \sqrt{2}$, então

$$\begin{aligned} -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2} &\simeq \\ &\simeq -20 \log \frac{\omega^2}{2} \text{ dB} = -40 \log \frac{\omega}{\sqrt{2}} \text{ dB} \end{aligned}$$

As assíntotas de baixa e alta frequências se interceptam em $\omega = \omega_n = \sqrt{2}$. Para $\omega \gg \sqrt{2}$, o ganho cai com -40 dB/dec .

Fase:

$$\begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \ll \omega_n = \sqrt{2} \\ -180^\circ & \text{se } \omega \gg \omega_n = \sqrt{2} \end{cases}$$

8. Quando $\omega \ll \omega_c$, sendo ω_c a frequência de corte de um zero ou pólo real, obtemos 0 dB de magnitude. Por outro lado, quando $\omega \gg \omega_c$, a magnitude é dada por (+ para zero, – para pólo)

$$\pm 20 \log \frac{\omega}{\omega_c} = \pm (20 \log \omega - 20 \log \omega_c). \quad (8)$$

Uma **década** (dec) acima da frequência de corte ($\omega = 10\omega_c$) a magnitude terá variado $\pm 20 \text{ dB}$, duas décadas ($\omega = 10^2\omega_c$) acima, $\pm 40 \text{ dB}$, etc. Dizemos então que a **inclinação** da curva de magnitude do zero ou pólo real é de $\pm 20 \text{ dB/dec}$. As **assíntotas** de baixa ($\omega \ll \omega_c$, inclinação 0 dB/dec) e de alta ($\omega \gg \omega_c$) frequências se cruzam em $\omega = \omega_c$. O erro máximo introduzido pelo diagrama assintótico em relação ao diagrama real ocorre em $\omega = \omega_c$ e é dado por

$$\pm 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1} = \pm 20 \log \sqrt{2} \simeq \pm 3 \text{ dB}.$$

As fases de zeros e pólos reais nas suas frequências de corte valem $\pm 45^\circ$.

9. Uma análise similar revela que a inclinação da assíntota de alta frequência de um fator de segunda ordem (zeros ou pólos complexos conjugados) é de ± 40 dB/dec. A Figura R3.1 apresenta os fatores assintóticos (linhas tracejadas), o diagrama assintótico (linha traço-ponto) e o diagrama de magnitude exato (linha sólida) de $G(s) = 10(s+3)/[s(s+2)(s^2+s+2)]$. Obtemos o diagrama assintótico somando ao fator constante as inclinações dos fatores assintóticos nas suas frequências de corte, o que é possível devido à representação logarítmica da magnitude.

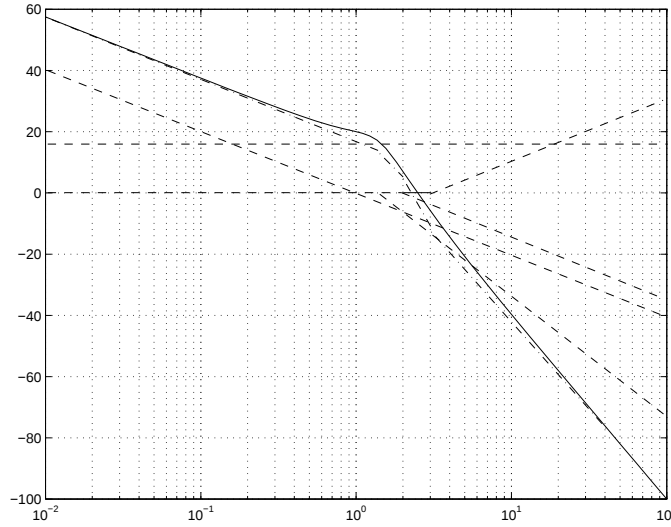


Figura R3.1: Diagramas de magnitude de $G(j\omega)$ - assintóticos e exato.

10. A magnitude exata do fator de segunda ordem na interseção das assíntotas de baixa (inclinação 0 dB/dec) e alta frequências, em $\omega = \omega_n$, depende de ξ . De fato, a magnitude de um fator de segunda ordem genérico seria

$$\pm 20 \log \sqrt{\left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}.$$

No exemplo ilustrativo, $\xi \simeq 0.35$. Os diagramas da Figura R3.2 são relativos ao fator de segunda ordem com $\omega_n = \sqrt{2}$ e ξ igualmente espaçado de 0.1 a 1.0. A medida que o fator de amortecimento ξ diminui, o pico da magnitude do fator de segunda ordem aumenta, assim com a rapidez com que a fase varia. Em $\omega = \omega_n$ a fase é sempre igual a -90° (não depende de ξ).

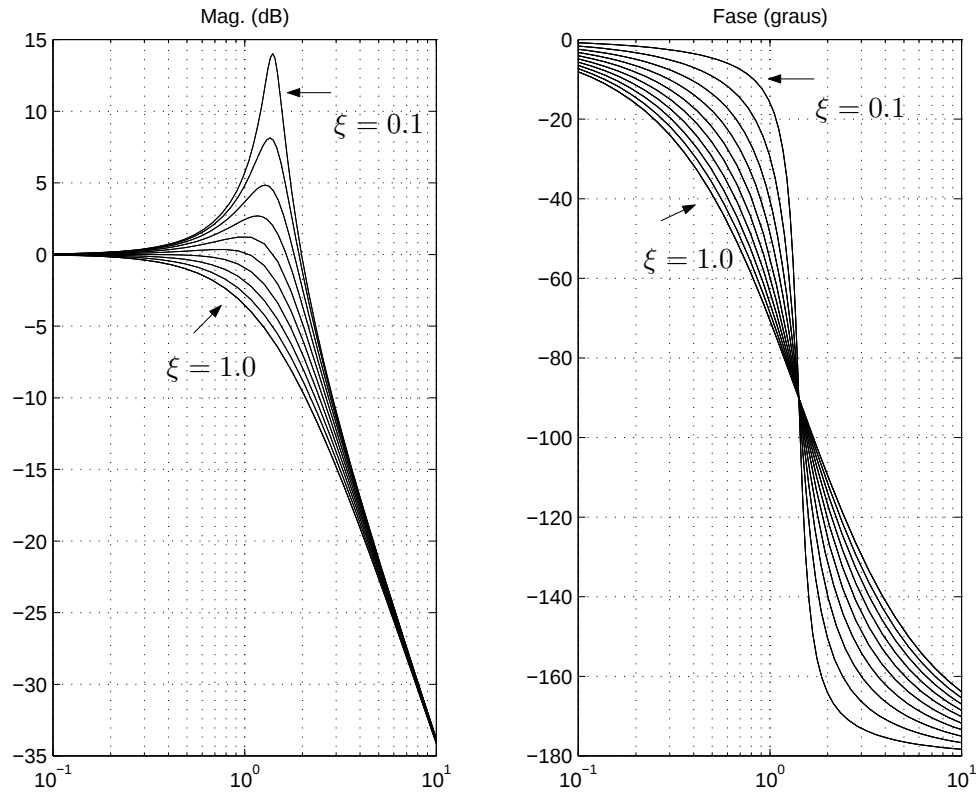


Figura R3.2: Magnitude e fase do fator de segunda ordem em função de ξ .

11. A frequência na qual $|G(j\omega)|$ apresenta seu pico, chamada de **frequência de ressonância**, ω_r , e a magnitude correspondente, chamada de **pico de ressonância**, M_r , são, respectivamente,

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{e} \quad M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad 0 \leq \xi \leq \sqrt{2}/2.$$

Não ocorre ressonância se $\xi > \sqrt{2}/2 \simeq 0.71$. Quando ξ tende a zero, a frequência de ressonância tende a ω_n e M_r tende ao infinito. Se um sistema $G(j\omega)$ tal que $\xi = 0$ for excitado na frequência ω_n , a magnitude $|G(j\omega_n)|$ torna-se infinita.

Aula 2

Representação de Sistemas

Modelagem
Linearização
Função de transferência
Diagrama de blocos

Modelagem

1. Os métodos tradicionais de análise e projeto de sistemas de controle partem da representação dos componentes do sistema através de modelos matemáticos. A modelagem quase sempre é baseada em leis físicas aplicáveis ao sistema de interesse.
2. Considere o problema de modelar a velocidade de um automóvel, representado na Figura 2.1. O automóvel, de massa total m , trafega a uma velocidade $v = v(t)$ movido pela força $u = u(t)$ produzida pelo motor. Assuma que o automóvel é um corpo rígido e que no seu movimento retilíneo não sofre forças de reação. Neste caso, a **segunda lei de Newton** determina que

$$m \dot{v} = u. \quad (9)$$

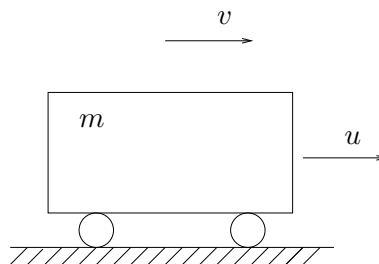


Figura 2.1: Modelo linear do automóvel.

3. Obtemos a velocidade do automóvel em qualquer instante $t \geq 0$ ($t = 0$ é o instante inicial de referência) resolvendo a equação diferencial linear de primeira ordem a coeficientes constantes (9), uma vez especificada a condição inicial $v(0) = v_0$. Em Controle dizemos que o modelo obtido é **linear** (equação diferen-

cial linear) e **invariante no tempo** (coeficientes não dependem do tempo). Entretanto, o modelo a ser adotado deve refletir todos os fatores julgados relevantes para descrever como a velocidade do automóvel se comporta em condições realistas. Alguns desses fatores são discutidos a seguir.

Atrito de rolagem. A superfície sob as rodas do automóvel introduz uma força de atrito de rolagem igual a μf_N , na qual μ é uma constante que depende das características de contato entre as rodas e superfície de rolagem e f_N é a **força normal** atuando na superfície;

Resistência do ar. O ar opõe resistência ao movimento na forma de uma força de reação igual a kv^2 , em que k é uma constante que depende das dimensões e da geometria do automóvel;

Inclinação da pista. A superfície de rolagem é normalmente uma sucessão de aclives e declives, as quais têm influência significativa na velocidade resultante do automóvel. A inclinação da superfície, $w = w(t)$, age como um **distúrbio externo**;

Massa variável. Para produzir a força propulsora do seu movimento, o automóvel consome combustível e portanto sua massa total varia no tempo ($m = m(t)$). A variação de massa age como um **distúrbio interno** (se não for modelada).

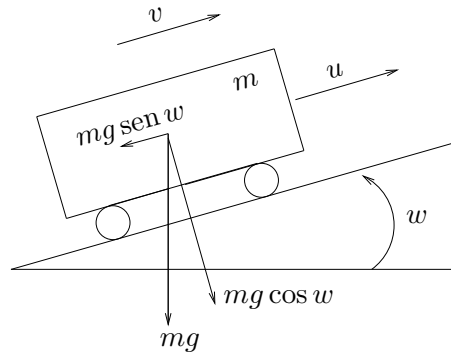


Figura 2.2: Modelo não-linear do automóvel.

4. Assumindo que a variação da massa do automóvel devida ao consumo de combustível tem pouca influência sobre o comportamento da velocidade, obtemos o

seguinte modelo **não-linear** (invariante no tempo) para descrever a velocidade do automóvel:

$$m\dot{v} = -kv^2 - \mu mg \cos w - mg \sin w + u. \quad (10)$$

5. O lado direito de (10) é a soma das forças que atuam na direção do movimento do automóvel, como ilustra a Figura 2.2. Observe v , u e w dependem de t .

Linearização

6. Os métodos de análise e projeto discutidos em cursos introdutórios de Controle são válidos apenas para sistemas lineares invariantes no tempo (LIT's). Tendo chegado ao modelo mais simples que representa a planta a ser controlada, devemos proceder à **linearização** do modelo, caso este seja não-linear.

7. Parece um contra-senso obter um modelo não-linear para depois linearizá-lo, mas existem boas razões para fazermos isso.

- a) A linearização é feita em torno de uma **condição nominal** (ponto de equilíbrio) do modelo. Uma condição nominal seria, por exemplo, um automóvel trafegando com velocidade constante de $v^0 = 80$ km/h numa superfície de inclinação constante de $w^0 = 0^\circ$;
- b) Se o sistema de controle de velocidade for adequadamente projetado, a velocidade do automóvel face as forças externas e distúrbios será **regulada** próxima à velocidade desejada. Se a inclinação da superfície não sofrer grandes variações e a velocidade for mantida próxima à nominal, o comportamento do modelo linearizado será aproximadamente igual ao do modelo não-linear;
- c) Após a utilização de métodos clássicos de análise e projeto para sistemas LIT's, o modelo não-linear completo pode servir para validar, via **simulação** com Matlab/Simulink, por exemplo, os resultados obtidos através do modelo linearizado, antes da efetiva implementação de um sistema automático para controle de velocidade;
- d) Eventualmente a modelagem/linearização pode levar a resultados insatisfatórios do ponto de vista de controle. Devemos então rever a modelagem, incorporando fatores deixados de fora numa primeira etapa, ou adotando métodos mais adequados a modelos não-lineares.

8. A linearização é geralmente baseada na expansão do modelo não-linear em **Série de Taylor**. Os dois primeiros termos (aproximação linear) de uma função f qualquer de v , w e u em torno do ponto (v^0, w^0, u^0) seria

$$f(v, u, w) = f(v^0, u^0, w^0) + f_v(v^0, u^0, w^0)(v - v^0) + f_w(v^0, u^0, w^0)(w - w^0) + f_u(v^0, u^0, w^0)(u - u^0).$$

na qual f_x representa a **derivada parcial** de f em relação a uma variável genérica x . Representando o lado direito de (10) como $f(v, w, u)$, computamos o valor nominal u^0 correspondente a v^0 e w^0 resolvendo a equação $0 = f(v^0, w^0, u)$, pois na condição nominal, $\dot{v} = 0$. Obtemos assim a entrada nominal de controle

$$u^0 = k(v^0)^2 + \mu mg \cos w^0 + mg \sin w^0,$$

e conseqüentemente $f(v^0, w^0, u^0) = 0$. Introduzindo as **variáveis de desvio** (em relação aos valores nominais) $\delta v = v - v^0$, $\delta w = w - w^0$ e $\delta u = u - u^0$, chegamos então ao seguinte modelo linearizado para a velocidade do automóvel (observe que $\dot{v} = \dot{\delta v}$):

$$\dot{\delta v} = -a\delta v + b_1\delta u + b_2\delta w, \quad (11)$$

na qual $a = 2kv^0/m$, $b_1 = 1/m$ e $b_2 = \mu g \sin w^0 - g \cos w^0$.

Função de transferência

9. Modelos lineares invariantes no tempo podem ser representados no domínio da frequência complexa s através do conceito de **função de transferência**. Uma função de transferência é obtida quando se divide a transformada de Laplace ($\mathcal{L}$) de uma variável de saída pela transformada de Laplace de uma variável de entrada.

10. Num sistema de controle em malha fechada para regular a velocidade do automóvel, a variável de saída é a velocidade do automóvel, $y = v$, e as variáveis de entrada (variáveis independentes) são a força produzida pelo motor, u , e o distúrbio externo introduzido pela inclinação da superfície, w .

11. O modelo linearizado (11) relaciona a variação da saída às variações na entrada controlada e na entrada de distúrbio relativamente aos seus valores nominais. Tomando a transformada de Laplace de (11) com condição inicial $y(0) = 0$ (variação

inicial zero), obtemos

$$s\Delta Y(s) = -a\Delta Y(s) + b_1\Delta U(s) + b_2\Delta W(s), \quad (12)$$

em que $\Delta Y(s) = \mathcal{L}[\delta y(t)]$ e assim por diante. A equação (12) pode ser rearranjada de forma a se explicitar a variação da saída δy como uma soma de variações produzidas pelas entradas δu e δw :

$$\begin{aligned} \Delta Y(s) &= \frac{b_1}{s+a}\Delta U(s) + \frac{b_2}{s+a}\Delta W(s), \\ &= P_{yu}(s)\Delta U(s) + P_{yw}(s)\Delta W(s), \\ &= \Delta Y_u(s) + \Delta Y_w(s), \end{aligned}$$

na qual $P_{yu}(s)$ e $P_{yw}(s)$ são as funções de transferência das entradas δu e δw para a saída δy , respectivamente. Pelo **Princípio da Superposição**, se δy_u e δy_w são as saídas devidas as ações das entradas δu (com $\delta w = 0$) e δw (com $\delta u = 0$), respectivamente, então a saída devida a ação conjunta das entradas δu e δw é $\delta y = \delta y_u + \delta y_w$.

12. Num sistema de controle em malha fechada para regulação de velocidade, a variação de velocidade medida, δy , é comparada com a referência $r = 0$ ($r(t) = 0$, $t \geq 0$), pois deseja-se variação nula (velocidade nominal) **em regime** (isto é, quando $t \rightarrow \infty$). O erro resultante serve de entrada para um controlador representado pela função de transferência $C(s)$. A saída de $C(s)$ é a variação da entrada, δu , necessária para compensar a variação da saída do sistema, δy .

13. A Figura 2.3 apresenta o **diagrama de blocos** de um sistema de controle em malha fechada que poderia ser utilizado para resolver o **problema da regulação** de velocidade do automóvel. O esquema de controle deve ser entendido da seguinte forma: numa primeira etapa, o automóvel é levado à condição nominal desejada (y^0, w^0), quando então o controle assume o valor u^0 . Em seguida o sistema da Figura 2.3 passa a funcionar para manter a velocidade em y^0 . Observemos que os valores **efetivos** da saída, do controle e do distúrbio são $y^0 + \delta y$, $u^0 + \delta u$ e $w^0 + \delta w$, respectivamente.

14. Num diagrama de blocos como a da Figura 2.3 indicamos as variáveis no domínio do tempo, deixando implícito que $\delta u(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)E(s)]$. Uma das principais funções do controlador $C(s)$ no sistema de controle em malha fechada representado na Figura 2.3 é a de **rejeição de distúrbios**: a variação de velocidade

(δy) eventualmente produzida pela variação na inclinação da superfície (δw) deve tender a zero (em regime) pela ação da variação no controle (δu).

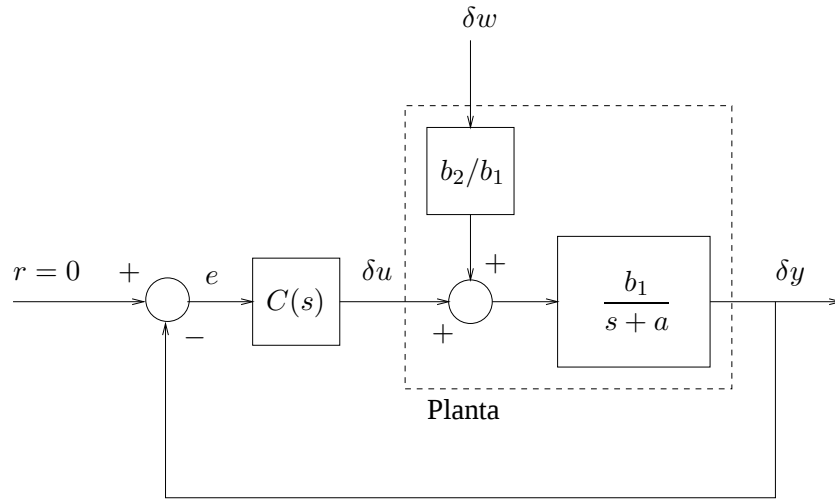


Figura 2.3: Regulação de velocidade do automóvel.

15. Projetamos controladores para atender a **especificações de desempenho** como a rejeição de distúrbios. Outras especificações poderiam restringir o comportamento transitório da saída após a ocorrência de distúrbios, como ao se especificar um intervalo de tempo máximo para o retorno da saída ao seu valor nominal.

16. Na prática, projetar um controlador significa determinar os coeficientes da função de transferência $C(s)$ de forma a que todas as especificações de desempenho sejam atendidas. Mostraremos mais tarde que um distúrbio do tipo **degrau** na velocidade do automóvel, produzido, por exemplo, quando a inclinação w muda subitamente de valor, um controlador do tipo PI (Proporcional + Integral), dado por

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{sk_p + k_i}{s},$$

seria adequado. Projetar o controlador, neste caso, significaria determinar os ganhos k_p (proporcional) e k_i (integral) necessários para rejeitar o distúrbio e ao mesmo tempo atender outras eventuais especificações de desempenho.

Aula 3

Representação de Sistemas

Controle de motores DC

Instabilidade: pêndulo invertido

Representações por variáveis de estado

Limitações dos modelos matemáticos

Controle de motores DC

1. **Motores DC** (do inglês, *direct-current*, isto é, corrente direta) são um dos dispositivos mais utilizados pela indústria como fonte primária de movimento. São às vezes chamados de **servomotores DC** quando empregados em aplicações de controle. Exibem diversas características favoráveis como controlabilidade, portabilidade, baixos custos de aquisição e manutenção e adaptabilidade a vários tipos de sistemas de controle.

2. Motores DC de média a elevada potência são usados no controle de esteiras, servoválvulas, máquinas-ferramentas e sistemas robóticos, entre outras aplicações. Alguns motores DC possuem constantes de tempo extremamente pequenas, sendo ideais para aplicações de (relativamente) baixa potência, como no controle de discos e fitas magnéticas, impressoras e *plotters*.

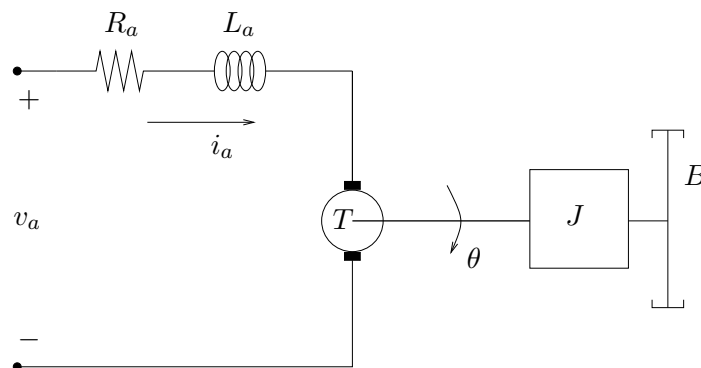


Figura 3.1: Motor DC controlado pela armadura (campo constante).

3. **Modelagem.** Basicamente, um motor DC converte energia elétrica em energia mecânica. Em alguns motores DC, o campo magnético é produzido por um ímã permanente e, portanto, o fluxo magnético é constante. Neste caso, o torque desenvolvido no eixo do motor pode ser controlado através do chamado **circuito de armadura**, como ilustra a Figura 3.1. As quantidades presentes no esquema da Figura 3.1 são as seguintes:

- R_a : resistência da armadura;
- L_a : indutância da armadura;
- v_a : tensão aplicada aos terminais da armadura;
- i_a : corrente circulando na armadura;
- T : torque desenvolvido no eixo do motor;
- J : momento de inércia equivalente;
- B : coeficiente de atrito viscoso equivalente;
- θ : deslocamento angular do eixo do motor.

As constantes J e B representam o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso equivalente do motor, da carga (uma antena, por exemplo) e das engrenagens utilizadas, referidas ao eixo do motor.

4. O torque desenvolvido no eixo do motor é proporcional à corrente de campo:

$$T = k_t i_a.$$

A constante de torque k_t depende de características construtivas do motor. A rotação do eixo do motor induz uma **força contra-eletromotriz**, a qual provoca uma queda de tensão no circuito de armadura, proporcional à velocidade angular do eixo:

$$v_f = k_f \frac{d\theta}{dt},$$

em que k_f é a constante de força contra-eletromotriz. A **equação elétrica** do motor DC assume então a forma

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - v_f, \quad v_f = k_f \frac{d\theta}{dt}. \quad (13)$$

Por sua vez, a **equação mecânica** do motor DC é dada por

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} = T = k_t i_a. \quad (14)$$

Tomando as transformadas de Laplace de (13) e (14) com condições iniciais nulas, obtemos, respectivamente,

$$(L_a s + R_a)I_a(s) = V_a(s) - V_f(s), \quad V_f(s) = k_f s \Theta(s), \quad (15)$$

e

$$(J s^2 + B s) \Theta(s) = T(s) = k_t I_a(s). \quad (16)$$

5. No diagrama de blocos apresentado na Figura 3.2, correspondente às equações (15) e (16), o sistema eletromecânico é visto como composto por dois subsistemas: elétrico (circuito de armadura) e mecânico (motor, carga e engrenagens). Observamos também a existência de uma **realimentação interna** (natural) no motor DC. Podemos simplificar o diagrama da Figura 3.2 e apresentar a relação entre a tensão de armadura e o deslocamento angular do eixo como na Figura 3.3.

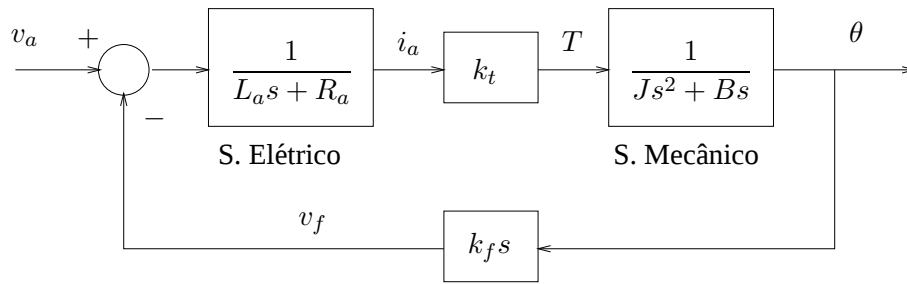


Figura 3.2: Diagrama de blocos do motor DC.

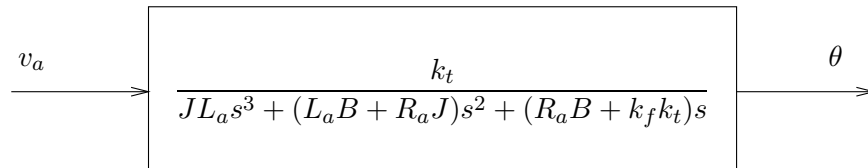


Figura 3.3: Diagrama simplificado do motor DC.

A função de transferência entre v_a e θ é de terceira ordem. (Notamos que a função de transferência entre v_a e $\dot{\theta}$, a velocidade angular do motor, é de segunda ordem.) Em alguns motores DC, a indutância de armadura é muito pequena. Quando a indutância é desprezada ($L_a \approx 0$), obtemos um modelo reduzido de segunda ordem, na forma

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{k}{s(\tau s + 1)},$$

sendo k e τ , respectivamente, o ganho e a constante de tempo do motor, os quais são completamente caracterizados pelos parâmetros do modelo:

$$k = \frac{k_t}{R_a B + k_t k_f}, \quad \tau = \frac{R_a J}{R_a B + k_t k_f}.$$

6. Suponha que uma referência angular a ser seguida pelo eixo do motor é convertida de radianos em volts através de um potenciômetro de ganho k_s (V/rad), e que outro potenciômetro com a mesma escala se encontra conectado ao eixo do motor, fornecendo uma tensão proporcional ao deslocamento produzido. Neste caso, um sistema de controle com realimentação unitária para a posição angular do eixo do motor DC poderia assumir a estrutura apresentada na Figura 3.4.

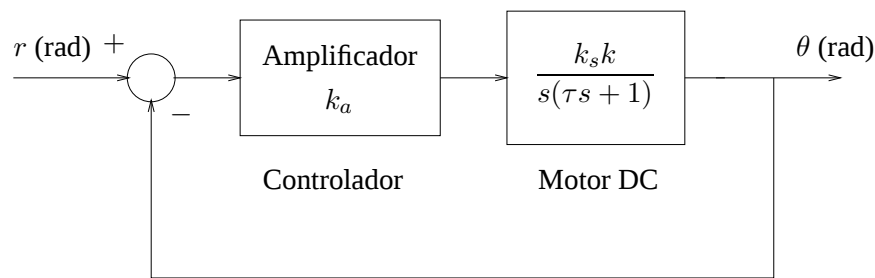


Figura 3.4: Sistema de controle em malha fechada.

Podemos mostrar que a ação proporcional produzida pelo amplificador (controlador), combinada com a ação integral produzida pelo pólo do motor na origem, é suficiente para que a saída passe a seguir qualquer referência constante.

Instabilidade: pêndulo invertido

7. Uma das principais aplicações de sistemas de controle é na estabilização de sistemas naturalmente instáveis em malha aberta. A Figura 3.5 ilustra um sistema composto por um **pêndulo invertido** montado sobre um carro, o qual pode ser movimentado em linha reta através de um motor DC. O objetivo do sistema de controle seria manter o pêndulo na posição vertical. O pêndulo invertido modela problemas de controle importantes em Engenharia, como o **controle de atitude** (posição) de um veículo lançador de satélites. Um problema com características similares é o da **levitação magnética**, presente em aplicações como o controle de trens de alta velocidade.

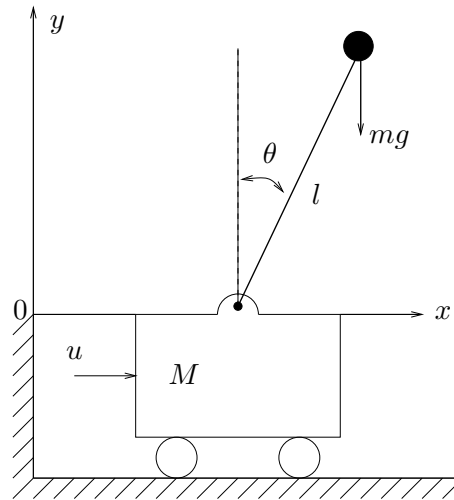


Figura 3.5: Pêndulo invertido.

8. Modelagem. O sistema da Figura 3.5 é **instável**, no sentido de que o pêndulo tende a se afastar da posição vertical por menor que seja a força aplicada ao carro. O modelo linearizado do pêndulo invertido em torno da posição de equilíbrio instável ($\theta = 0, x = 0$) é

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = u, \quad (17)$$

$$ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + ml \frac{d^2 x}{dt^2} = mgl\theta, \quad (18)$$

Os parâmetros e variáveis presentes no esquema da Figura 3.5 encontram-se definidos a seguir.

- θ : ângulo formado pelo pêndulo com a vertical;
- l : comprimento do pêndulo;
- m : massa do pêndulo (concentrada na extremidade);
- M : massa do carro;
- u : força aplicada ao carro;
- x : deslocamento linear do carro;
- g : aceleração da gravidade.

Adotando a notação compacta para derivadas e eliminando a derivada segunda

em relação a x na equação (17) ($\ddot{x} = g\theta - l\ddot{\theta}$, equação (18)), obtemos

$$Ml\ddot{\theta} - (M + m)g\theta = -u,$$

cujas transformadas de Laplace com condições iniciais nulas conduzem à função de transferência entre a força u aplicada ao carro (variável de controle) e o ângulo θ formado pelo pêndulo com a vertical (variável de saída):

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-1}{Mls^2 - (M + m)g}.$$

O sinal menos na função de transferência do pêndulo reflete o fato de que o pêndulo sempre se move na direção contrária à da força aplicada. Os pólos (reais) da função de transferência são

$$p_1 = +\sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}} \quad \text{e} \quad p_2 = -\sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}},$$

e a origem da instabilidade do pêndulo é o pólo real positivo. De fato, a resposta temporal do pêndulo a qualquer entrada limitada (um degrau unitário, por exemplo) é uma soma de termos que inclui as exponenciais $e^{p_1 t}$ e $e^{p_2 t}$. A instabilidade do pêndulo se traduz no crescimento ilimitado da exponencial $e^{p_1 t}$, $p_1 > 0$, quando o tempo tende para infinito.

9. Um sistema de controle em malha fechada como o da Figura 3.6 pode estabilizar o pêndulo invertido, na medida em que, sob hipóteses relativamente fracas, os pólos da função de transferência de malha fechada entre a referência $r = 0$ (posição angular desejada) e θ (posição angular do pêndulo) podem ser arbitrariamente escolhidos, e então impostos por um controlador dinâmico $C(s)$. Pólos com partes reais negativas são uma escolha obrigatória para a estabilidade do sistema em malha fechada.

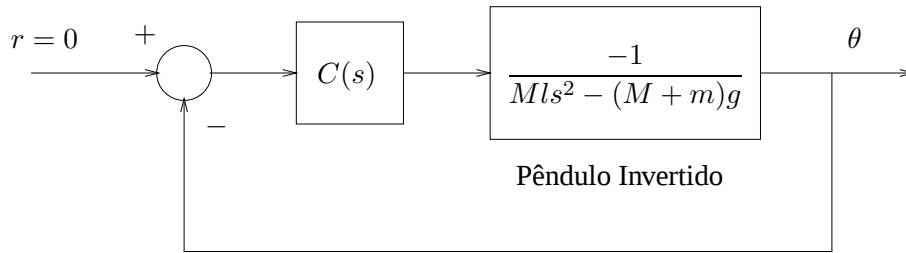


Figura 3.6: Controle em malha fechada do pêndulo invertido.

Representações por variáveis de estado

10. As representações de sistemas dinâmicos por funções de transferência são do tipo **entrada-saída**, isto é, evidenciam a relação de transferência entre uma dada entrada e uma dada saída. Variáveis internas, como a corrente de armadura no modelo do motor DC ou o deslocamento linear do carro no modelo do pêndulo invertido, não são explicitamente indicadas. Podemos obter uma representação alternativa, na qual as variáveis internas do sistema são explicitadas, através do conceito de **estado**.

11. **Estado.** O estado de um sistema dinâmico pode ser definido como um conjunto de n variáveis, denotadas por $x_1, x_2, \dots, x_n$ e chamadas de **variáveis de estado**, cujo conhecimento num dado instante de tempo $t = t_0$, aliado ao conhecimento da entrada do sistema para todo $t \geq t_0$, permite determinar $x_1, x_2, \dots, x_n$ para qualquer $t \geq t_0$.

12. **Exemplos.** Considere inicialmente o modelo do motor DC controlado pela armadura. Para mostrar que $\theta, \dot{\theta}$ e i_a constituem o estado do sistema, definimos $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ e $x_3 = i_a$ ($n = 3$). A entrada e a saída do sistema são $u = v_a$ e $y = \theta$, respectivamente. Escrevendo as derivadas de x_1, x_2 e x_3 em relação ao tempo em termos de x_1, x_2 e x_3 , obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 - \beta x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\gamma x_2 - \rho x_3 + \eta u, \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

em que

$$\alpha = \frac{B}{J}, \quad \beta = \frac{k_t}{J}, \quad \gamma = \frac{k_f}{L_a}, \quad \rho = \frac{R_a}{L_a} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{1}{L_a}.$$

Assumindo que as quantidades $x_1(t_0), x_2(t_0)$ e $x_3(t_0)$ são conhecidas, assim como a entrada $u(t)$, $t \geq t_0$, podemos resolver o sistema de equações lineares de primeira ordem acima e obter x_1, x_2 e x_3 para qualquer $t \geq t_0$, isto é, o **comportamento futuro** do sistema. Um número menor de variáveis (apenas x_1 e x_2 , por exemplo) não apresentaria a mesma propriedade.

As variáveis de estado naturais no modelo do pêndulo invertido são $x_1 = \theta$,

$x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$ e $x_4 = \dot{x}$. Com essas definições, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 - \beta u, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\gamma x_1 + \rho u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

em que

$$\alpha = \frac{(M+m)g}{Ml}, \quad \beta = \frac{1}{Ml}, \quad \gamma = \frac{m}{M} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{M}.$$

13. As equações diferenciais envolvendo os estados são chamadas de **equações de estado**. A equação algébrica envolvendo a saída é chamada de **equação de saída**. Um importante subproduto da representação de sistemas por variáveis de estado é a possibilidade de empregarmos uma poderosa notação matricial para as equações de estado e de saída. Como exemplo, o modelo do pêndulo invertido poderia ser descrito em termos matriciais da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Se a saída tivesse sido definida como sendo a aceleração angular, $\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$, então a equação de saída assumiria a forma

$$y = -\alpha x_1 - \beta u = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [-\beta]u,$$

e obteríamos também $D = [-\beta]$ (escalar). Definindo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = [-\beta],$$

podemos representar o pêndulo invertido (e qualquer outro sistema linear invariante no tempo) na forma matricial compacta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du.\end{aligned}$$

Uma representação ainda mais geral é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + B_w w, \\ y &= Cx + Du + D_v v.\end{aligned}$$

na qual as matrizes B_w e D_v (escalar) indicam como os distúrbios w e v afetam as variáveis de estado e de saída do sistema. Exemplo: no modelo do pêndulo invertido, uma força de distúrbio w contrária ao movimento do carro seria transmitida aos estados através de

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix}.$$

Limitações dos modelos matemáticos

14. Qualquer modelo matemático, independentemente da representação adotada, é uma aproximação do sistema dinâmico de interesse. Em princípio, a validade dos modelos lineares invariantes no tempo (LIT's) utilizados neste curso é questionável, se considerarmos que todo sistema dinâmico é, em geral, não-linear e variante no tempo. A validade dos modelos LIT's no contexto de sistemas de controle é em grande parte consequência da realimentação, como argumentado abaixo.

Não-linearidade. O modelo não-linear, mais fiel à planta, pode ser linearizado num ponto de operação desejado, como $\theta = 0$, $x = 0$, no caso do pêndulo invertido. O modelo linearizado é válido apenas no entorno desse ponto. Entretanto, se convenientemente projetado, o sistema de controle em malha fechada faz com que a planta (e seus modelos não-linear e linear) **não se afaste** do ponto de operação, assegurando desta forma a validade do modelo linear;

Variação no tempo. Os valores dos parâmetros de um sistema dinâmico geralmente sofrem variações ao longo do tempo devido aos efeitos de envelhecimento e desgaste. Um sistema de controle em malha fechada é capaz de **compensar** variações paramétricas se essas variações forem muito mais lentas do que a dinâmica do sistema de controle. A maioria dos sistemas dinâmicos industriais satisfaz essa premissa e tudo se passa, na prática, como se o sistema fosse invariante no tempo.

14. Duas outras possíveis fontes de problemas para a operação de sistemas de controle são **dinâmicas não-modeladas** e **incertezas paramétricas**.

Dinâmica não-modelada. Ao desprezarmos a indutância de armadura no modelo do motor DC para passar de um modelo de terceira ordem para um de segunda ordem, estamos também desprezando a **dinâmica** do circuito de armadura. Admitimos implicitamente que o modelo de segunda ordem é válido porque o sinal de entrada do circuito de armadura (Figura 3.2) não consegue excitar o **modo elétrico** do sistema, cuja constante de tempo (frequência de corte) é muito menor (maior) do que a constante de tempo (frequência de corte) do **modo mecânico**. Desde que os sinais presentes no sistema de controle em malha fechada não excitam dinâmicas não-modeladas, podemos deixar essas dinâmicas fora do modelo;

Incerteza paramétrica. Mesmo admitindo que os parâmetros do sistema não variam com o tempo, podemos ter um conhecimento apenas aproximado dos seus valores. Em alguns casos, conhecemos os valores nominais e as **tolerâncias** em relação aos valores nominais dos parâmetros. Quando dizemos que a resistência de armadura de um motor é R_a com tolerância de $\pm 10\%$, estamos querendo dizer que qualquer valor de resistência entre $0.9R_a$ e $1.1R_a$ é possível. Mais uma vez, a realimentação pode compensar nossa incerteza com relação aos parâmetros, desde que o sistema de controle em malha fechada seja projetado para ser **robusto**, isto é, para produzir o desempenho desejado **independentemente** dos valores reais dos parâmetros.

Aula 4

Estabilidade Entrada-Saída

Atributos de um sistema de controle
Sistema um-grau-de-liberdade
Estabilidade entrada-saída

Atributos de um sistema de controle

1. Entre os atributos que todo sistema de controle deve apresentar, destacamos as seguintes:

Garantir estabilidade. O atributo primordial de um sistema de controle, sem o qual nenhum outro pode existir, é assegurar a estabilidade do sistema. Sistemas de controle são usados para estabilizar plantas instáveis ou para melhorar as condições de estabilidade de plantas estáveis, mas muito oscilatórias;

Controlar erros de regime. Sistemas de controle são normalmente projetados para que a saída do sistema passe a rastrear determinadas entradas de referência, isto é, para que erro entre o valor de uma dada referência e o valor medido da saída tenda a zero quando o tempo tender ao infinito (regime);

Reduzir sensibilidade a variações de parâmetros. Sistemas de controle são projetados a partir de modelos matemáticos que aproximam o comportamento dos componentes físicos do sistema. Sistemas de controle devem ser relativamente insensíveis às aproximações e às variações dos parâmetros dos modelos adotados;

Rejeitar a ação de distúrbios. Sistemas de controle devem **rejeitar** (fazer desaparecer com o tempo) a ação de entradas externas indesejáveis que possam agir sobre os componentes do sistema. Idealmente, sistemas de controle não deveriam responder a essas entradas externas;

Controlar a resposta transitória. A forma como um sistema de controle atinge a condição de regime é muito importante. Controlar a resposta transitória significa moldar o comportamento de uma variável, geralmente a saída do sistema, em termos de tempo de subida, sobre-elevação, tempo de acomodação, etc..

Controlar a resposta em frequência. Sistemas de controle podem ser vistos como **filtros**: devem deixar passar apenas as componentes de frequência do sinal de entrada que desejamos reproduzir (rastrear). Sinais fora da **faixa de passagem** do sistema, como ruídos aos quais o sistema de controle possa estar sujeito, devem ser suficientemente atenuados.

Sistema um-grau-de-liberdade

2. Passamos a analisar mais detalhadamente as características de sistemas de controle em malha fechada através do diagrama de blocos da Figura 4.1, que representa um sistema de controle conhecido como **um-grau-de-liberdade** pelas razões exposta a seguir. O sistema ilustrado na Figura 4.1 possui três variáveis de entrada – r (referência), w (distúrbio na planta) e v (distúrbio no sensor) – e três variáveis de saída – e (erro), u (controle) e y (saída medida). As variáveis de entrada são independentes: afetam, mas não são afetadas pelas variáveis de saída.

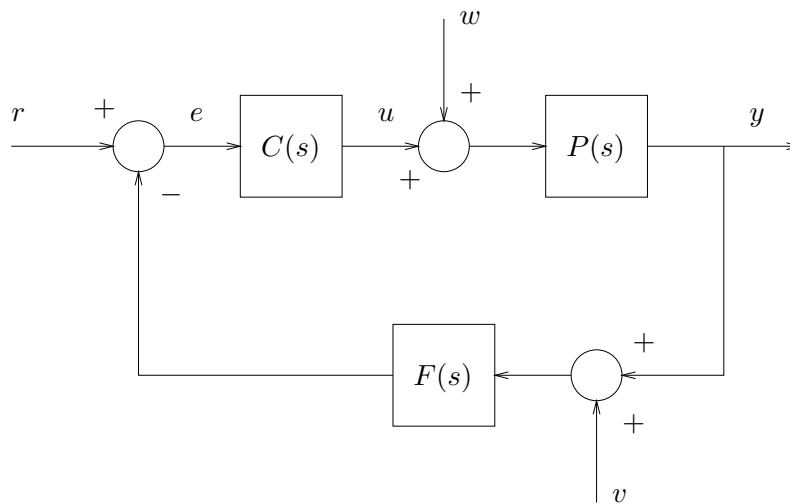


Figura 4.1: Sistema de controle em malha fechada.

3. A função de transferência de malha fechada de qualquer entrada para qualquer saída pode ser determinada a partir das funções de transferência de malha aberta $C(s)$ (controlador), $P(s)$ (planta) e $F(s)$ (sensor). Como cada entrada gera três funções de transferência de malha fechada, existem nove funções deste tipo no diagrama de blocos da Figura 4.1. Cada uma delas fornece um tipo de informação

a respeito do funcionamento do sistema.

4. Cada variável de saída é uma função simultânea das três variáveis de entrada. Denotando uma função de malha fechada genérica como $T_{zx}(s)$, sendo x a entrada e z a saída, e aplicando o Princípio da Superposição ao diagrama da Figura 4.1, obtemos as saídas como funções das entradas no domínio da transformada de Laplace:

$$E(s) = T_{er}(s)R(s) + T_{ew}(s)W(s) + T_{ev}(s)V(s), \quad (19)$$

$$U(s) = T_{ur}(s)R(s) + T_{uw}(s)W(s) + T_{uv}(s)V(s), \quad (20)$$

$$Y(s) = T_{yr}(s)R(s) + T_{yw}(s)W(s) + T_{yv}(s)V(s). \quad (21)$$

5. Análise e projeto. Cada função de transferência de malha fechada é escrita em termos das funções de malha aberta $C(s)$, $P(s)$ e $F(s)$. Se estas últimas são conhecidas, assim como $R(s)$, $W(s)$ e $V(s)$ (as transformadas de r , w e v), podemos obter $E(s)$, $U(s)$ e $Y(s)$, e em seguida e , u e y através de anti-transformada de Laplace. Podemos assim **analisar** o desempenho do sistema de controle em relação a determinadas entradas quando um dado controlador $C(s)$ é utilizado. Se podemos analisar, podemos também **projetar** um sistema de controle, definindo um controlador $C(s)$ que atenda a certas **especificações de desempenho** associadas aos atributos discutidos anteriormente.

6. Um dos objetivos do sistema de controle em malha fechada da Figura 4.1 é fazer a saída da planta rastrear uma dada entrada de referência. A resposta da planta à entrada de referência pode ser analisada a partir da função de transferência $T_{yr}(s)$. Do diagrama de blocos da Fig. 4.1 e das transformadas de Laplace dos sinais r , e , u e y , obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - F(s)Y(s), \\ &= R(s) - P(s)F(s)U(s), \\ &= R(s) - C(s)P(s)F(s)E(s). \end{aligned}$$

A função de transferência de malha fechada entre a entrada de referência e o erro de rastreamento é então dada por

$$T_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)F(s)}.$$

A função de transferência de malha fechada entre a entrada de referência e a entrada de controle pode ser obtida da seguinte forma:

$$T_{ur}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{E(s)U(s)}{R(s)E(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}.$$

Finalmente, a função de transferência de malha fechada entre a entrada de referência e a saída da planta é dada por

$$T_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U(s)}{R(s)} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}.$$

7. As demais funções de malha fechada podem ser obtidas de maneira análoga, manipulando o diagrama de blocos da Figura 4.1 de forma a eliminar variáveis intermediárias entre a entrada e a saída desejadas. Os numeradores das funções de malha fechada são variáveis – dependem de $C(s)$, $P(s)$ e $F(s)$ de formas diferentes – mas o denominador é sempre o mesmo: $1 + C(s)P(s)F(s)$. Neste sentido, dizemos que o sistema de controle da Figura 4.1 é do tipo **um-grau-de-liberdade**, pois uma vez definida a função de transferência do controlador $C(s)$, todas as demais funções ficam automaticamente caracterizadas.

Estabilidade entrada-saída

8. O comportamento do sistema de controle em malha fechada da Figura 4.1 é enormemente influenciado pela função $1 + C(s)P(s)F(s)$. Definimos a **equação característica** do sistema em malha fechada como

$$1 + C(s)P(s)F(s) = 0. \quad (22)$$

As raízes da equação característica determinam muito do comportamento dinâmico do sistema em malha fechada e serão melhor explicitadas através das representações de $C(s)$, $P(s)$ e $F(s)$ na forma polinomial:

$$C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}, \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}.$$

Os graus do numerador (N) e do denominador (D) de uma função de transferência qualquer serão denotados por m e n , respectivamente. Assumimos que $m \leq n$, e que, sem perda de generalidade, o coeficiente de grau n do denominador é unitário. Na discussão a seguir tomamos uma função de malha fechada genérica $T(s)$. Na notação polinomial,

$$T(s) = \frac{N_T(s)}{D_T(s)} = \frac{N_T(s)}{D_C(s)D_P(s)D_F(s) + N_C(s)N_P(s)N_F(s)}, \quad (23)$$

na qual $N_T(s)$ é qualquer dos numeradores das funções de malha fechada. Exemplo: se $T(s) = T_{ry}(s)$, então $N_T(s) = N_C(s)N_P(s)D_F(s)$ (verifique). A ordem

de $T(s)$ é

$$n_T = n_C + n_P + n_F.$$

e a equação característica (22) é equivalente a equação polinomial

$$D_T(s) = D_C(s)D_P(s)D_F(s) + N_C(s)N_P(s)N_F(s) = 0. \quad (24)$$

Se não houver cancelamentos entre as n_T raízes de $N_T(s) = 0$ e as n_T raízes de $D_T(s) = 0$, então as primeiras são os **zeros** e as segundas os **pólos** da função de transferência de malha fechada $T(s)$.

9. Dizemos que um sinal qualquer x é **limitado** se existe uma constante $M > 0$ tal que $|x(t)| < M$ para todo $t \geq 0$. O degrau de amplitude A é um exemplo de sinal limitado. Um sinal do tipo rampa de inclinação $A s^{-1}$ é ilimitado, pois qualquer que seja $M > 0$, sempre existirá um tempo $t > 0$ tal que $|At| \geq M$. Observamos que a soma de sinais limitados é também um sinal limitado.

10. Recordemos que um sistema dinâmico é **estável do ponto de vista entrada-saída**, ou **BIBO-estável** (do inglês, **Bounded-Input-Bounded-Output**), se a resposta do sistema a qualquer entrada limitada é também limitada. Supondo que x (transformada $X(s)$) é qualquer entrada limitada, desejamos estabelecer as condições sob as quais a saída z (transformada $Z(s)$) do sistema modelado por $T(s)$ será também limitada. No presente contexto, x representa genericamente r , w ou v , enquanto que z representa genericamente e , u ou y .

11. Passamos então a analisar a anti-transformada de $Z(s) = T(s)X(s)$, isto é, a resposta de $T(s)$ à entrada $X(s)$. Para obter a expansão em frações parciais de $Z(s)$ é necessário determinar os pólos de $T(s)$ e de $X(s)$. Os pólos de $T(s)$ são as raízes de $D_T(s) = 0$; os pólos de $X(s) = N_X(s)/D_X(s)$ são as raízes de $D_X(s) = 0$.

12. **Exemplo.** Considere $x(t) = \sin t$, $t \geq 0$ (entrada senoidal, limitada). Então

$$X(s) = \frac{N_X(s)}{D_X(s)} = \frac{1}{s^2 + 1},$$

e os pólos de $X(s)$ são as raízes de $s^2 + 1 = 0$, iguais a $x_1 = j$ e $x_2 = -j$. A expansão em frações parciais de $X(s)$ é

$$X(s) = \frac{\alpha}{s - j} + \frac{\bar{\alpha}}{s + j},$$

na qual α e $\bar{\alpha}$ são os resíduos complexos conjugados de x_1 e x_2 .

13. Em termos genéricos,

$$Z(s) = T(s)X(s) = \frac{N_T(s)N_X(s)}{D_T(s)D_X(s)} = \frac{N_T(s)N_X(s)}{\prod_{i=1}^{n_T}(s-p_i) \prod_{i=1}^{n_X}(s-x_i)}, \quad (25)$$

em que $p_1, p_2, \dots, p_{n_T}$ e $x_1, x_2, \dots, x_{n_X}$ são os pólos de $T(s)$ e de $X(s)$, respectivamente. Assumindo por simplicidade que os pólos de $Z(s)$ (união dos pólos de $T(s)$ e $X(s)$) são todos distintos, obtemos a expansão em frações parciais

$$Z(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_1} + \dots + \frac{\alpha_{n_T}}{s-p_{n_T}} + \frac{\alpha_{n_T+1}}{s-x_1} + \frac{\alpha_{n_T+2}}{s-x_2} + \dots + \frac{\alpha_{n_T+n_X}}{s-x_{n_X}},$$

na qual α_i , $i = 1, 2, \dots, n_T + n_X$ são os resíduos associados aos pólos de $Z(s)$ ($s_i = p_i$ ou $s_i = x_i$):

$$\alpha_i = \frac{N_T(s)N_X(s)}{\prod_{i=1}^{n_T}(s-p_i) \prod_{i=1}^{n_X}(s-x_i)}(s-s_i), \quad i = 1, 2, \dots, n_T + n_X.$$

A saída $Z(s)$ pode ser representada como a soma

$$Z(s) = Z_T(s) + Z_X(s), \quad (26)$$

em que $Z_T(s)$ e $Z_X(s)$ contém apenas termos relativos aos pólos de $T(s)$ e de $X(s)$, respectivamente. Em particular, observamos que $Z_X(s)$ tem uma expansão em frações parciais igual à de $X(s)$, exceto por novos resíduos calculados em função de $T(s)$ e $X(s)$. Assim sendo, se x for uma entrada limitada, então z_X , a anti-transformada de $Z_X(s)$, será também limitada. A anti-transformada de $Z(s)$ é

$$z(t) = z_T(t) + z_X(t), \quad t \geq 0,$$

na qual z_T representa a resposta **natural** (transitória) e z_X é a resposta **forçada** (ou de regime) do sistema modelado por $T(s)$. Como z_X será sempre limitada para qualquer entrada limitada x , a resposta total z será limitada ou ilimitada devido apenas à resposta natural z_T . Especificamente,

$$\begin{aligned} z(t) &= z_T(t) + z_X(t), \\ &= \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \dots + \alpha_{n_T} e^{p_{n_T} t} + z_X(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Cr terio de estabilidade. O sistema $T(s)$   **estável** no sentido entrada-s ıda se e somente se $\text{Re}\{p_i\} < 0$ **para todo** $i = 1, 2, \dots, n_T$, em que $\text{Re}\{p_i\}$ denota a parte real do i -ésimo pólo de $T(s)$.

14. A análise de estabilidade de $T(s)$ pode ser associada a regiões do plano complexo s onde se localizam seus pólos.

- a) Se $\text{Re}\{p_i\} < 0$ **para todo** i (todos os pólos no semi-plano esquerdo) as exponenciais são todas amortecidas, fazendo com que z_T tenda a zero (z tenda a z_X) quando t tende ao infinito (resposta limitada). Dizemos então que o sistema   **estável**;
- b) Se $\text{Re}\{p_i\} > 0$ **para algum** i (pelo menos um pólo no semi-plano direito), a exponencial correspondente tende ao infinito (assim como z_T) quando t tende ao infinito (resposta ilimitada). Dizemos então que o sistema   **instável**;
- c) Se $\text{Re}\{p_i\} \leq 0$ para todo i (nenhum pólo no semi-plano direito, um ou mais p los **sobre** o eixo imaginário), a resposta pode ser limitada ou ilimitada dependendo da entrada (limitada). Dizemos neste caso que o sistema é **marginalmente estável**.

15. **Exemplo.** Considere o sistema

$$T(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

O sistema é marginalmente estável de acordo com a classificação acima. Os pólos do sistema são $p_1 = 0$ e $p_2 = -1$. A resposta z é limitada se a entrada limitada for $x(t) = \sin t$, $t \geq 0$. Entretanto, se a entrada limitada for $x(t) = 1$, $t \geq 0$ ($X(s) = 1/s$), a resposta será ilimitada (verifique):

$$z(t) = t + e^{-t/\tau} - \tau, \quad t \geq 0.$$

Se $T(s)$ possuir um par de pólos imaginários de freq ncia natural ω_n (todos os demais pólos no semi-plano esquerdo) e for submetido à entrada limitada $x(t) = \sin \omega_n t$, $t \geq 0$, a resposta de $T(s)$ será ilimitada devido ao efeito de ressonância.

16. Retomamos agora o sistema de controle da Figura 4.1, lembrando que as nove fun es de malha fechada indicadas em (19)-(21) possuem o mesmo denominador e portanto os mesmos pólos p_i , $i = 1, 2, \dots, n_T$. Suponha que r , w e v sejam entradas limitadas e que $\text{Re}\{p_i\} < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n_T$. Neste caso, as

repostas individuais nas expressões (19)-(21) são todas limitadas, assim como as somas que definem e , u e y . Logo, as saídas e , u e y serão também limitadas. Dizemos então que o sistema de controle da Figura 4.1 é **internamente estável**.

17. Como os pólos do sistema em malha fechada são as raízes da equação característica $1 + C(s)P(s)F(s) = 0$, as quais por sua vez dependem da escolha do controlador $C(s)$ para $P(s)$ e $F(s)$ dadas, devemos antes de tudo escolher o controlador de forma que $\text{Re}\{p_i\} < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n_T$, o que garante que o sistema em malha fechada será (internamente) estável.

18. **Exemplo.** Considere a função de transferência do motor DC controlado pela armadura,

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(\tau s + 1)},$$

em que k e τ são o ganho e a constante de tempo do motor, respectivamente. A planta é marginalmente estável, pois uma entrada (tensão de armadura) do tipo degrau unitário, por exemplo, torna a saída (posição angular do eixo) ilimitada. Supondo $C(s) = k_c$ (controle proporcional) e $F(s) = k_s$ (V/rad), obtemos a equação característica (verifique)

$$\tau s^2 + s + k_c k_s k = 0,$$

cujas raízes (pólos do sistema em malha fechada) são sempre reais negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa, quaisquer que sejam k_c , k_s , k e τ positivos. Conseqüentemente, o sistema de controle em malha fechada é sempre estável e a saída permanece limitada, mesmo que existam distúrbios limitados agindo no sistema.

Aula 5

Erros de Regime

Realimentação unitária

Tipos de sistemas de controle

Erros de regime: entradas degrau, rampa e parábola

Realimentação unitária

1. Considere o diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada da Figura 5.1, no qual eventuais distúrbios agindo no sistema não são explicitamente representados. A entrada r serve de referência para a saída da planta, y . As funções de transferência (malha aberta) do controlador, da planta e do sensor são $C(s)$, $P(s)$ e $F(s)$, respectivamente.

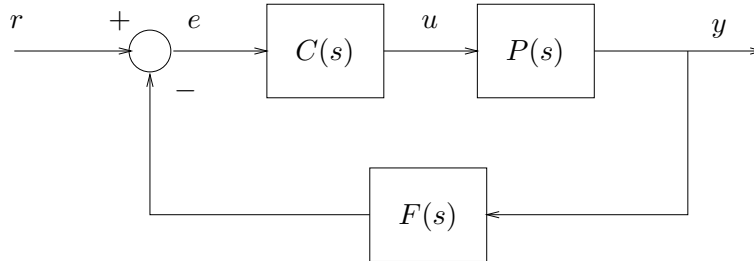


Figura 5.1: Sistema de controle em malha fechada.

2. Em muitas situações práticas, a resposta do sensor é muito mais rápida do que as respostas dos demais componentes do sistema. Nestes casos podemos desprezar a dinâmica do sensor, aproximar $F(s)$ por um ganho constante e obter um diagrama de blocos equivalente ao da Figura 5.1, mas com **realimentação unitária**. Para efeito de exposição, suponha que $F(s)$ mede temperatura e que $F(s) = k_s$, em que k_s transforma $^{\circ}\text{C}$ em volts. Observamos que unidade da variável de referência deve ser volts para que o erro entre a referência e a saída faça sentido.

3. Assuma que a saída do sistema deva rastrear a temperatura de 100°C . Em princípio, $r(t) = 100$, $t \geq 0$ ($^{\circ}\text{C}$) (degrau de amplitude 100). Na prática, para dar

sentido ao erro, a referência deve ser especificada em volts: $r(t) = 100k_s^{-1}$, $t \geq 0$ (V). O diagrama de blocos da Figura 5.2 é equivalente ao diagrama de Figura 5.1, na medida em que a relação entre r e y permanece inalterada. Entretanto, no diagrama da Figura 5.2, a referência na entrada do somador possui a mesma unidade da saída do sistema, $^{\circ}\text{C}$.

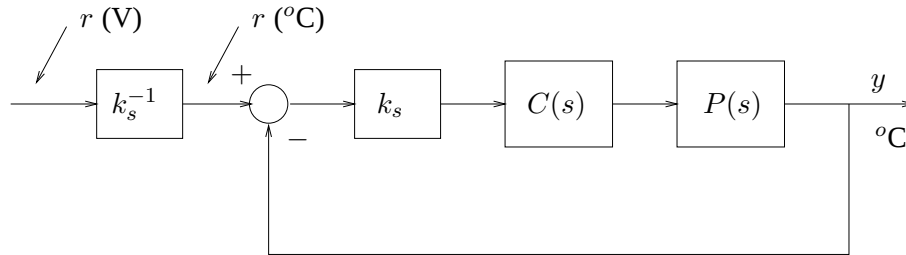


Figura 5.2: Diagrama de blocos equivalente ($F(s) = k_s$).

4. Se a referência for especificada em graus e o ganho do sensor for incorporado ao controlador ou à planta, obtemos o sistema de controle com **realimentação unitária** representado na Figura 5.3. Sistemas de controle com realimentação unitária são mais simples de analisar e projetar.

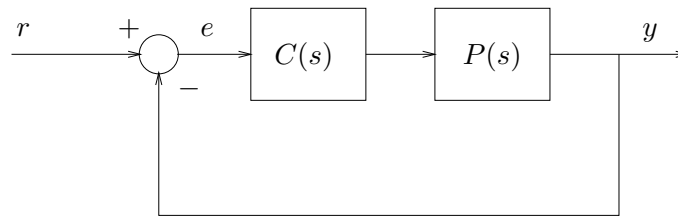


Figura 5.3: Sistema de controle com realimentação unitária.

5. Assumimos que o sistema de controle em malha fechada da Figura 5.3 é estável. A transformada de Laplace do erro entre a referência r e a saída y é

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s), \\ &= \frac{R(s)}{1 + C(s)P(s)}. \end{aligned}$$

O **erro de regime** (ou de **estado estacionário**) do sistema, pode ser calculado

através do Teorema do Valor Final:

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s).$$

Observamos que o erro de regime depende da entrada de referência e da função de transferência do controlador, variáveis, e da função de transferência da planta, dada. Um dos objetivos do projeto de sistemas de controle é limitar e eventualmente anular os erros de regime do sistema para determinadas entradas padrões, o que pode ser feito através de uma escolha apropriada do controlador.

Tipos de sistemas de controle

6. Considere a função de transferência de malha aberta $C(s)P(s)$ na forma

$$C(s)P(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{N_{CP}(s)}{D_{CP}(s)} = \frac{N_{CP}(s)}{s^N \tilde{D}_{CP}(s)},$$

na qual eventuais N pólos na origem de $C(s)P(s)$ estão explicitamente indicados. Supõe-se que $N_{CP}(s)$ e $\tilde{D}_{CP}(s)$ não possuem zeros em $s = 0$. O número inteiro N define o **tipo do sistema de controle**. Fisicamente, o tipo do sistema é igual ao número de **integradores** ($1/s$) no **caminho direto** entre a referência r e a saída y . O tipo do sistema de controle determina fundamentalmente os valores dos erros de estado estacionário do sistema, como será visto a seguir.

Erros de regime: entradas degrau, rampa e parábola

7. Os erros de regime para entradas degrau, rampa e parábola unitárias podem ser calculados a partir da expressão geral para erro de estado estacionário:

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + C(s)P(s)}.$$

Erros para entrada degrau. Se $R(s) = 1/s$, obtemos

$$e_d = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + k_p},$$

em que

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)P(s),$$

denota a chamada **constante de posição** do sistema. O termo **posição** refere-se ao fato de que estamos interessados em posicionar (colocar) a saída do sistema num valor constante. O valor de k_p depende do tipo do sistema de controle. Se $N = 0$, então k_p é uma constante, assim como e_d . Se $N \geq 1$, então $k_p = \infty$ e $e_d = 0$. O erro de regime de um sistema do tipo 1 ou superior para entrada degrau é zero.

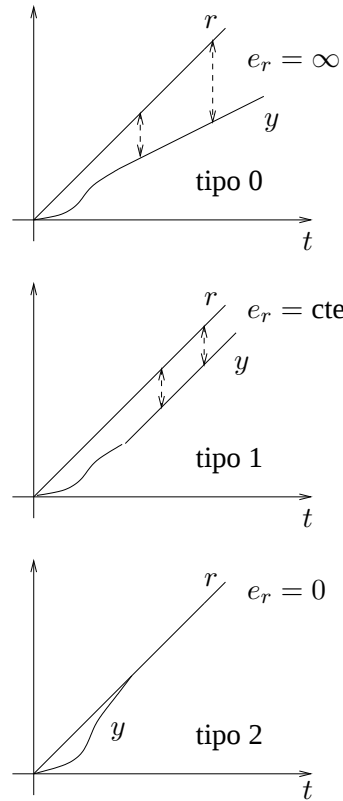


Figura 5.4: Erros de regime para entrada rampa.

Erros para entrada rampa. Se $R(s) = 1/s^2$, obtemos

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sC(s)P(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s)} = \frac{1}{k_v},$$

em que

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s) \quad (s^{-1}),$$

denota a chamada **constante velocidade** do sistema, pois estamos interessados em controlar a variação da saída do sistema. Se $N = 0$, então $k_v = 0$ e $e_r = \infty$. Se $N = 1$, então k_v é uma constante, assim como e_r . Se $N \geq 2$, então $k_v = \infty$ e $e_r = 0$. O erro de regime de um sistema do tipo 2 ou superior para entrada rampa é zero. A Figura 5.4 ilustra os erros de regime para entrada rampa em função do tipo do sistema.

Erros para entrada parábola. Se $R(s) = 1/s^3$, obtemos

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 C(s)P(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)P(s)} = \frac{1}{k_a},$$

em que

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)P(s) \quad (s^{-2})$$

denota a chamada **constante de aceleração** do sistema, pois agora estamos interessados em controlar a aceleração da saída do sistema. Se $N \leq 1$, então $k_a = 0$ e $e_p = \infty$. Se $N = 2$, então k_a é uma constante, assim como e_p . Se $N \geq 3$, então $k_a = \infty$ e $e_p = 0$. O erro de regime de um sistema do tipo 3 ou superior para entrada parabólica é zero.

8. A tabela abaixo resume os valores dos erros de regime e das constantes de posição, velocidade e aceleração para as entradas degrau, rampa e parábola em função do tipo do sistema.

N	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$	Constantes
0	$\frac{1}{1 + k_p}$	∞	∞	$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)P(s)$
1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞	$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s)$
2	0	0	$\frac{1}{k_a}$	$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)P(s)$

Genericamente, para que os erros de regime devidos a entradas $R(s) = 1/s^m$ de ordens $m = 1, 2, \dots, n$ sejam nulos, é necessário que $N \geq m$. Se a amplitude

da entrada for A , o erro de regime é simplesmente multiplicado por A . (Note que $R(s) = 1/s^3$ é a transformada de Laplace de $r(t) = t^2/2$, $t \geq 0$.)

9. Se um sistema de controle responde bem a entradas simples como degrau, rampa, parábola, etc., então é razoável imaginar que o sistema também responderá bem a entradas mais gerais que possam ser escritas como combinações dos termos 1 , t , $t^2/2$, $\dots$. Todo sinal de entrada r bem comportado pode ser aproximado por um polinômio na forma

$$r(t) \simeq c_1 + c_2 t + \frac{c_3 t^2}{2} + \dots, \quad t \geq 0,$$

o que justifica ainda mais nosso interesse pelos erros de regime para entradas degrau, rampa e parábola.

10. Como o tipo do sistema é função do número de pólos de $C(s)P(s)$ na origem e a função de transferência da planta é dada, o tipo do sistema varia de acordo com a escolha do controlador. Suponha, por exemplo, que $P(s)$ não tenha pólos na origem. Ainda assim o erro de regime para entrada degrau será nulo se o controlador tiver pelo menos um pólo na origem (sistema tipo 1), como os chamados controladores PI's:

$$C(s) = \frac{k_P s + k_I}{s},$$

nos quais k_P e k_I são os ganhos (ajustáveis) proporcional e integral, respectivamente. Parece então natural incorporar a $C(s)$ tantos integradores quantos sejam necessários para anular erros de regime. Essa prática, entretanto, torna a estabilização do sistema em malha fechada muito difícil, como será constatado futuramente.

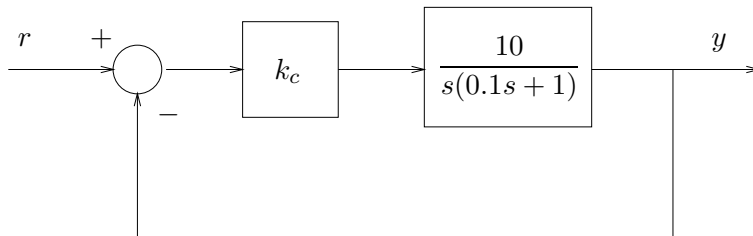


Figura 5.5: Controle de posição de um motor DC.

11. **Exemplo.** Considere o diagrama de blocos da Figura 5.5, que representa o sistema de controle de posição de um motor DC. Como a constante de tempo

do motor é $\tau = 0.1$ s, a velocidade do motor atinge seu valor de regime após aproximadamente $4\tau = 0.4$ s, quando operado em malha aberta. Como

$$C(s)P(s) = \frac{10k_c}{s(0.1s + 1)},$$

o tipo do sistema é $N = 1$. As constantes e erros de regime para as diferentes entradas são:

$$\begin{aligned} k_p &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10k_c}{s(0.1s + 1)} = \infty, & e_d &= \frac{1}{1 + k_p} = 0, \\ k_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10k_c}{s(0.1s + 1)} = 10k_c, & e_r &= \frac{1}{k_v} = \frac{1}{10k_c}, \\ k_a &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{10k_c}{s(0.1s + 1)} = 0, & e_p &= \frac{1}{k_a} = \infty. \end{aligned}$$

Se a unidade da saída for radiano e $k_c = 10$, por exemplo, então o erro de regime para entrada rampa seria de 0.01 rad/s. Nada se pode dizer a priori sobre o tempo necessário para o sistema chegar à situação de regime.

12. Exemplo. O diagrama de blocos da Figura 5.6 representa um sistema de controle de temperatura.

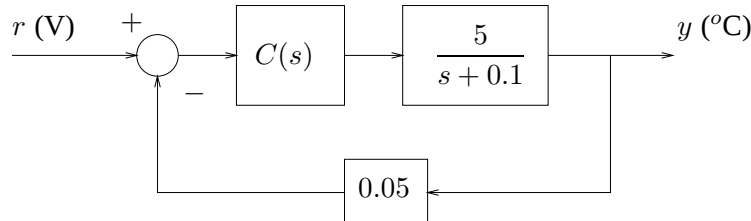


Figura 5.6: Sistema de controle de temperatura.

Como o sistema não se encontra na configuração de realimentação unitária, não é possível calcular diretamente os erros de estado estacionário. Incorporando o ganho do sensor ($k_s = 0.05$ V/°C) à planta, chegamos ao sistema de controle com realimentação unitária da Figura 5.7. Supondo $C(s) = k_c$, obtemos

$$C(s)P(s) = \frac{0.25k_c}{s + 0.1},$$

e o tipo do sistema é $N = 0$. O erro de regime para entrada degrau é constante e para as demais entradas é infinito.

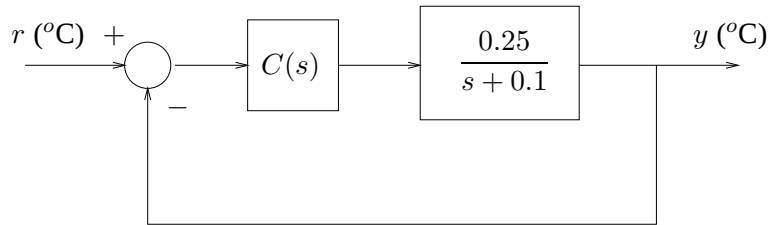


Figura 5.7: Sistema com realimentação unitária.

A constante de posição e o erro de regime para a entrada degrau são

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.25k_c}{s + 0.1} = 2.5k_c \quad \text{e} \quad e_d = \frac{1}{1 + 2.5k_c} \text{ } ^\circ\text{C},$$

O erro de regime é inversamente proporcional ao ganho do controlador, mas restrições de ordem prática impedem que k_c seja muito grande. Se a referência degrau for de $100 \text{ } ^\circ\text{C}$ e $k_c = 10$, então

$$e_d = \frac{100}{1 + 2.5 \times 10} = 4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

A temperatura de regime seria de $96 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Aula 6

Faixa de Passagem e Sensibilidade

Faixa de passagem

Sensibilidade

Sensibilidade do sistema em malha aberta

Sensibilidade do sistema em malha fechada

Faixa de passagem

1. A **faixa de passagem** ou **largura de banda** de um sistema dinâmico pode ser definida genericamente como sendo a faixa de frequências dentro da qual o sistema responde satisfatoriamente ao sinal de entrada. O conceito tem origem na área de Comunicações. Amplificadores de áudio, por exemplo, são normalmente comparados a um **amplificador ideal**, no sentido do amplificador apresentar uma resposta em frequência plana na faixa de 20 a 20000 Hz. A faixa de passagem do amplificador ideal, $20000 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz} = 19980 \text{ Hz}$, coincidiria com a *faixa de passagem* do sistema auditivo do ser humano.

2. Resposta plana significa que a razão entre as amplitudes da saída e da entrada é essencialmente constante ao longo da faixa de passagem do amplificador. A Figura 6.1 ilustra o diagrama de magnitude de um amplificador de áudio representado pela função de transferência $G(s)$. A variação no ganho (magnitude) do amplificador é de no máximo $1/\sqrt{2}$ (3 dB) dentro da faixa 20 Hz – 20000 Hz. O ganho cai 3 dB nas **frequências de corte** 20 Hz e 20000 Hz.

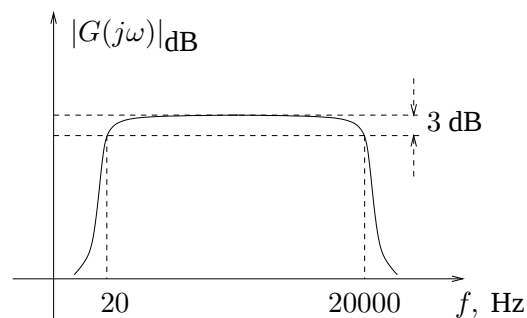


Figura 6.1: Resposta de um amplificador de áudio ideal.

3. Para efeito de interpretação em termos dos conteúdos espectrais dos sinais envolvidos, considere o sistema $T(s) = Y(s)/R(s)$. A **energia** do sinal de entrada na frequência ω é dada por

$$E_R(\omega) = \frac{1}{\pi} |R(j\omega)|^2,$$

e como todo sinal físico $E_R(\omega)$ tende a zero quando ω tende ao infinito. A energia do sinal de saída é

$$\begin{aligned} E_Y(\omega) &= \frac{1}{\pi} |Y(j\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} |R(j\omega)T(j\omega)|^2, \\ &= \frac{1}{\pi} |R(j\omega)|^2 |T(j\omega)|^2. \end{aligned}$$

A energia do sinal de entrada na frequência ω é transmitida para a saída apenas se a magnitude do sistema na frequência ω é significativa. Se a magnitude $|T(j\omega)|$ for significativa na faixa de frequências na qual a energia do sinal de entrada se concentra, o sinal de entrada será satisfatoriamente transmitido para a saída do sistema. Na terminologia própria da área de sistemas de controle, diz-se que a saída rastreia (segue, acompanha) a entrada.

4. A faixa de passagem de um sistema de controle $T(s)$ pode ser definida como a faixa de frequências dentro da qual a magnitude $|T(j\omega)|$ não cai mais do que 3 dB em relação ao valor $|T(j0)|$ (valor DC). É possível definir a frequência de referência $\omega = 0$ porque sistemas de controle são essencialmente **filtros passa-baixas**.

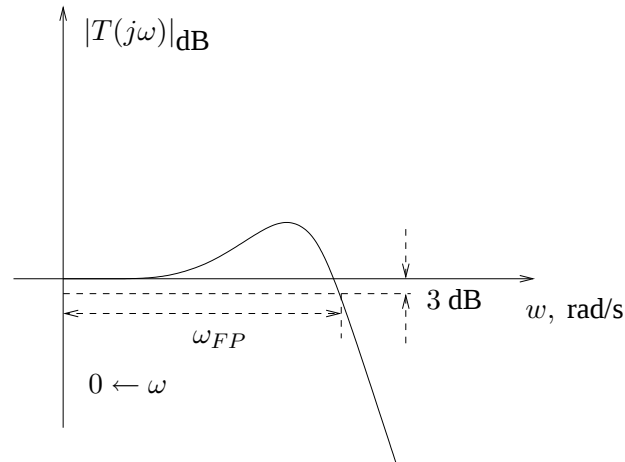


Figura 6.2: Resposta típica de um sistema de controle.

A faixa de passagem do sistema ilustrado na Figura 6.2 é numericamente igual à frequência ω_{FP} tal que $|T(j\omega_{FP})|_{\text{dB}} = |T(j0)|_{\text{dB}} - 3 \text{ dB}$. Geralmente exige-se que $|T(j0)|_{\text{dB}} = 0$ ($|T(j0)| = 1$), de forma que o sistema de controle seja capaz de rastrear entradas constantes sem erros de regime.

5. Um dos objetivos do projeto de sistemas de controle é limitar a faixa de passagem do sistema à faixa de frequências necessária para que a saída rastreie a entrada. Desta forma, ruídos (energia espúria, não-desejada) fora da faixa delimitada pela faixa de passagem serão substancialmente atenuados pelo sistema de controle. Outro efeito importante da limitação da faixa de passagem é impedir que determinadas **dinâmicas não-modeladas**, usualmente características da planta em frequências mais elevadas suprimidas no modelo adotado, sejam excitadas por componentes do sinal de entrada nessas frequências.

6. A faixa de passagem do sistema em malha fechada é determinada pela escolha do controlador, uma vez que $T(s)$ é função de $C(s)$:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}$$

Para efeito de ilustração, considere

$$C(s) = k_c, \quad P(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \text{e} \quad F(s) = 1.$$

A faixa de passagem do sistema em malha aberta, $C(s)P(s) = k_c/(\tau s + 1)$, é igual a frequência de corte da planta: $\omega_{FP} = 1/\tau$. (A magnitude em $\omega_{FP} = 1/\tau$ cai 3 dB em relação à assíntota de baixa frequência). Por outro lado, a faixa de passagem do sistema em malha fechada

$$T(s) = \frac{k_c}{\tau s + (1 + k_c)}$$

é $\omega_{FP} = (1 + k_c)/\tau$ (verifique), e agora depende do ganho do controlador. Menor ganho, menor faixa de passagem e vice-versa. Se $\tau = 0.1 \text{ s}$ e $k_c = 1$, então $\omega_{FP} = 20 \text{ rad/s}$. A faixa de passagem de um sistema de segunda ordem na forma padrão com fator de amortecimento $\xi = 0.5$ é $\omega_{FP} = \omega_n$.

Sensibilidade

7. Um controlador projetado a partir das funções de transferência **nominais** da planta e do sensor deve ser capaz de manter o desempenho especificado para o

sistema de controle em malha fechada a despeito de possíveis variações nas funções de transferência envolvidas.

8. Considere uma função de transferência genérica $G(s)$. Desejamos analisar a variação de $G(s)$ quando um dado parâmetro p de $G(s)$ varia. (Uma notação mais formal seria $G(s, p)$). Suponha que $G(s)$ e p representam valores nominais e que $\Delta G(s)$ e Δp representam variações em relação aos valores nominais. A razão entre a variação percentual de $G(s)$ e a variação percentual de p é

$$S(s) = \frac{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta G(s)}{\Delta p} \frac{p}{G(s)}.$$

A **função de sensibilidade** de $G(s)$ em relação a p é definida como

$$S_p^G(s) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta G(s)}{\Delta p} \frac{p}{G(s)} = \frac{\partial G(s)}{\partial p} \frac{p}{G(s)}.$$

9. **Generalização.** A função de sensibilidade de uma função de transferência $G(s)$ em relação a outra função de transferência $Q(s)$ é dada por

$$S_Q^G(s) = \frac{\partial G(s)}{\partial Q(s)} \frac{Q(s)}{G(s)}.$$

A resposta em frequência de $S_Q^G(s)$ expressa como a resposta em frequência de $G(s)$ varia percentualmente quando a resposta em frequência de $Q(s)$ varia percentualmente.

Sensibilidade do sistema em malha aberta

10. Suponha que $G(s) = C(s)P(s)$ é a função de transferência do sistema de controle em malha aberta. Neste caso, a sensibilidade de $G(s)$ em relação à variação de $P(s)$ é

$$S_P^G(s) = \frac{\partial G(s)}{\partial P(s)} \frac{P(s)}{G(s)} = C(s) \frac{P(s)}{C(s)P(s)} = 1,$$

expressando o fato de que qualquer variação na planta será integralmente refletida na função de transferência do sistema em malha aberta, independentemente do

controlador utilizado. O desempenho do sistema em malha aberta será severamente afetado por variações na planta. Conclusão idêntica é obtida quando a variação ocorre na função de transferência do controlador.

Sensibilidade do sistema em malha fechada

11. Considere a função de transferência de malha fechada

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}.$$

A sensibilidade do sistema em malha fechada $T(s)$ em relação a variações na planta $P(s)$, no sensor $F(s)$ ou no próprio controlador $C(s)$ pode ser investigada com o auxílio da função de sensibilidade.

12. A sensibilidade de $T(s)$ em relação a $P(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} S_P^T(s) &= \frac{\partial T(s)}{\partial P(s)} \frac{P(s)}{T(s)}, \\ &= \frac{[1 + C(s)P(s)F(s)]C(s) - [C(s)F(s)]C(s)P(s)}{[1 + C(s)P(s)F(s)]^2} \times \\ &\quad \times \frac{1 + C(s)P(s)F(s)}{C(s)}, \\ &= \frac{1}{1 + C(s)P(s)F(s)}. \end{aligned}$$

A sensibilidade de $T(s)$ em relação a $P(s)$ pode ser melhor analisada através da resposta em frequência de $S_P^T(s)$,

$$S_P^T(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)F(j\omega)}.$$

A quantidade $C(j\omega)P(j\omega)F(j\omega)$ é chamada de **ganho de malha** do sistema. Corresponde à resposta em frequência do produto das funções de transferência na malha de controle se ignorarmos o sinal negativo no somador. O ganho de malha deve ser grande dentro da faixa de passagem do sistema para que a sensibilidade de $T(s)$ em relação a $P(s)$ nessa faixa de frequências seja pequena. Como $P(s)$ e $F(s)$ são dadas, a solução é projetar $C(s)$ para produzir ganhos elevados nessa faixa de frequências. Entretanto, ganhos muito elevados tornam a resposta do sistema muito oscilatória, e eventualmente conduzem à sua instabilidade.

13. A sensibilidade de $T(s)$ em relação a $F(s)$ é calculada de forma análoga, sendo igual a (verifique)

$$S_F^T(s) = \frac{\partial T(s)}{\partial F(s)} \frac{F(s)}{T(s)} = \frac{-C(s)P(s)F(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}.$$

A resposta em frequência de $S_F^T(s)$ é

$$S_F^T(j\omega) = \frac{-C(j\omega)P(j\omega)F(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)F(j\omega)}.$$

A conclusão agora é oposta à do caso anterior. O ganho de malha deve ser pequeno dentro da faixa de passagem do sistema para que a sensibilidade de $T(s)$ em relação a $F(s)$ nessa faixa de frequências seja pequena. Para isso, devemos projetar $C(s)$ para produzir ganhos baixos dentro da faixa de passagem do sistema. Por sua vez, ganhos muito baixos tornam a resposta do sistema muito lenta e pouco precisa em relação à entrada de referência.

14. Uma conclusão geral importante é a de que é impossível projetar um controlador de forma que o sistema de malha fechada seja simultaneamente insensível a variações na planta e no sensor. Uma solução para **desacoplar** as sensibilidades de $T(s)$ em relação a $P(s)$ e $F(s)$ é investir na qualidade do sensor, evitando que este varie. Com isso, é possível trabalhar numa faixa de ganhos na qual o desempenho do sistema em malha fechada possa ser melhor controlado.

15. A sensibilidade de $T(s)$ em relação a $C(s)$ é igual a sensibilidade de $T(s)$ em relação a $P(s)$ (verifique), o que não altera as conclusões acima. Na maioria dos sistemas de controle atuais o controlador é implementado digitalmente, sendo basicamente um conjunto de instruções na linguagem utilizada pelo microprocessador utilizado. Neste sentido, a sensibilidade do sistema em relação ao controlador tem mais a ver com questões de representação de parâmetros em ponto flutuante, por exemplo.

16. A sensibilidade de $T(s)$ em relação a algum **parâmetro** p de $P(s)$ (por exemplo) pode ser obtida através da chamada **regra da cadeia**:

$$S_p^T(s) = \frac{\partial T(s)}{\partial p} \frac{p}{T(s)} = \frac{\partial T(s)}{\partial P(s)} \frac{\partial P(s)}{\partial p} \frac{p}{T(s)}.$$

17. **Exemplo.** Considere um sistema de controle em malha fechada com os se-

guintes componentes:

$$C(s) = k_c, \quad P(s) = \frac{k}{s + 0.1} \quad \text{e} \quad F(s) = 0.05.$$

Desejamos analisar a influência do ganho do controlador, k_c , na sensibilidade de $T(s)$ em relação ao ganho da planta, k . Supomos que o valor nominal de k é 5. A função de malha fechada é

$$T(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)} = \frac{k_c k}{s + (0.1 + 0.05k_c k)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} S_k^T(s) &= \frac{\partial T(s)}{\partial k} \frac{k}{T(s)} = \\ &= \frac{[s + (0.1 + 0.05k_c k)]k_c - (0.05k_c)(k_c k)}{[s + (0.1 + 0.05k_c k)]^2} \frac{[s + (0.1 + 0.05k_c k)]}{k_c}. \end{aligned}$$

Em $k = 5$,

$$S_k^T(s) = \frac{s + 0.1}{s + (0.1 + 0.25k_c)}.$$

A resposta em frequência de $S_k^T(s)$ é

$$S_k^T(j\omega) = \frac{j\omega + 0.1}{j\omega + (0.1 + 0.25k_c)} = \frac{\frac{0.1}{0.1 + 0.25k_c} \left(\frac{j\omega}{0.1} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{0.1 + 0.25k_c} + 1 \right)}.$$

Observamos que a magnitude da sensibilidade $S_k^T(j\omega)$ decresce com o aumento do ganho do controlador.

Aula 7

Rejeição de distúrbios

Rejeição de distúrbios

Controle da resposta transitória

Controle da resposta em frequência

Rejeição de distúrbios

1. Distúrbios são entradas independentes que tendem a afetar de forma adversa o funcionamento do sistema de controle. Entradas de distúrbio podem ser usadas para modelar a variação de algum componente do sistema, ou para modelar o efeito do ambiente sobre o sistema de controle. A Figura 9.1 ilustra um sistema de controle no qual a entrada de distúrbio, w , é refletida na entrada da planta (atuação). A entrada de distúrbio pode estar refletida na saída da planta, como na Figura 9.2.

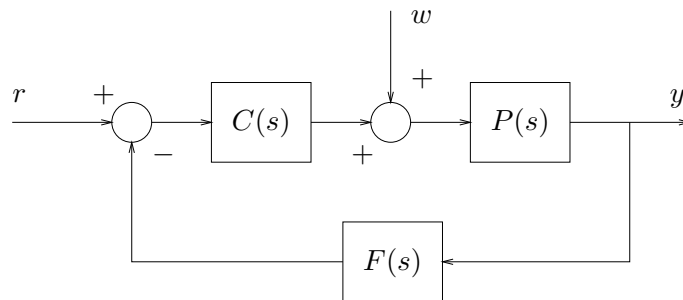


Figura 9.1: Sistema de controle sujeito a um distúrbio na atuação.

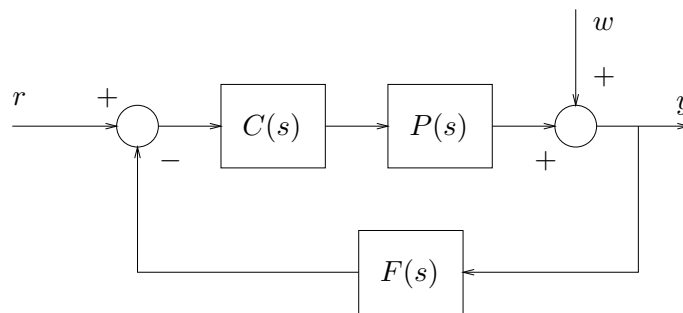


Figura 9.2: Sistema de controle sujeito a um distúrbio na saída.

2. Certos distúrbios podem ser modelados como a saída de um filtro $D(s)$ submetido a uma entrada w do tipo degrau, por exemplo. A Figura 9.3 ilustra a ação do **distúrbio filtrado** na saída da planta.

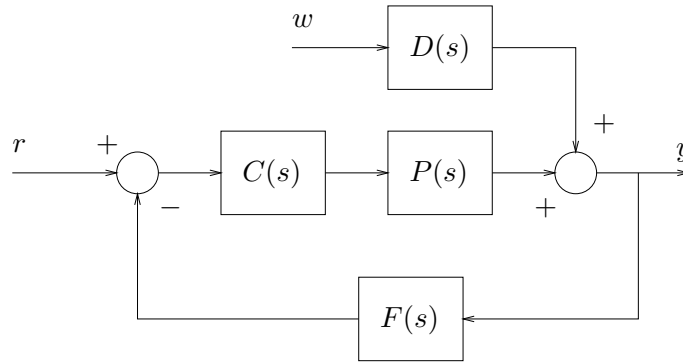


Figura 9.3: Sistema de controle sujeito a distúrbio filtrado na saída.

3. O efeito líquido do distúrbio indicado na Figura 9.1 é modificar o sinal de controle, tirando-lhe efetividade. Um distúrbio na saída da planta como ilustra a Figura 9.2 modifica o sinal a ser medido. Considere um distúrbio na saída da planta, como representado na Figura 9.3. Através do Princípio da Superposição, obtemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}R(s) + \frac{D(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}W(s), \\ &= T(s)R(s) + G(s)W(s), \end{aligned}$$

em que $G(s) = Y(s)/W(s)$. A primeira parcela da soma é a resposta do sistema de controle à entrada de referência r , enquanto que a segunda é a resposta do sistema ao sinal de distúrbio w . A resposta temporal do sistema é obtida anti-transformando $Y(s)$:

$$y(t) = y_R(t) + y_W(t), \quad t \geq 0$$

O sistema de controle não pode evitar que a saída seja transitoriamente afetada pela ação do distúrbio w , mas pode evitar a ação do distúrbio **em regime**, fazendo com que $y_W(t)$ tenda a zero ($y(t)$ tenda a $y_R(t)$) quando t tender ao infinito. Neste caso, dizemos que ocorre a **rejeição do distúrbio** pelo sistema de controle.

4. Na análise de rejeição de distúrbio a seguir, consideramos realimentação unitária ($F(s) = 1$). Na faixa de frequências na qual o ganho de malha $C(j\omega)P(j\omega)$ for grande ($0 < \omega \leq \omega_{FP}$, por exemplo),

$$T(j\omega) = \frac{C(j\omega)P(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \simeq 1,$$

e a saída seguirá a referência com boa aproximação, pois

$$G(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \simeq 0.$$

significando que o distúrbio será bastante atenuado. Como o controlador é a parte projetável do sistema de controle, a forma mais indicada de se aumentar o ganho de malha é aumentando o ganho do controlador na faixa de frequências de interesse.

5. **Exemplo.** A conclusão de que $C(j\omega)P(j\omega)$ deve ser grande para rejeição de distúrbios independe do modelo do distúrbio. Considere o sistema de controle da Figura 9.4 abaixo, que modela um sistema automático de controle de temperatura (aquecimento) de uma câmara.

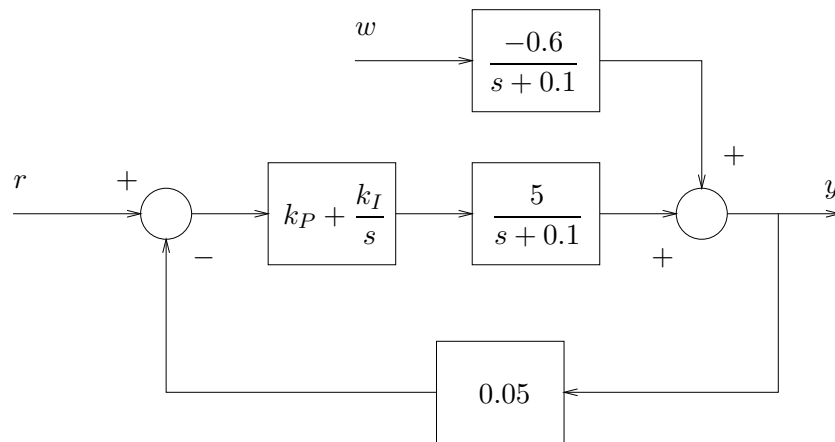


Figura 9.4: Sistema de aquecimento de uma câmara.

Em malha aberta, a ação de uma entrada de distúrbio do tipo degrau como *abrir o acesso à câmara*, expondo a câmara à temperatura externa, mais baixa, por um período de tempo suficientemente longo, reflete-se numa queda de -6°C após 40 s, representada pelo filtro

$$D(s) = \frac{-0.6}{s + 0.1} = \frac{-6}{10s + 1},$$

de ganho -6 e constante de tempo $\tau = 10$ s. A saída do sistema de controle em malha fechada é, de acordo com o Princípio da Superposição,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}R(s) + \frac{D(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}W(s), \\ &= T(s)R(s) + G(s)W(s), \end{aligned}$$

em que $G(s) = Y(s)/W(s)$. Numericamente,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{-0.6}{s + 0.1}}{1 + \left(k_P + \frac{k_I}{s}\right) \frac{0.25}{s + 0.1}}, \\ &= \frac{-0.6s}{s^2 + (0.1 + 0.25k_P)s + 0.25k_I}. \end{aligned}$$

A resposta em frequência de $G(s)$ é

$$G(j\omega) = \frac{-j0.6\omega}{-\omega^2 + j(0.1 + 0.25k_P)\omega + 0.25k_I},$$

e $G(j\omega)$ tende a zero quando ω tende a zero. Distúrbios de baixa frequência são bastante atenuados. Em particular, $G(j0) = 0$, significando que distúrbios do tipo degrau são completamente rejeitados. Especificamente, para $W(s) = 1/s$,

$$y_W(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)W(s) = 0.$$

Este efeito torna-se possível devido a escolha do controlador PI, que fornece ganho infinito na frequência $\omega = 0$, **quaisquer que sejam** k_P e $k_I > 0$. Entretanto, valores particulares de k_P e k_I têm importante efeito sobre o comportamento **transitório** da câmara da sala após a abertura do acesso.

Controle da resposta transitória

6. Em sistemas de controle estamos particularmente interessados em analisar como a saída da planta responde a determinados sinais de referência. A função de transferência de malha fechada relevante para este tipo de análise é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N_T(s)}{D_T(s)} = \frac{N_T(s)}{\prod_{i=1}^{n_T} (s - p_i)}$$

em que n_T é a ordem e p_i , $i = 1, 2, \dots, n_T$, são os pólos de $T(s)$, respectivamente. Os zeros de $T(s)$ são as raízes de $N_T(s)$. Assumindo por simplicidade que os pólos são todos distintos, a saída da planta pode ser representada na forma de frações parciais como

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_{n_T}}{s - p_{n_T}} + Y_R(s),$$

na qual $Y_R(s)$ contém as frações relativas aos pólos de uma dada entrada $R(s)$. A resposta temporal do sistema é obtida através da anti-transformada de Laplace de $Y(s)$:

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \dots + \alpha_{n_T} e^{p_{n_T} t} + y_R(t), \quad t \geq 0$$

Se o sistema em malha fechada for estável, isto é, se as partes reais de todos os pólos de $T(s)$ forem negativas, então as exponenciais $e^{p_i t}$, $i = 1, 2, \dots, n_T$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$ e a resposta tende à resposta forçada ou resposta em regime, y_R . A resposta natural ou resposta transitória do sistema é dada pela soma

$$\alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \dots + \alpha_{n_T} e^{p_{n_T} t}, \quad t \geq 0.$$

7. Pólos dominantes. As exponenciais $e^{p_i t}$, $i = 1, 2, \dots, n_T$ são as vezes chamadas de **modos** do sistema. A amplitude de cada modo é dada pelo resíduo associado ao respectivo pólo:

$$\alpha_j = \frac{N_T(s)}{\prod_{i \neq j} (s - p_i)} R(s) \Big|_{s=p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_T,$$

A contribuição de cada modo para a resposta transitória do sistema é função da sua amplitude, a qual por sua vez depende das localizações dos zeros e pólos de $T(s)$ e de $R(s)$, e da constante de tempo do pólo associado. Um pólo real possui constante de tempo $\tau_i = 1/|p_i|$ ($p_i < 0$ se o sistema é estável). A constante de tempo de um par de pólos complexos conjugados $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ é dada por $\tau_i = 1/(\xi\omega_n)$. Se

$$\alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \dots + \alpha_{n_T} e^{p_{n_T} t} \simeq \alpha_i e^{p_i t}, \quad t \geq 0,$$

dizemos que o pólo p_i é o **pólo dominante** do sistema, que então responde como um sistema de primeira ordem. Se

$$\alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \dots + \alpha_{n_T} e^{p_{n_T} t} \simeq \alpha_i e^{p_i t} + \alpha_j e^{p_j t}, \quad t \geq 0,$$

os pólos p_i e p_j (eventualmente $p_j = \bar{p}_i$, $\alpha_j = \bar{\alpha}_i$) são o par de pólos dominantes do sistema, que então responde como um sistema de segunda ordem.

8. Exemplo. Considere a função de transferência de malha fechada de terceira ordem

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)}.$$

Supondo uma entrada do tipo degrau unitário, os valores dos resíduos associados aos pólos de $Y(s)$ são os seguintes: $p_1 = -10$, $\alpha_1 = -0.0244$, $p_2 = -1 + j$, $\alpha_2 = -0.4878 + j0.6098$, $p_3 = -1 - j$, $\alpha_3 = -0.4878 - j0.6098$ e $p_4 = 0$, $\alpha_4 = 1$. A resposta do sistema a uma entrada degrau unitário pode ser expressa na forma

$$Y(s) = \frac{-0.0244}{s - (-10)} + \frac{-0.4878 + j0.6098}{s - (-1 + j)} + \frac{-0.4878 - j0.6098}{s - (-1 - j)} + \frac{1}{s - 0}.$$

A anti-transformada de $Y(s)$ fornece a resposta temporal do sistema à entrada degrau unitário:

$$y(t) = -0.0244e^{-10t} - (0.4878 - j0.6098)e^{(-1+j)t} - (0.4878 + j0.6098)e^{(-1-j)t} + 1, \quad t \geq 0,$$

que em termos de seno e cosseno assume a forma

$$y(t) = -0.0244e^{-10t} - e^{-t}(0.9756 \cos t + 1.2196 \sin t) + 1, \quad t \geq 0.$$

Observamos então que o modo relativo ao pólo $p_1 = -10$ decresce rapidamente, o que aliado ao fato da sua amplitude (resíduo) ser pequena, permite aproximar a resposta transitória por

$$-e^{-t}(0.9756 \cos t + 1.2196 \sin t), \quad t \geq 0.$$

9. Lembramos que os pólos p_i , $i = 1, 2, \dots, n_T$, são as raízes da equação característica

$$1 + C(s)P(s)F(s) = 0,$$

associada ao sistema de controle em malha fechada. Neste caso, a escolha do controlador $C(s)$, dadas as funções de transferência da planta e do sensor, $P(s)$ e $F(s)$, é determinante para a localização dos pólos do sistema e para o tipo de resposta transitória que este exibirá. Muitas vezes estamos interessados em projetar $C(s)$ de tal forma que a resposta transitória do sistema se assemelhe à resposta de um sistema de segunda ordem com um par de pólos complexos conjugados $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, porque é fácil relacionar especificações de desempenho típicas de resposta transitória, como máxima sobre-elevação (M_p), tempo de subida (t_r), etc., com o fator de amortecimento ξ e a frequência natural ω_n dos pólos. Neste caso, o controlador deve ser projetado para que o sistema de controle em malha fechada apresente o par de pólos dominantes (complexos conjugados) desejado.

Controle da resposta em frequência

10. Concluimos anteriormente que para obter erros de regime pequenos, baixa sensibilidade à variações de parâmetros e rejeição de distúrbios numa faixa de frequências de interesse, é necessário elevar o ganho de malha $C(j\omega)P(j\omega)F(j\omega)$, o que normalmente é feito através da elevação do ganho do controlador. Por outro lado, um ganho de malha muito elevado tende a tornar o sistema oscilatório (eventualmente, instável), comprometendo a sua resposta transitória.

11. Vários aspectos do comportamento entrada-saída de um sistema de controle podem ser analisadas através da resposta em frequência da função de transferência de malha fechada $T(s)$, caracterizada por

$$T(j\omega) = \frac{C(j\omega)P(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)F(j\omega)}.$$

Em particular, $T(j0)$ ($\omega = 0$ rad/s) representa o ganho DC do sistema em malha fechada, isto é, o ganho do sistema para uma entrada constante.

12. Se a magnitude de $T(j\omega)$ for aproximadamente igual a 1 para frequências variando de 0 até uma certa frequência máxima, então o sistema será capaz de rastrear referências descritas (principalmente) por uma soma de senóides de até esta frequência máxima, o que caracteriza a faixa de passagem do sistema, ω_{FP} .

13. Podemos mostrar que se o comportamento do sistema em malha fechada é dominado por um par de pólos complexos conjugados, $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, então o produto $\omega_{FP} \cdot t_r$ é aproximadamente constante. Portanto, o tempo de subida

(t_r) do sistema diminui à medida que a sua faixa de passagem aumenta. Um pico (ressonância) no diagrama de magnitude do sistema indica sobre-elevação na sua resposta transitória. Quanto maior a amplitude do pico, maior a sobre-elevação (menor ξ).

14. Características da resposta dinâmica do sistema como as discutidas acima (e várias outras não mencionadas) podem ser tomadas como **especificações de desempenho** para o sistema de controle em malha fechada. O controlador $C(s)$ deverá ser projetado através de métodos adequados, de forma a atender, se possível, a todas as especificações formuladas.

Critério de Routh-Hurwitz

Estabilidade entrada-saída
Equações polinomiais
Critério de Routh-Hurwitz
Casos especiais
Polinômios auxiliares
Aplicação em Controle

Estabilidade entrada-saída

1. Lembremos que um sistema é (BIBO) estável, ou estável no sentido entrada-saída, se qualquer entrada limitada aplicada ao sistema produz uma saída limitada. Um sistema linear invariante no tempo é estável se e somente se todas as raízes da equação característica

$$1 + C(s)P(s)F(s) = 0,$$

equivalente a

$$D_C(s)D_P(s)D_F(s) + N_C(s)N_P(s)N_F(s) = 0,$$

possuem partes reais negativas. A análise de estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo pode ser subdividida da seguinte maneira:

Estabilidade absoluta. Deseja-se saber apenas se o sistema **é** ou **não é** estável, isto é, se todas as raízes da equação característica do sistema têm ou não têm partes reais negativas;

Estabilidade relativa. Se o sistema é estável, deseja-se saber **quão** estável é o sistema. O objetivo do estudo de estabilidade relativa é estabelecer **margens** dentro das quais o sistema permanece estável.

Equações polinomiais

2. Antes da sistematização da análise de estabilidade através do critério de Routh-Hurwitz, vamos inferir algumas propriedades sobre equações polinômiais de grau n que apresentam raízes com partes reais negativas. Considere inicialmente a equação de primeiro grau

$$D(s) = a_1s + a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0.$$

A raiz da equação é $s = -a_0/a_1$, e se a raiz é negativa, então $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$ ou $a_1 < 0$ e $a_0 < 0$. Se a raiz é negativa, os coeficientes possuem o mesmo sinal.

3. Considere agora a equação de segundo grau

$$D(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0, \quad a_2 \neq 0,$$

e de maneira análoga, vamos impor que as raízes desta equação, dadas por

$$s_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2},$$

com $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0$, sejam reais negativas ou sejam complexas conjugadas com parte real negativa. Suponha que $\Delta \geq 0$, isto é, que as raízes sejam reais negativas. Então $a_2 > 0$ implica que $a_1 > 0$ pois, caso contrário, s_1 não seria negativa. Neste caso, para que

$$-a_1 + \sqrt{\Delta} = \left(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}\right) < 0,$$

com $a_2 > 0$ e $a_1 > 0$, devemos ter $a_0 > 0$. Por outro lado, $a_2 < 0$ implica $a_1 < 0$ e $a_0 < 0$ através de raciocínio análogo envolvendo a raiz s_2 . Suponha agora que $\Delta < 0$, isto é, que as raízes são complexas conjugadas com parte real negativa, o que impõe que a_2 e a_1 tenham o mesmo sinal. Se $a_2 > 0$ e $a_1 > 0$, então $a_0 > 0$ (para que $\Delta < 0$). Analogamente, se $a_2 < 0$ e $a_1 < 0$, então $a_0 < 0$. A conclusão geral é que se uma equação de segundo grau possui raízes negativas ou com parte real negativa, então seus coeficientes possuem o mesmo sinal: $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$ ou $a_2 < 0$, $a_1 < 0$ e $a_0 < 0$.

4. Um polinômio de terceiro grau sempre pode ser decomposto no produto de um polinômio de primeiro grau por um polinômio de segundo grau:

$$\begin{aligned} D(s) &= a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \quad a_3 \neq 0, \\ &= (\alpha_1s + \alpha_0)(\beta_2s^2 + \beta_1s + \beta_0). \end{aligned}$$

Se as raízes da equação de terceiro grau possuem partes reais negativas, então os coeficientes α_1 e α_0 são ambos positivos ou ambos negativos e os coeficientes β_2 , β_1 e β_0 são todos positivos ou todos negativos. Logo, se as raízes da equação de terceiro grau tiverem partes reais negativas, então os coeficientes a_3 , a_2 , a_1 e a_0 serão todos positivos ou todos negativos.

5. Dado que um polinômio de grau n qualquer sempre pode ser decomposto no produto de polinômios de primeiro e de segundo graus, concluímos que se um polinômio de grau n possuir raízes com partes negativas, então seus coeficientes deverão ser todos positivos ou todos negativos. Uma maneira conveniente de resumir esta propriedade é definindo os seguintes conjuntos: $\mathcal{H}$, conjunto dos polinômios de grau n , cujas raízes possuem partes reais negativas, e $\mathcal{C}$, conjunto dos polinômios de grau n , cujos coeficientes possuem o mesmo sinal. Acabamos de mostrar que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$, isto é, que se D é um polinômio de grau n (qualquer) e $D \in \mathcal{H}$, então $D \in \mathcal{C}$, como ilustra o **diagrama de Venn** da Figura 8.1.

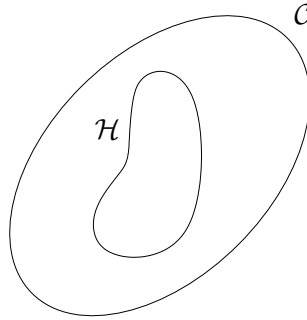


Figura 8.1: Diagrama de Venn.

6. Observamos que $D \in \mathcal{C}$ não implica $D \in \mathcal{H}$, em geral. Exemplo: as raízes do polinômio $D(s) = s^3 + s^2 + 2s + 8$, cujos coeficientes são todos positivos ($D \in \mathcal{C}$) são $p_1 = -2$, $p_2 = 1/2 + j\sqrt{15}/2$ e $p_3 = 1/2 - j\sqrt{15}/2$. As raízes complexas conjugadas possuem parte real positiva, e portanto $D \notin \mathcal{H}$. (O critério de Routh-Hurwitz permite mostrar que $D \in \mathcal{C}$ implica $D \in \mathcal{H}$ para $n \leq 2$.)

Uma importante consequência do estudo realizado é a de que se $D \notin \mathcal{C}$, então $D \notin \mathcal{H}$ (Figura 8.1). Portanto, um sistema dinâmico cuja equação característica apresenta pelo menos um coeficiente nulo ou negativo não pode ser estável, podendo entretanto ser marginalmente estável ou instável.

Critério de Routh-Hurwitz

7. Um método direto para verificar se um dado sistema é ou não estável seria calcular as raízes da equação característica associada através de *softwares* como o MATLAB. Entretanto, a estabilidade absoluta do sistema depende apenas do **sinal** das partes reais das raízes, o que torna o cálculo de raízes, no contexto de estabilidade absoluta, desnecessário. Além disso, muitas vezes desejamos analisar a estabilidade do sistema em função de um ou mais parâmetros do seu modelo matemático sem recorrer a softwares de computação simbólica.

8. O **Critério de Routh-Hurwitz** é um critério algébrico simples para a análise da estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo. O critério de Routh-Hurwitz permite determinar quantas raízes de um polinômio dado possuem partes reais positivas, negativas ou nulas. Conclusões sobre a estabilidade de um sistema de interesse podem então ser obtidas aplicando-se o critério à equação característica associada.

9. Considere o polinômio característico genérico de grau n

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

no qual, por hipótese, $a_0 \neq 0$. Se $a_0 = 0$, uma das raízes da equação característica é zero e o procedimento geral a seguir se aplicaria ao polinômio restante. O primeiro passo para a aplicação do Critério de Routh-Hurwitz é construir o chamado **Array de Routh**:

$$\begin{array}{c|ccccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ s^2 & k_1 & k_2 & & & \\ s^1 & l_1 & & & & \\ s^0 & m_1 & & & & \end{array}$$

Apenas os aspectos operacionais da análise de estabilidade absoluta pelo Critério de Routh-Hurwitz serão tratados. A teoria por trás da construção do array de Routh foge ao escopo do presente curso. As duas primeiras linhas do array referenciadas como s^n e s^{n-1} , respectivamente, são formadas pelos coeficientes de $D(s)$, a primeira pelos coeficientes $a_n, a_{n-2}, \dots$, a segunda pelos coeficientes

$a_{n-1}, a_{n-3}, \dots$ A linha s^{n-2} é calculada a partir das linhas s^n e s^{n-1} de acordo com a seguinte regra:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

A linha s^{n-3} é calculada a partir das linhas s^{n-1} e s^{n-2} pela mesma regra:

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \quad \dots$$

Supondo que nenhum elemento da primeira coluna do array (formada por $a_n, a_{n-1}, b_1, c_1, \dots$) se anula, repete-se o procedimento até que a linha s^0 tenha sido obtida, o que conclui a construção do array de Routh.

10. Critério de Routh-Hurwitz. O número de raízes de $D(s) = 0$ com partes reais positivas é igual ao de trocas de sinal na primeira coluna do array de Routh; as raízes de $D(s) = 0$ possuem partes reais negativas se e somente se todos os coeficientes de $D(s)$ possuem o mesmo sinal e não há troca de sinal na primeira coluna do array.

11. Exemplo. O array de Routh associado ao polinômio de sexto grau $D(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$ é dado por

s^6	1	3	1	4
s^5	4	2	4	0
s^4	$\frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{4}$	$0 = \frac{4 \cdot 1 - 1 \cdot 4}{4}$	$4 = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 0}{4}$	
s^3	$2 = \frac{\frac{5}{2} \cdot 2 - 4 \cdot 0}{\frac{5}{2}}$	$-\frac{12}{5} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 4}{\frac{5}{2}}$	0	
s^2	$3 = \frac{2 \cdot 0 - \frac{5}{2} \cdot (-\frac{12}{5})}{2}$	$4 = \frac{2 \cdot 4 - \frac{5}{2} \cdot 0}{2}$		
s^1	$-\frac{76}{15} = \frac{3 \cdot (-\frac{12}{5}) - 2 \cdot 4}{3}$	0		
s^0	$4 = \frac{-\frac{76}{15} \cdot 4 - 3 \cdot 0}{-\frac{76}{15}}$			

Como existem duas trocas de sinal na primeira coluna do array (da linha s^2 para a linha s^1 e de s^1 para s^0), duas raízes de $D(s) = 0$ encontram-se no semi-plano direito. Um sistema cuja equação característica fosse $D(s) = 0$ seria instável.

12. O critério de Routh-Hurwitz permite analisar apenas a estabilidade absoluta de um sistema. As localizações das raízes não são conhecidas, apenas seus sinais, e nada se pode dizer sobre o comportamento transitório ou de regime do sistema. Uma operação que pode ser realizada no sentido da simplificação de cálculos para a obtenção do array de Routh é dividir uma linha por uma constante positiva. Exemplo: dividindo a linha s^5 do array anterior por 2, obtemos

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ s^5 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ s^4 & \frac{5}{2} & 0 & 4 & \end{array}$$

e o restante do array é idêntico ao anterior. Ao dividirmos a linha, dividimos simultaneamente todos os elementos que multiplicam a linha de cima e o elemento pelo qual as diferenças são divididas; o resultado tem de ser o mesmo. Também é possível mostrar que o último elemento da primeira coluna de qualquer array de Routh é a_0 , o termo constante de $D(s)$.

13. A construção do array de Routh não pode prosseguir de acordo com a regra geral formulada se algum elemento da primeira coluna do array assumir valor nulo. Neste caso, nem todas as raízes de $D(s) = 0$ possuem partes reais negativas e informações adicionais podem ser obtidas analisando-se os casos especiais a seguir.

Casos especiais

14. **Caso Especial I.** Se um elemento da primeira coluna se anula, mas na linha correspondente existe ao menos um elemento não-nulo, o procedimento deve ser o seguinte:

- a) Substitua o elemento nulo pelo número ϵ . Prossiga calculando os demais elementos do array em função de ϵ ;
- b) Após concluído o array, os sinais dos elementos da primeira coluna são determinados fazendo-se $\epsilon \rightarrow 0$;
- c) Se houver trocas de sinal na primeira coluna qualquer que seja o sinal assumido para ϵ , o número de trocas de sinal é igual ao número de raízes com partes reais positivas;

- d) Se houver trocas de sinal na primeira coluna somente se $\epsilon > 0$ ou $\epsilon < 0$, não existem raízes com partes reais positivas; o polinômio possui raízes imaginárias puras.

15. **Exemplo.** Considere o polinômio de quinto grau

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \epsilon & 6 & \\ s^2 & -\frac{12}{\epsilon} & 10 & \\ s^1 & 6 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

Se $\epsilon \rightarrow 0^+$ ou $\epsilon \rightarrow 0^-$, ocorrem duas trocas de sinal na primeira coluna; $D(s) = 0$ possui duas raízes no semi-plano direito. No exemplo acima, o limite $\epsilon \rightarrow 0$ foi tomado logo após a obtenção do primeiro elemento da linha s^2 , igual a $(4\epsilon - 12)/\epsilon$. Isto sempre pode ser feito e simplifica os cálculos.

16. **Caso Especial II.** Uma linha do array é inteiramente nula. Neste caso, os coeficientes da linha imediatamente acima definem (em ordem decrescente de potências de s) um **polinômio auxiliar** $A(s)$, cujas raízes são também raízes do polinômio $D(s)$. O polinômio auxiliar é um **polinômio par**, isto é, $A(s)$ possui apenas potências pares de s . A construção do array de Routh prossegue substituindo-se a linha nula pela derivada de $A(s)$ em relação a s .

17. **Exemplo.** Considere o polinômio do terceiro grau

$$D(s) = s^3 + s^2 + 2s + 2,$$

e o array de Routh associado

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ s^1 & 0 & \end{array}$$

A linha s^1 torna-se nula. O polinômio auxiliar e sua derivada em relação a s são $A(s) = s^2 + 2$ e $A'(s) = 2s$, respectivamente. A linha s^1 é substituída por $A'(s)$ e a construção do array prossegue:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ s^1 & 2 & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

18. As informações extraídas do array de Routh no Caso Especial II são ligeiramente diferentes:

- a) Se houver trocas de sinal na primeira coluna do array, o número de trocas é igual ao número de raízes com partes reais positivas;
- b) Se não houver trocas de sinal, não existem raízes com partes reais positivas; o polinômio possui raízes imaginárias puras;

No exemplo anterior, as raízes imaginárias puras são as raízes de $A(s) = s^2 + 2 = 0$, ou seja, $s_1 = j\sqrt{2}$ e $s_2 = -j\sqrt{2}$.

Polinômios auxiliares

19. Um polinômio auxiliar (par) qualquer pode ser representado na forma

$$A(s) = a_m s^m + a_{m-2} s^{m-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_0,$$

sendo m um número par. Suponha que s_1 é uma raiz de $A(s) = 0$, possivelmente uma raiz complexa de $A(s) = 0$. Então $s_2 = \bar{s}_1$ ($\bar{s}$ é o complexo conjugado de s) também é uma raiz da equação, pois raízes complexas de polinômios com coeficientes reais aparecem em pares complexos conjugados. Como $A(s)$ possui apenas potências pares, $s_3 = -s_1$ e $s_4 = -s_2$ são também raízes de $A(s) = 0$.

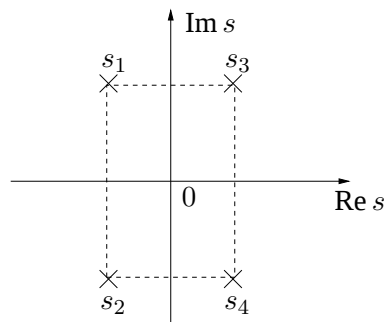


Figura R4.1: Simetria das raízes de polinômios pares.

As raízes de um polinômio par aparecerão simetricamente em relação aos eixos real e imaginário do plano s , como ilustra a Figura R4.1.

20. Exemplos. O polinômio $s^2 - 1$ é par e suas raízes são $s_1 = 1$ e $s_2 = -1$. Se o polinômio for $s^2 + 1$, as raízes serão $s_1 = j$ e $s_2 = -j$. O polinômio $s^4 + 4 = (s^2 + 2s + 2)(s^2 - 2s + 2)$ é par e suas raízes são $s_1 = 1 + j$, $s_2 = 1 - j$, $s_3 = -1 - j$ e $s_4 = -1 + j$. O array de Routh associado a este último polinômio seria

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & 4 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

A linha s^3 se anula e o polinômio auxiliar é $A(s) = s^4 + 4$. A linha s^3 é substituída por $A'(s) = 4s^3 + 0$:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & 4 \\ s^3 & 4 & 0 & \\ s^2 & 0 & 4 & \end{array}$$

O primeiro elemento de s^2 é 0, mas a linha não é nula. Substitui-se 0 por ϵ (caso especial I) e a construção do array prossegue:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & 4 \\ s^3 & 4 & 0 & \\ s^2 & \epsilon & 4 & \\ s^1 & -16/\epsilon & & \\ s^0 & 4 & & \end{array}$$

Após a conclusão do array, existem duas trocas de sinal independentemente do sinal de ϵ . Logo, $s^4 + 4 = 0$ possui 2 raízes no semi-plano direito ($s = 1 \pm j$).

Aplicação em Controle

21. Considere o sistema de controle da Figura R4.2. A planta é estável em malha aberta (raízes no semi-plano esquerdo). Deseja-se saber para que valores de $k_P > 0$ e $k_I > 0$ o sistema será estável em malha fechada.

A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + \left(k_P + \frac{k_I}{s} \right) \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0,$$

ou $s^3 + 3s^2 + (2 + k_P)s + k_I = 0$.

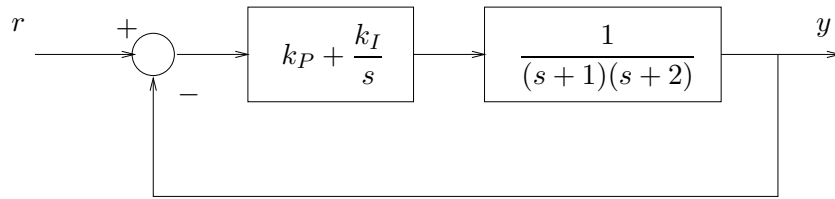


Figura R4.2: Sistema de controle em malha fechada (controlador PI).

O array de Routh associado é

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 + k_P \\ s^2 & 3 & k_I \\ s^1 & \frac{6 + 3k_P - k_I}{3} & \\ s^0 & k_I & \end{array}$$

Para que o sistema seja estável em malha fechada,

$$k_I > 0 \quad \text{e} \quad k_P > \frac{1}{3}k_I - 2,$$

o que fornece a região indicada na Figura R4.3. Qualquer ponto (k_I, k_P) na região hachurada é tal que o sistema em malha fechada é estável.

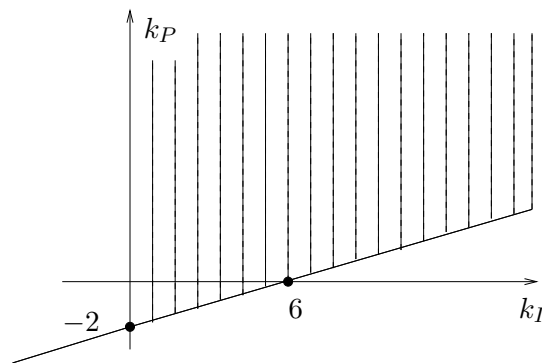


Figura R4.3: Região de ganhos (k_I, k_P) que estabilizam o sistema de controle.

Aula 8

Critério de Nyquist

Princípio do Argumento

Aplicação em controle

Critério de estabilidade de Nyquist

Princípio do Argumento

1. Um sistema linear invariante no tempo é estável no sentido entrada-saída (BIBO-estável) se as partes reais de todas as raízes da sua equação característica são negativas. A análise da **estabilidade absoluta** de um sistema visa descobrir basicamente se o sistema é **estável ou não**, e pode ser eficientemente realizada através do critério algébrico de Routh-Hurwitz. A análise de **estabilidade relativa** envolve determinar **quão estável** é um dado sistema. O chamado **critério de Nyquist** permite uma análise mais completa de questões ligadas a estabilidade (absoluta e/ou relativa) e será discutido a seguir.

2. O critério de Nyquist pode ser visto como uma aplicação em Controle de um resultado de análise complexa conhecido como **Princípio do Argumento** ou **Teorema de Cauchy**. O Princípio do Argumento utiliza os seguintes conceitos básicos:

Função racional em s . Uma função racional em s é qualquer função escrita como a razão de dois polinômios em s . A imagem de $F(s)$ num ponto qualquer s pertencente ao plano complexo $\text{Re } s \times \text{Im } s$, referido como plano s , é vista como um ponto no plano complexo $\text{Re } F(s) \times \text{Im } F(s)$, o qual será referido como **plano $F(s)$** ;

Função analítica em $\mathcal{C}_s$. Uma função é analítica numa **região $\mathcal{C}_s$** do plano s se e somente se a derivada da função existe em todos os pontos de $\mathcal{C}_s$;

Curva fechada no plano s . Um **arco** no plano s é definido como um conjunto de pontos descritos parametricamente por

$$\mathcal{C}_s = \{s(t) = \sigma(t) + j\omega(t), a \leq t \leq b\},$$

em que as partes real $\sigma(t)$ e imaginária $\omega(t)$ são funções contínuas de t variando no intervalo real $[a, b]$. Os pontos de $\mathcal{C}_s$ descrevem um arco num determinado **sentido** (horário ou anti-horário), de acordo com valores crescentes de t . Adota-se a convenção de que o arco é percorrido no sentido horário, positivo. Uma **curva fechada** é todo arco cujas **extremidades** coincidem, isto é, $s(a) = s(b)$.

Princípio do Argumento. Seja $F(s)$ uma função racional em s e $\mathcal{C}_s$ uma curva fechada no plano s . Seja ainda $\mathcal{C}_F = \{F(s), s \in \mathcal{C}_s\}$ o **mapeamento** da curva $\mathcal{C}_s$ no plano $F(s)$. Assuma que

1. $F(s)$ é analítica dentro e sobre $\mathcal{C}_s$, exceto possivelmente num número finito de pólos, e
2. $F(s)$ não possui zeros ou pólos sobre $\mathcal{C}_s$.

Então

$$N = Z - P,$$

sendo Z o número de zeros de $F(s)$ em $\mathcal{C}_s$, P é o número de pólos de $F(s)$ em $\mathcal{C}_s$ e N é o número de vêzes que a curva $\mathcal{C}_F$ **envolve** a origem do plano $F(s)$, no sentido horário se $N > 0$, e anti-horário se $N < 0$. A Figura 8.1(a) ilustra uma curva fechada no plano s que satisfaz as hipóteses do Princípio do Argumento. Assume-se que $F(s)$ possui três zeros ($Z = 3$) e um pólo ($P = 1$) no interior de $\mathcal{C}_s$. Neste caso, a curva $\mathcal{C}_F$ envolve a origem do plano $F(s)$ duas vêzes no sentido horário (Figura 8.1(b)).

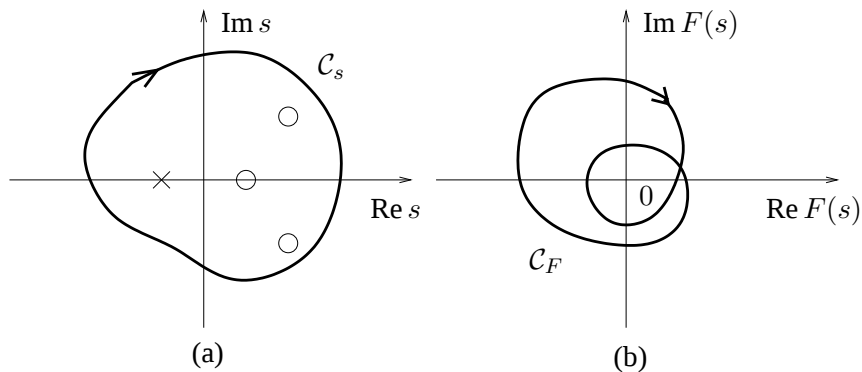


Figura 8.1: Princípio do Argumento: (a) $\mathcal{C}_s$, (b) $\mathcal{C}_F$.

Aplicação em controle

3. Considere a equação característica

$$F(s) = 1 + G(s) = 0,$$

referente a um dado sistema de controle, onde $G(s)$ representa o ganho de malha do sistema, isto é, $G(s)$ é o resultado do produto das funções de transferência do controlador, da planta e do sensor. Assuma que $G(s)$ se encontra na forma fatorada:

$$G(s) = \frac{k \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p} (s - p_i)},$$

onde os z_i 's e p_i 's são os n_z zeros e n_p pólos de $G(s)$. Para que o sistema seja estável em malha fechada, todos os **zeros de $F(s)$** (pólos do sistema em malha fechada) devem situar-se no semi-plano esquerdo do plano s .

4. Uma aplicação imediata do Princípio do Argumento na análise de estabilidade de um sistema de controle em malha fechada se daria da seguinte forma:

1. Escolhe-se uma curva fechada $\mathcal{C}_s$ envolvendo todo o semiplano direito do plano s ;
2. Obtem-se a curva correspondente $\mathcal{C}_F$ e determina-se N , o número de vezes que $\mathcal{C}_F$ envolve a origem do plano $F(s)$;
3. O número de zeros de $F(s)$ no semi-plano direito (interior de $\mathcal{C}_s$) é igual a $Z = N + P$, onde P é o número de pólos de $F(s)$ no semiplano direito.

5. É importante notar que os pólos de $G(s)$ são também os pólos de $F(s)$. De fato,

$$F(s) = 1 + G(s) = 1 + \frac{k \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p} (s - p_i)} = \frac{\prod_{i=1}^{n_p} (s - p_i) + k \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p} (s - p_i)}.$$

Portanto o valor de P é conhecido. O que não se conhece é Z , o número de zeros de $F(s)$ (pólos do sistema em malha fechada) no semiplano direito. Para

obter Z seria necessário fatorar o numerador de $F(s)$. O Princípio do Argumento permite determinar Z indiretamente através de N , o número de vezes que a curva $\mathcal{C}_F$ envolve a origem do plano $F(s)$.

Crítério de estabilidade de Nyquist

6. A parte crítica da aplicação do Princípio do Argumento é a obtenção do mapeamento $\mathcal{C}_F = \{F(s), s \in \mathcal{C}_s\}$, para o que é conveniente expressar $F(s)$ na forma exponencial $F(s) = |F(s)|e^{j\phi(s)}$. As quantidades $|F(s)|$ e $\phi(s)$ num ponto qualquer s são facilmente calculadas quando $F(s)$ encontra-se na forma fatorada, mas isso exigiria fatorar o numerador de $F(s)$. A solução é adaptar o Princípio do Argumento à função $G(s)$, cuja forma fatorada é conhecida. O mapeamento alternativo

$$\mathcal{C}_G = \{G(s) = -1 + F(s), s \in \mathcal{C}_s\}$$

nada mais é do que o mapeamento $\mathcal{C}_F$ **transladado** de -1 (isto é, de $-1 + j0$). Assim sendo, se $\mathcal{C}_F$ envolver N vezes a origem do plano $F(s)$, então $\mathcal{C}_G$ (translação de $\mathcal{C}_F$) envolverá N vezes o ponto $-1 + j0$ no **plano** $G(s)$, como ilustra a Figura 8.2.

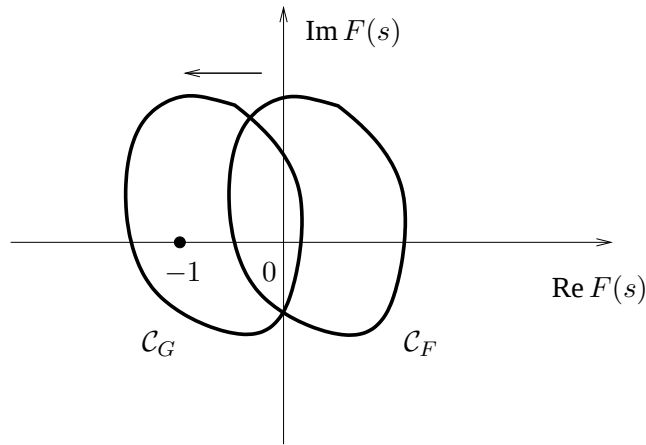


Figura 8.2: Translação da curva $\mathcal{C}_F$ para obtenção de $\mathcal{C}_G$.

7. Para que $Z = N + P = 0$, isto é, para que nenhum zero de $F(s)$ (pólo do sistema em malha fechada) esteja no semiplano direito do plano s , e desta forma o sistema de controle em malha fechada seja estável, a curva $\mathcal{C}_G$ deve envolver P

vêzes o ponto $-1 + j0$ no sentido **anti-horário** ($N < 0$).

Critério de estabilidade de Nyquist. Um sistema de controle realimentado é estável se e somente se a curva $\mathcal{C}_G$ envolve P vêzes o ponto $-1 + j0$ no sentido anti-horário, onde P é o número de pólos de $G(s)$ (e de $F(s)$) no semiplano direito do plano s .

8. A construção do chamado **Diagrama de Nyquist** para análise de estabilidade será discutida em termos de um exemplo ilustrativo. A função de malha aberta

$$G(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)}, \quad k > 0, \tau > 0$$

possui um pólo na origem e um pólo real em $-1/\tau < 0$. Nenhum pólo de $G(s)$ encontra-se no semiplano direito e portanto $P = 0$. A curva $\mathcal{C}_s$ adequada à análise do sistema realimentado (cuja equação característica é $1 + G(s) = 0$) é como ilustrada na Figura 8.3.

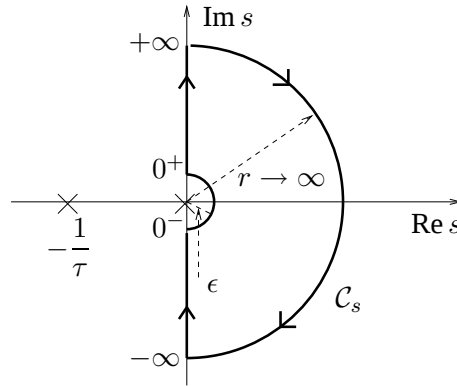


Figura 8.3: Curva $\mathcal{C}_s$ para $G(s) = k/s(\tau s + 1)$.

A curva $\mathcal{C}_s$ da Figura 8.3 cumpre duas condições básicas para a aplicação do Critério de Nyquist. Primeiro, a curva não pode passar sobre zeros ou pólos de $G(s)$, razão pela qual a curva contorna o pólo na origem com um semicírculo de raio $\epsilon > 0$ tendendo a zero, para que apenas o pólo na origem seja excluído. Segundo, a curva deve envolver todo o semiplano direito, razão pela qual adota-se um semicírculo de raio $r > 0$ tendendo ao infinito.

9. O mapeamento de $\mathcal{C}_s$ em $\mathcal{C}_G = \{G(s), s \in \mathcal{C}_s\}$ é obtido por **trechos**, nos quais os valores de $s \in \mathcal{C}_s$ são explicitamente caracterizados.

$\{0^- \rightarrow 0^+\}$

Neste trecho, os valores de C_s podem ser descritos como

$$s = \epsilon e^{j\phi}, \quad -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ,$$

pois o módulo de s é ϵ e a fase varia de -90° a 90° quando o semicírculo é percorrido de 0^- a 0^+ . O mapeamento de $s = \epsilon e^{j\phi}$ no plano $G(s)$ é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(s)|_{s=\epsilon e^{j\phi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{k}{\epsilon e^{j\phi}} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\epsilon} e^{-j\phi}.$$

A magnitude de $G(s)$ é infinita e quando a fase de s varia de -90° a 90° na curva C_s , a fase de $G(s)$ varia de 90° a -90° na curva C_G . O mapeamento de $s = \epsilon e^{j\phi}$ no plano $G(s)$ é representado na Figura 10.4 pelo semicírculo de raio infinito conectando as frequências de $\omega = 0^-$ a $\omega = 0^+$;

$\{0^+ \rightarrow +\infty\}$

Neste trecho, $s = j\omega$, $0^+ \leq \omega \leq +\infty$. O mapeamento é

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{k}{j\omega(j\omega\tau + 1)}, \\ &= \frac{k}{\omega\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \angle -90^\circ - \tan^{-1} \omega\tau. \end{aligned}$$

Quando $\omega \rightarrow 0^+$, a magnitude de $G(s)$ tende a $+\infty$ e a fase de $G(s)$ tende a -90° (por valores menores do que -90°). Quando $\omega \rightarrow +\infty$, a magnitude tende a 0 e a fase tende a -180° . Em $\omega = 1/\tau$, a amplitude vale $k\tau/\sqrt{2}$ e a fase vale -135° . O mapeamento do trecho $\{0^+ \rightarrow +\infty\}$ encontra-se ilustrado na Figura 8.4.

$\{+\infty \rightarrow -\infty\}$

Neste trecho, os valores da curva C_s podem ser descritos como

$$s = re^{j\phi}, \quad r \rightarrow \infty, \quad -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ,$$

e o seu mapeamento no plano $G(s)$ é

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G(s)|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k}{re^{j\phi}(\tau re^{j\phi} + 1)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k/\tau}{r^2} e^{-j(2\phi)}.$$

A magnitude de $G(s)$ é zero, ao mesmo tempo em que a fase de $G(s)$ **salta** de -180° (quando $\phi = 90^\circ$) em $\omega = +\infty$ para 180° (quando $\phi = -90^\circ$) em $\omega = -\infty$. O mapeamento do trecho $\{+\infty \rightarrow -\infty\}$ é a origem do plano $G(s)$ (Figura 8.4).

$$\{-\infty \rightarrow 0^-\}$$

Neste trecho, $s = -j\omega$, $0^- \leq \omega \leq -\infty$. Como $|G(-j\omega)| = |G(j\omega)|$ e $\angle G(-j\omega) = -\angle G(j\omega)$, isto é, $G(-j\omega)$ é o complexo conjugado de $G(j\omega)$, o mapeamento do trecho $\{-\infty \rightarrow 0^-\}$ é o complexo conjugado do obtido no trecho $\{0^+ \rightarrow +\infty\}$. O **Diagrama de Nyquist** de $G(s)$ é simétrico em relação ao eixo real, como ilustra a Figura 8.4.

10. Como $P = 0$, pois $G(s)$ não possui pólos no semiplano direito, e $N = 0$, pois $\mathcal{C}_G$ não envolve o ponto $-1 + j0$, conclui-se que $Z = 0$. O sistema realimentado é estável para quaisquer k e τ positivos.

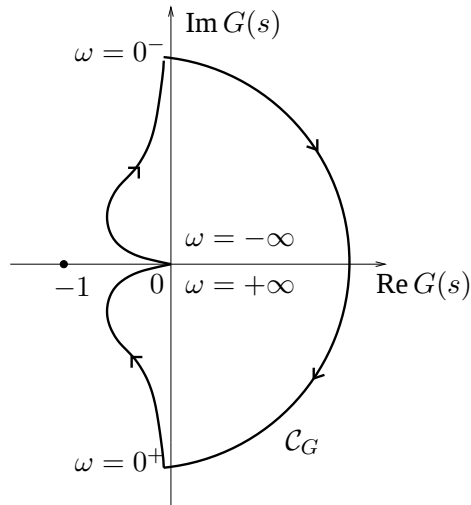


Figura 8.4: Diagrama de Nyquist de $G(s) = k/s(\tau s + 1)$.

Aula 9

Critério de Nyquist

Margem de ganho e margem de fase

Margem de ganho e margem de fase

1. Os conceitos de margem de ganho e margem de fase serão motivados através da análise do diagrama de Nyquist da função de malha aberta de segunda ordem

$$G(s) = \frac{k}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad k > 0, \tau_1 > 0, \tau_2 > 0.$$

Adota-se a mesma curva $\mathcal{C}_s$ da Figura 8.3. O mapeamento $\mathcal{C}_G$ é obtido por trechos.

$\{0^- \rightarrow 0^+\}$

Neste trecho, $s = \epsilon e^{j\phi}$, $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$. O mapeamento de s através de $G(s)$ é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(s)|_{s=\epsilon e^{j\phi}} = \frac{k}{\epsilon e^{j\phi}(\tau_1 \epsilon e^{j\phi} + 1)(\tau_2 \epsilon e^{j\phi} + 1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\epsilon} e^{-j\phi}.$$

A magnitude de $G(s)$ é infinita, enquanto a fase de $G(s)$ varia de 90° a -90° quando s vai de 0^- a 0^+ (Figura 9.1).

$\{0^+ \rightarrow +\infty\}$

Neste trecho, $s = j\omega$, $0^+ \leq \omega \leq +\infty$. O mapeamento de s através de $G(s)$ é

$$G(j\omega) = \frac{k}{\omega \sqrt{(\omega\tau_1)^2 + 1} \sqrt{(\omega\tau_2)^2 + 1}} \angle -90^\circ - \tan^{-1} \omega\tau_1 - \tan^{-1} \omega\tau_2.$$

Quando $\omega \rightarrow 0^+$, a magnitude de $G(s)$ tende ao infinito, enquanto a fase de $G(s)$ tende a -90° (por valores menores do que -90°). Quando $\omega \rightarrow +\infty$,

a magnitude de $G(s)$ tende a zero, enquanto a fase de $G(s)$ tende a -270° , indicando que $\mathcal{C}_G$ cruza o eixo real (Figura 9.1).

$$\{+\infty \rightarrow -\infty\}$$

Neste trecho, $s = re^{j\phi}$, $r \rightarrow \infty$, $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$. O mapeamento de s através de $G(s)$ é

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} G(s)|_{s=re^{j\phi}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k}{re^{j\phi}(\tau_1 re^{j\phi} + 1)(\tau_2 re^{j\phi} + 1)} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k/(\tau_1 \tau_2)}{r^3} e^{-j3\phi}. \end{aligned}$$

A magnitude de $G(s)$ é zero, enquanto a fase de $G(s)$ salta -270° (quando $\phi = 90^\circ$) para 270° (quando $\phi = -90^\circ$). O trecho é mapeado na origem do plano $G(s)$ (Figura 9.1).

$$\{-\infty \rightarrow 0^-\}$$

Neste trecho $s = j\omega$, $-\infty \leq \omega \leq 0^-$. O mapeamento de s através de $G(s)$ é igual ao complexo conjugado do obtido no trecho $\{0^+ \rightarrow +\infty\}$ (Figura 9.1)

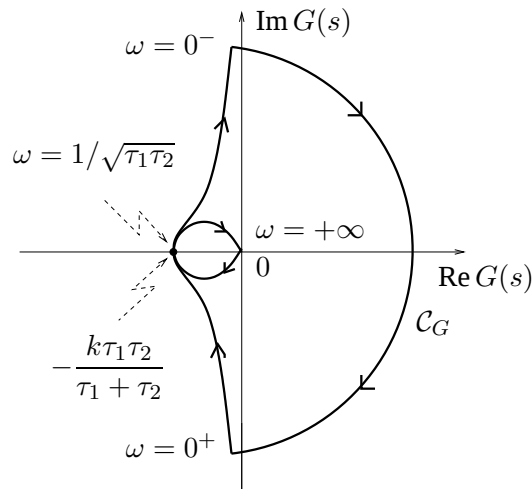


Figura 9.1: Diagrama de Nyquist de $G(s) = k/s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$.

2. A função de transferência de malha aberta $G(s)$ não possui pólos no semiplano direito e portanto $P = 0$. Para que o sistema de controle seja estável em malha fechada é necessário que $Z = N + P = 0$, isto é, o diagrama de Nyquist (curva $\mathcal{C}_G$) da Figura 11.1 não pode envolver nenhuma vez o ponto $-1 + j0$ ($N = 0$).

3. A estabilidade do sistema realimentado depende do ponto de cruzamento da curva $\mathcal{C}_G$ com o eixo real. Se o cruzamento se der num ponto a direita de $-1 + j0$, o sistema realimentado será estável porque $-1 + j0$ não será envolvido nenhuma vez ($N = 0$). Se o cruzamento se der num ponto a esquerda de $-1 + j0$, o sistema realimentado será instável porque $-1 + j0$ será envolvido duas vezes ($N = 2$, $Z = 2$), indicando que duas raízes de $1 + G(s) = 0$ (pólos do sistema realimentado) encontram-se no semiplano direito.

4. A frequência na qual a fase de $G(j\omega)$ vale -180° (ponto sobre o eixo real) é igual a $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$ (verifique). A magnitude de $G(j\omega)$ nessa frequência vale (calcule) $k\tau_1\tau_2/(\tau_1 + \tau_2)$. Neste caso para que o sistema realimentado seja estável,

$$-k \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} > -1 \quad \text{ou} \quad k < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}.$$

O ganho $k = (\tau_1 + \tau_2)/(\tau_1\tau_2)$ é o ganho crítico do sistema. Corresponde ao ganho onde o lugar das raízes do sistema em malha fechada cruza o eixo imaginário do plano s . De fato, o array de Routh associado à equação característica

$$s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + k = \tau_1\tau_2 s^3 + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + s + k = 0$$

é

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & \tau_1\tau_2 & 1 \\ s^2 & \tau_1 + \tau_2 & k \\ s^1 & \frac{(\tau_1 + \tau_2) - k(\tau_1\tau_2)}{\tau_1 + \tau_2} & \\ s^0 & & \end{array}$$

A linha s^1 do array se anula quando $k = (\tau_1 + \tau_2)/(\tau_1\tau_2)$. O polinômio auxiliar extraído da linha s^2 é $D_A(s) = (\tau_1 + \tau_2)s^2 + k$, e sua derivada é $D'_A(s) = 2(\tau_1 + \tau_2)s$. Substituindo a linha s^1 do array pelo polinômio $D'_A(s) = 2(\tau_1 + \tau_2)s$, obtém-se

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & \tau_1\tau_2 & 1 \\ s^2 & \tau_1 + \tau_2 & \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2} \\ s^1 & 2(\tau_1 + \tau_2) & \\ s^0 & \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2} & \end{array}$$

Como toda a primeira coluna do array é positiva ($\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$), a equação característica possui raízes imaginárias puras para $k = (\tau_1 + \tau_2)/(\tau_1\tau_2)$ (caso especial II), correspondentes ao cruzamento do lugar das raízes do sistema em malha fechada com o eixo imaginário. As raízes correspondentes ao cruzamento com o eixo imaginário são obtidas do polinômio auxiliar:

$$(\tau_1 + \tau_2)s^2 + k = (\tau_1 + \tau_2)s^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2} = 0$$

implica $s_{1,2} = \pm j(1/\sqrt{\tau_1\tau_2})$. A frequência no cruzamento vale $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$, como esperado. Se $k > (\tau_1 + \tau_2)/(\tau_1\tau_2)$, duas raízes da equação característica migram para o semiplano direito. A existência destas duas raízes no semiplano direito será indicada no diagrama de Nyquist pelo envolvimento do ponto $-1 + j0$ duas vezes.

5. A aplicação do diagrama de Nyquist se restringiu até o momento à análise da estabilidade absoluta do sistema realimentado - critério de Nyquist - e nesse sentido não houve avanço em relação ao critério de Routh-Hurwitz. Entretanto, o diagrama de Nyquist também pode ser usado na análise da estabilidade relativa do sistema.

Margem de ganho. A margem de ganho do sistema realimentado é definida como a quantidade MG tal que

$$MG \times |G(j\omega_0)| = 1,$$

onde ω_0 é a frequência na qual a fase de $G(j\omega)$ vale -180° . Corresponde ao maior valor pelo qual a magnitude de $G(j\omega)$ pode ser multiplicada antes que o sistema realimentado torne-se instável. É usual representar a margem de ganho em dB:

$$MG_{dB} = 20 \log MG = -20 \log |G(j\omega_0)|.$$

O sistema realimentado é estável se $MG > 1$ ($|G(j\omega_0)| < 1$, $MG_{dB} > 0$) e instável se $MG < 1$ ($|G(j\omega_0)| > 1$, $MG_{dB} < 0$). A margem de ganho pode ser obtida do diagrama de Nyquist determinando-se a magnitude de $G(j\omega)$ correspondente à fase de -180° .

Margem de fase. A margem de fase do sistema realimentado é definida como a máxima defasagem MF (em graus) tal que

$$MF = 180^\circ + \phi,$$

onde $\phi = \angle G(j\omega_1)$ e ω_1 é a frequência na qual $|G(j\omega_1)| = 1$. Corresponde à maior defasagem que pode ser introduzida em $G(j\omega)$ antes que o sistema torne-se

instável. O sistema realimentado será estável se $MF > 0$ e instável se $MF < 0$. A margem de fase pode ser obtida do diagrama de Nyquist determinando-se a fase de $G(j\omega)$ no ponto onde a magnitude é unitária.

6. A Figura 9.2 ilustra o diagrama de Nyquist de um sistema hipotético. Margens de ganho e de fase são facilmente obtidas calculando-se as magnitudes de $G(j\omega)$ no eixo real (onde a fase vale -180°) e os ângulos formados na interseção de $G(j\omega)$ com o quarto-de-círculo de raio unitário (onde a magnitude vale 1). Em particular, k_3 torna o sistema instável ($MG < 1$).

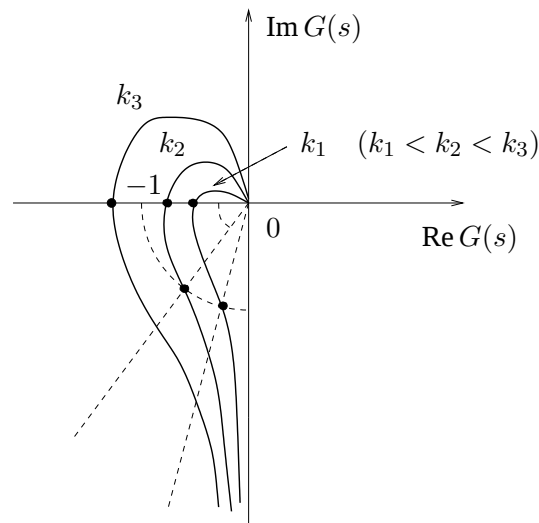


Figura 9.2: Obtenção das margens de ganho e fase via diagrama de Nyquist.

7. Embora não vá ser objeto do presente curso, o **projeto** de compensadores do tipo avanço, atraso ou avanço-atraso, por exemplo, pode ser realizado através da compensação do diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$, de forma a obter, por exemplo, margens de ganho e fase especificadas. Neste curso as técnicas de compensação baseadas em resposta em frequência serão discutidas através dos **diagramas de bode** de $G(j\omega)$.

Aula 10**Lugar das Raízes**

Motivação

Condições de magnitude e fase

Regras básicas

Motivação

1. Considere o sistema de controle abaixo

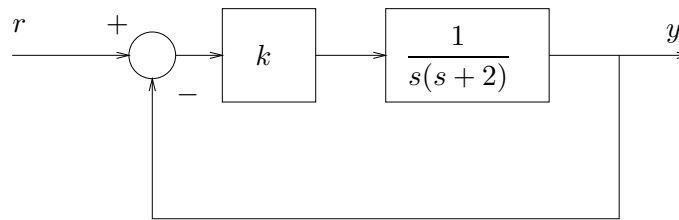


Figura 10.1: Sistema de controle em malha fechada.

A equação característica associada ao sistema em malha fechada,

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 2s + k} = \frac{N_T(s)}{D_T(s)},$$

é

$$D_T(s) = s^2 + 2s + k = 0,$$

e o sistema é (BIBO) estável para todo $k > 0$. O comportamento transitório do sistema depende da localização das raízes da equação característica (pólos do sistema em malha fechada), as quais dependem de k . De fato, as raízes da equação característica são

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - k}$$

Se $0 < k < 1$ as raízes são reais negativas e o sistema é sobre-amortecido. Se $k = 1$ as raízes são reais, iguais e negativas, e o sistema é criticamente amortecido.

Se $k > 1$ as raízes são complexas conjugadas e o sistema é sub-amortecido:

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{k-1}.$$

Um gráfico descrevendo como as raízes da equação característica variam quando k varia de $k = 0$ a $k \rightarrow \infty$ - o **lugar das raízes** do sistema em malha fechada - é apresentado na Figura 10.2.

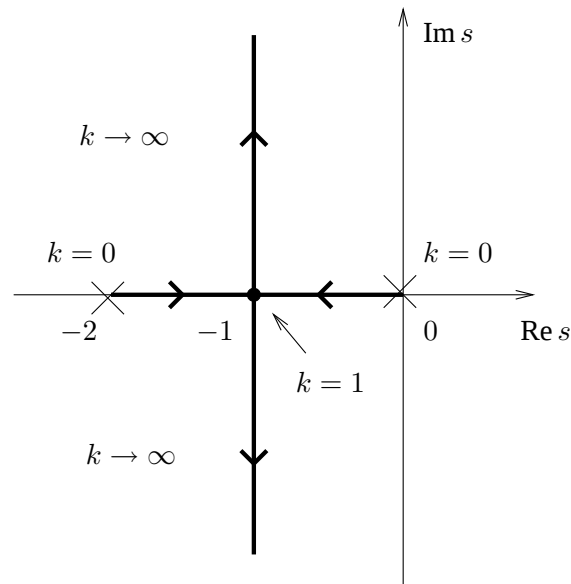


Figura 10.2: **Lugar das raízes** da equação característica.

Condições de magnitude e fase

2. O **Lugar das Raízes (LR)** de um sistema nada mais é do que um gráfico descrevendo como as raízes da equação característica do sistema variam em função de algum parâmetro de interesse, tomado como variável independente.

3. No sistema de controle representado na Figura 10.3, $k > 0$ é um parâmetro variável, como um ganho proporcional. As funções de transferência $P(s)$ e $F(s)$ são dadas. A equação característica do sistema é $1 + kP(s)F(s) = 0$. O objetivo é **esboçar** o lugar das raízes da equação característica para $0 < k < \infty$.

4. A quantidade $kP(s)F(s)$ é complexa para cada frequência complexa s . Condições básicas para que $s = s_1$ seja uma raiz da equação característica podem ser

estabelecidas em termos da magnitude e da fase de $kP(s_1)F(s_1) = -1$.

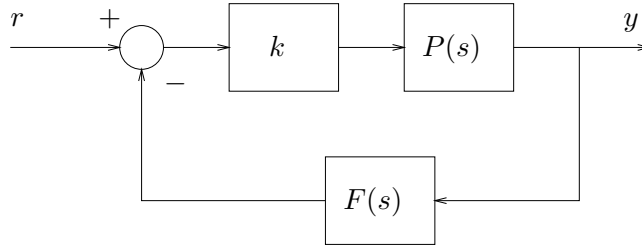


Figura 10.3: Sistema de controle com parâmetro variável k .

Condição de magnitude. A magnitude do número complexo $kP(s_1)F(s_1)$ deve ser unitária:

$$|kP(s_1)F(s_1)| = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{|P(s_1)F(s_1)|}.$$

Condição de fase. A fase do número complexo $kP(s_1)F(s_1)$ deve ser um múltiplo ímpar de 180° (as partes real e imaginária de $kP(s_1)F(s_1)$ são -1 e zero, respectivamente, o que coloca $kP(s_1)F(s_1)$ sobre o eixo real do terceiro quadrante do plano s):

$$\angle P(s_1)F(s_1) = 180^\circ \times r, \quad r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

5. O esboço do LR é usado para analisar efeitos como a variação de um parâmetro ou a introdução de pólos ou zeros no sistema de controle. Uma das finalidades do traçado do LR é projetar controladores a partir das especificações de desempenho formuladas e da análise do LR do sistema de controle em malha fechada.

6. O primeiro passo para obter o esboço do LR do sistema de interesse é expressar $P(s)F(s)$ na forma zeros-pólos:

$$\begin{aligned} P(s)F(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (m \leq n), \\ &= \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}. \end{aligned}$$

As quantidades $z_1, z_2, \dots, z_m$ e $p_1, p_2, \dots, p_n$ são os m zeros e n pólos do sistema em malha aberta. Os zeros e pólos de $P(s)F(s)$ são representados no LR através dos símbolos "O" e "X", respectivamente. Deseja-se determinar as n raízes da equação característica $1 + kP(s)F(s) = 0$ (pólos do sistema em malha fechada) para $0 < k < \infty$. Num ponto qualquer s que pertença ao LR, a condição de fase assume a forma

$$\sum_{i=1}^m \phi_{z_i} - \sum_{i=1}^n \phi_{p_i} = 180^\circ \times r, \quad r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

em que ϕ_{z_i} (ϕ_{p_i}) é a fase de z_i (p_i) em relação ao ponto s . A fase entre pontos quaisquer no plano s é positiva no sentido anti-horário a partir do eixo real.

Regras básicas

7. (**Simetria**) O LR é **simétrico** em relação ao eixo real. A razão é que se $s = s_1$ pertence ao LR, então

$$1 + kP(s_1)F(s_1) = 0,$$

o que implica que $1 + kP(s_2)F(s_2) = 0$, com $s_2 = \bar{s}_1$. Em equações polinomiais com coeficientes reais como a equação característica, raízes complexas aparecem em pares complexos conjugados, o que implica na simetria do LR em relação ao eixo real.

8. (**LR no eixo real**). O LR inclui todos os pontos sobre o eixo real situados à esquerda de um número total ímpar de zeros e pólos **reais**. De fato, considere um ponto qualquer $s = s_1$ sobre o eixo real. As fases dos zeros e pólos reais situados à esquerda de s_1 em relação a s_1 são nulas, resultando numa contribuição de fase nula em s_1 . As fases dos zeros e pólos reais situados à direita de s_1 em relação a s_1 se somam, resultando numa contribuição de fase múltipla (par ou ímpar) de 180° em s_1 . Logo s_1 pertencerá ao LR se o número total de zeros e pólos reais à direita de s_1 for ímpar. Como a contribuição total de um par de zeros ou pólos complexos conjugados em qualquer ponto do eixo real é sempre de 360° , apenas zeros e pólos reais determinam o LR sobre o eixo real.

9. (**Pontos de partida e chegada**). O LR começa nos pólos de $P(s)F(s)$, quando $k = 0$, e termina nos zeros de $P(s)F(s)$, quando $k \rightarrow \infty$. De fato, a equação característica é equivalente a

$$(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) + kb_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) = 0,$$

e quando $k = 0$, as n raízes da equação característica são $p_1, p_2, \dots, p_n$. Por outro lado,

$$P(s)F(s) = -\frac{1}{k},$$

e $P(s)F(s) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, isto é, as raízes da equação característica tendem aos zeros de $P(s)F(s)$. Um zero de $P(s)F(s)$ pode ser **finito**, quando $P(s)F(s) = 0$ é satisfeita para algum $s = s_1$ cujo módulo é finito, ou **infinito**, quando $P(s)F(s) = 0$ é satisfeita para $s \rightarrow \infty$ (módulo de s tendendo ao infinito). O número de zeros infinitos de $P(s)F(s)$ é igual à diferença $n - m$.

10. (Ângulos e interseção de assíntotas). Se $P(s)F(s)$ possui $n - m$ zeros infinitos ($n - m \geq 1$), então o LR tende a $n - m$ **assíntotas** quando $k \rightarrow \infty$. As assíntotas são determinadas pelos ângulos

$$\theta = \frac{180^\circ \times r}{n - m}, \quad r = \pm 1, \pm 3, \pm 5.$$

De fato, quando $n - m \geq 1$ a equação $1 + kP(s)F(s) = 0$ é satisfeita para $s \rightarrow \infty$ e a análise pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} kP(s)F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} k \frac{b_m s^m + \dots}{s^n + \dots} = \lim_{s \rightarrow \infty} k \frac{b_m}{s^{n-m}}.$$

e o LR da equação característica tende ao LR da equação

$$1 + k \frac{b_m}{s^{n-m}} = 0,$$

ou $s^{n-m} = -kb_m$. A magnitude das raízes tende ao infinito (devido à hipótese de que $s \rightarrow \infty$) e as fases tendem aos ângulos θ apresentados acima. É possível mostrar que as assíntotas se interceptam no eixo real no ponto

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m},$$

em que os p_i 's e z_i 's são os pólos e zeros finitos de $P(s)F(s)$. O ponto de interseção das assíntotas não é necessariamente um ponto pertencente ao LR. Se $n - m = 1$ o ângulo da assíntota é de 180° (ou $-180^\circ, 540^\circ, \dots$). Neste caso não existe interseção de assíntotas e σ_a perde sentido.

Exemplo 1: Considere a função de transferência

$$P(s)F(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

O LR é simétrico e compreende todos os pontos sobre o eixo real situados entre os pólos $s = 0$ e $s = -2$. O LR começa nos pólos de $P(s)F(s)$ (quando $k = 0$) e termina nos zeros (infinitos) de $P(s)F(s)$ (quando $k \rightarrow \infty$). Como $n = 2$ e $m = 0$, o LR da equação característica possui $n - m = 2$ assíntotas. Os ângulos das assíntotas são $\theta_1 = 180^\circ/2 = 90^\circ$ e $\theta_2 = -180^\circ/2 = -90^\circ$. As escolhas $r = 1$ e $r = -1$ são arbitrárias. As assíntotas se interceptam no eixo real no ponto $\sigma_a = (0 + (-2))/2 = -1$.

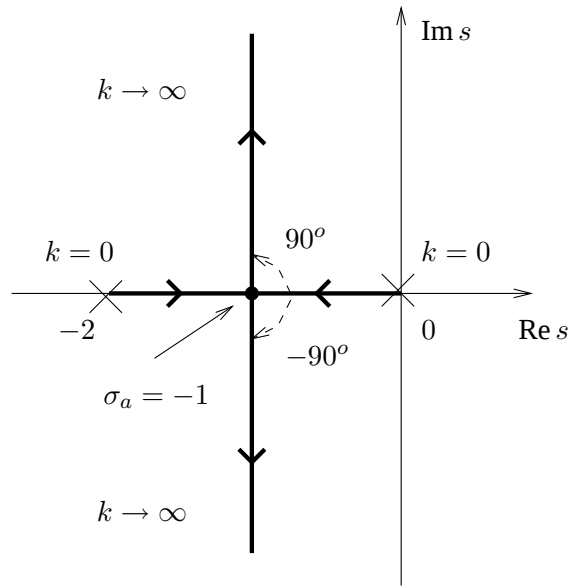


Figura 10.4: LR da equação $1 + 1/s(s + 2) = 0$.

O LR resultante (Figura 10.4) é o mesmo ilustrado na Figura 10.2. Neste exemplo particular, o LR se confunde com as assíntotas ($k > 1$). Numa situação mais geral, o LR apenas **tende** para as assíntotas quando $k \rightarrow \infty$.

11. (Pontos de saída e de entrada). O LR pode apresentar pontos onde as raízes da equação característica deixam de ser reais para se tornarem complexas conjugadas (pontos de saída) ou, inversamente, deixam de ser complexas conjugadas para se tornarem reais (pontos de entrada). Os pontos de saída e entrada do LR no eixo real aparecerão **entre** as raízes da equação polinomial

$$\frac{d}{ds} P(s)F(s) = \frac{d}{ds} \frac{N(s)}{D(s)} = 0,$$

que é equivalente a

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0.$$

De fato, reescrevendo a equação característica como

$$1 + kP(s)F(s) = 1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 0,$$

obtem-se a forma equivalente $Q(s) = D(s) + kN(s) = 0$. Devido à simetria do LR, nos pontos de saída e entrada a equação característica deve apresentar raízes reais múltiplas, isto é, se $s = s_1$ é um ponto de saída ou entrada, então

$$Q(s) = (s - s_1)^l Q_1(s),$$

em que l é a multiplicidade de s_1 ($l \geq 2$). Derivando $Q(s)$ em relação a s , obtém-se

$$\begin{aligned} Q'(s) &= l(s - s_1)^{l-1} Q_1(s) + (s - s_1)^l Q_1'(s), \\ &= (s - s_1)^{l-1} [lQ_1(s) + (s - s_1)Q_1'(s)], \end{aligned}$$

Portanto, s_1 também é uma raiz (de multiplicidade $l - 1$) de $Q'(s)$. Entretanto,

$$\begin{aligned} Q'(s) &= D'(s) + kN'(s), \\ &= D'(s) - \frac{D(s)}{N(s)} N'(s). \end{aligned}$$

Sendo assim, um ponto de saída ou entrada deve satisfazer

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0,$$

a qual por sua vez é equivalente a

$$\frac{d}{ds} P(s)F(s) = \frac{d}{ds} \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s)N'(s) - D'(s)N(s)}{D(s)^2} = 0.$$

Nem toda solução de $D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0$ é um ponto de entrada ou saída do LR no eixo real. Para descobrir se uma raiz é um ponto de entrada ou saída é necessário esboçar o LR e verificar em que intervalos no eixo real poderiam haver pontos de entrada ou saída.

Exemplo 2: Considere $1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0$. Neste caso,

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = (2s+2)(1) - (s^2+2s)(0) = 2s+2 = 0$$

e a solução é $s_1 = -1$. Observando a Figura 10.4, percebe-se claramente que $s_1 = -1$ é um ponto de saída do LR no eixo real.

Exemplo 3: Considere $1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = 0$. Do mesmo modo,

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = (3s^2 + 6s + 2)(1) - (s^3 + 3s^2 + 2s)(0) = 3s^2 + 6s + 2 = 0,$$

e neste caso as raízes são $s_1 = -0.4226$ e $s_2 = -1.5774$. Para descobrir se alguma das raízes é ponto de saída ou entrada é necessário esboçar o LR, como na Figura 10.5.

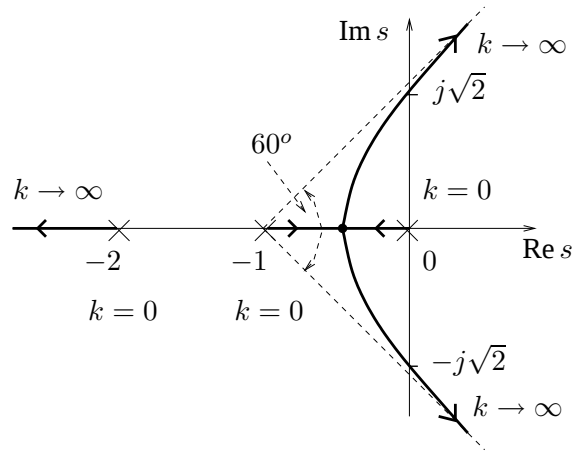


Figura 10.5: LR da equação $1 + 1/s(s+1)(s+2) = 0$.

Note que o LR possui $n - m = 3 - 0 = 3$ assíntotas, cujos ângulos são 60° , -60° e 180° . As assíntotas se interceptam no ponto $\sigma_a = (0 - 1 - 2)/3 = -1$. Existe um ponto de saída entre 0 e -1 e seu valor é precisamente $s_1 = -0.4226$ encontrado resolvendo-se a equação polinomial acima.

Aula 11

Lugar das Raízes

Regras adicionais
Projeto de compensadores

Regras adicionais

1. **(Cruzamento com o eixo imaginário)** Os possíveis pontos de cruzamento do LR com o eixo imaginário ($s = 0 + j\omega$) são determinados resolvendo-se

$$D(j\omega) + kN(j\omega) = 0 + j0$$

em termos de k e ω . As partes real e imaginária de $D(j\omega) + kN(j\omega)$ dependem genericamente de k e ω e devem ser nulas por conta da igualdade com zero. Logo dispõe-se de duas equações homogêneas para duas incógnitas. A solução do sistema de equações fornece os pontos de cruzamento com o eixo imaginário.

Exemplo 1. Considere $1 + k \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$. Se $s = j\omega$, obtém-se

$$\begin{aligned} D(j\omega) + kN(j\omega) &= (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + k, \\ &= -j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + k, \\ &= (k - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3), \\ &= 0 + j0. \end{aligned}$$

Logo, $k - 3\omega^2 = 0$ e $2\omega - \omega^3 = 0$. Se $\omega = 0$, então $k = 0$. (A solução $\omega = 0$ e $k = 0$ corresponde ao pólo de malha aberta na origem.) Se $\omega \neq 0$, então $\omega = \pm\sqrt{2}$ e $k = 6$. Os pontos de cruzamento do LR com o eixo imaginário são $s = \pm j\sqrt{2}$ (Figura 10.5). Alternativamente, os pontos de cruzamento podem ser determinados através do critério de Routh-Hurwitz. O array de Routh para a equação característica é

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & (6-k)/3 & \\ s^0 & k & \end{array}$$

Se $k = 6$, então a linha s^1 se anula e é substituída pela derivada do polinômio auxiliar $A(s) = 3s^2 + 6$ obtido da linha s^2 do array. A derivada de $A(s)$ é $6s + 0$ e a construção do array prossegue:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & 6 \\ s^1 & 6 & 0 \\ s^0 & 6 & \end{array}$$

Como todos os elementos da primeira coluna são positivos, a equação característica possui raízes imaginárias puras (caso especial II). As raízes imaginárias são precisamente as raízes do polinômio auxiliar $3s^2 + 6 = 0$, iguais a $\pm j\sqrt{2}$, obtidas quando $k = 6$.

2. (**Ângulos de partida e chegada**). O LR parte dos pólos (quando $k = 0$) e chega nos zeros de $P(s)F(s)$ (quando $k \rightarrow \infty$) de acordo com ângulos que podem ser determinados analisando-se como a fase do LR varia nas proximidades destes pólos e zeros. A Figura 11.1 apresenta o esboço do LR da equação característica

$$1 + kP(s)F(s) = 1 + k \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+2)} = 0.$$

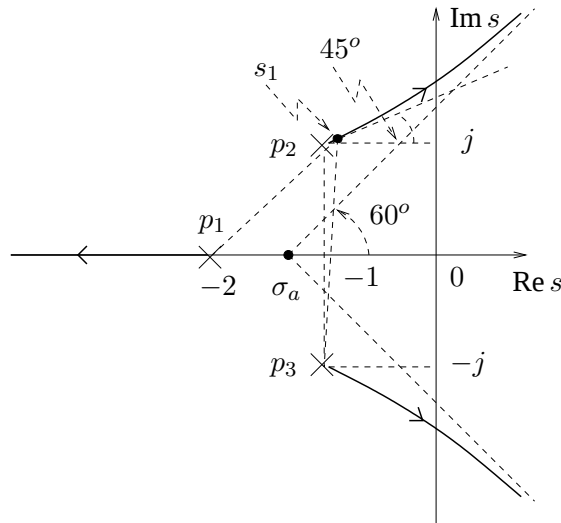


Figura 11.1: LR da equação $1 + k/(s+2)(s^2+2s+2) = 0$.

Os pólos de malha aberta são $p_1 = -2$, $p_2 = -1 + j$ e $p_3 = -1 - j$. Se s_1 é um ponto do LR arbitrariamente próximo ao pólo p_2 , por exemplo, então pela condição geral de fase

$$\sum_{i=1}^m \phi_{z_i} - \sum_{i=1}^n \phi_{p_i} = 180^\circ \times r, \quad r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots,$$

obtem-se ($m = 0$, $n = 3$)

$$-\phi_{p_1} - \phi_{p_2} - \phi_{p_3} = 180^\circ \times r, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots$$

em que ϕ_{p_1} , ϕ_{p_2} e ϕ_{p_3} são as fases de p_1 , p_2 e p_3 em relação ao ponto s_1 . Como $\phi_{p_1} \rightarrow 45^\circ$ e $\phi_{p_3} \rightarrow 90^\circ$, o ângulo de p_2 em relação a s_1 (ângulo de partida de p_2) é igual a ($r = -1$, por conveniência)

$$\phi_{p_2} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Raciocínio análogo irá mostrar que o ângulo de partida de p_3 é de -45° . O ângulo de partida do pólo real é de 180° porque p_2 e p_3 contribuem com 360° em qualquer ponto do eixo real próximo a p_1 . Ângulos de chegada em zeros são calculados da mesma forma. As expressões gerais para o cálculo de ângulos são as seguintes:

Ângulo de partida de um pólo p_j :

$$\phi_{p_j} = \sum_{i=1}^m \phi_{z_i} - \sum_{i \neq j}^n \phi_{p_i} + 180^\circ \times r, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots$$

Ângulo de chegada em um zero z_j :

$$\phi_{z_j} = \sum_{i=1}^n \phi_{p_i} - \sum_{i \neq j}^m \phi_{z_i} + 180^\circ \times r, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots$$

Nas expressões acima, ϕ_{p_i} (ϕ_{z_i}) é a fase do pólo p_i (zero z_i) relativa ao pólo p_j (z_j) considerado.

Exemplo 2. Considere o sistema de controle em malha fechada ilustrado na Figura 11.2 a seguir. O objetivo é esboçar o lugar das raízes do sistema utilizando todas as regras aplicáveis à função de transferência do sistema em malha aberta.

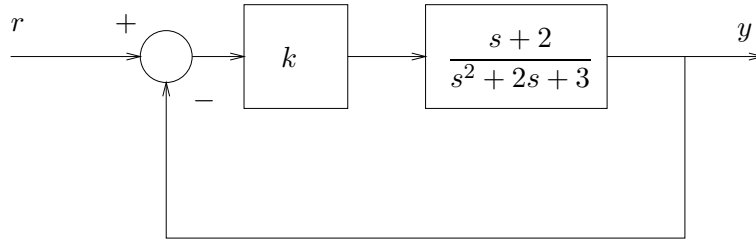


Figura 11.2: Sistema de controle em malha fechada.

A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + k \frac{s+2}{s^2+2s+3} = 1 + k \frac{s+2}{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})} = 0.$$

Após assinalar os pólos e zeros de malha aberta no plano s , determina-se o LR no eixo real com ilustrado na Figura 11.3. Dado que $m = 1$ e $n = 2$, o LR apresenta uma assíntota com ângulo $\theta = 180^\circ$. Quando $k \rightarrow \infty$, um ramo do LR tende ao zero finito em -2 , enquanto outro tende ao zero infinito da função de transferência de malha aberta. Neste caso deve haver um ponto de entrada do LR no eixo real à esquerda do zero em -2 . O ponto de entrada encontra-se entre as soluções da equação

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = (2s+2)(s+2) - (s^2+2s+3)(1) = s^2+4s+1 = 0.$$

As soluções de $s^2+4s+1=0$ são $s_1 = -3.7320$ e $s_2 = -0.2680$. Portanto, o ponto de entrada é -3.7320 . O ângulo de partida do pólo $p_1 = -1 + j\sqrt{2}$ é de

$$\phi_{p_1} = \phi_{z_1} - \phi_{p_2} + 180^\circ = 55^\circ - 90^\circ + 180^\circ = 145^\circ.$$

O ângulo de partida de $p_2 = -1 - j\sqrt{2}$ é de -145° . Observe que o sistema em questão é estável em malha fechada para qualquer escolha de $k > 0$.

Projeto de compensadores

3. O projeto de compensadores (controladores) consiste em, dadas as funções de transferência de malha aberta da planta a ser compensada (controlada) e do sensor, definida a forma de conexão do compensador com a planta e formuladas as especificações de desempenho para o sistema de malha fechada, determinar a função de transferência de um compensador que as viabilize.

4. O termo **compensação** é empregado no sentido de adicionar algo à planta, de forma que esta passe a responder na forma desejada. O que compensar depende do que se considera indesejado na resposta da planta quando esta se encontra em malha aberta. A forma desejada de resposta é definida pelas especificações de desempenho para o sistema em malha fechada.

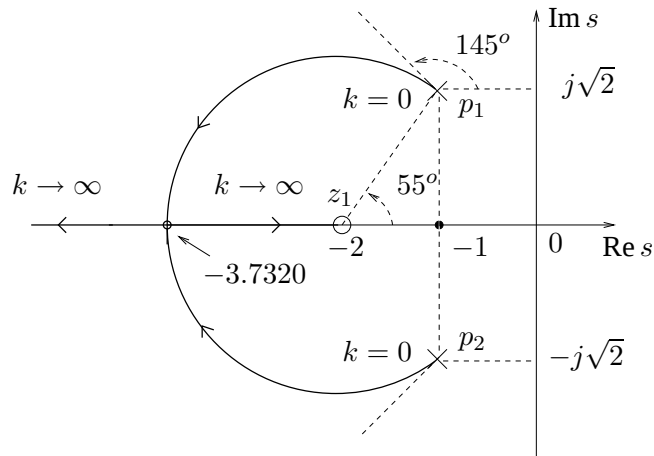


Figura 11.3: LR da equação $1 + k(s + 2)/(s^2 + 2s + 3) = 0$.

5. Existem várias possibilidades de conexão do compensador com a planta, sendo que a mais comum é a **conexão série** ilustrada na Figura 11.4. O compensador se encontra conectado em série com a planta. (Eventuais sinais de distúrbio não estão explicitamente indicados).

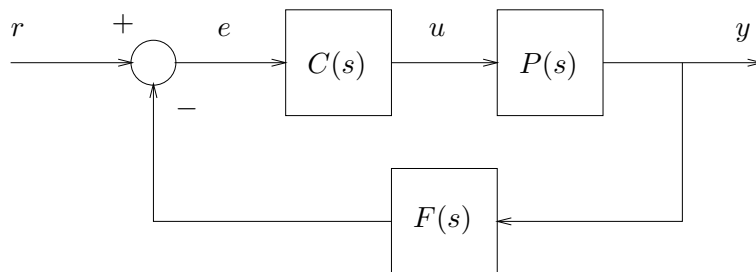


Figura 11.4: Compensador conectado em série com a planta.

6. O objetivo primário do projeto de compensadores é sintetizar a resposta desejada para a saída da planta y tendo em vista uma dada entrada de referência r . Neste

caso, a função de transferência a ser considerada é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)F(s)}.$$

A maioria das técnicas de projeto de compensadores procura modificar diretamente as características de magnitude e fase da planta responsáveis pelo comportamento inadequado da saída explorando o fato de que, na conexão série, $C(s)$ sempre aparece multiplicando $P(s)$. Assim sendo

$$|C(s)P(s)| = |C(s)||P(s)| \quad \text{e} \quad \angle C(s)P(s) = \angle C(s) + \angle P(s).$$

em qualquer frequência s . A magnitude (fase) de $C(s)P(s)$ é igual ao produto (soma) das magnitudes (fases) de $C(s)$ e $P(s)$, o que torna o projeto do compensador relativamente simples.

7. No diagrama de blocos da Figura 11.4 fica implícito que a potência do sinal de saída do compensador é compatível com a potência requerida na entrada da planta. O nível de potência na saída do compensador será baixo ou alto dependendo se o **atuador** (isto é, o estágio de amplificação de potência) está incluído na planta ou no compensador, respectivamente.

8. Na compensação série a saída do compensador responde à variação do erro entre a referência e a saída da planta. A presença de zeros na função de transferência do compensador (fatores derivativos) produz sinais de atuação elevados quando o erro varia rapidamente, como ocorre por exemplo na *partida* de um sistema de controle quando este é submetido a uma entrada degrau.

9. O sistema de controle em malha fechada da Figura 11.4 pode ser implementado na forma analógica, através de componentes analógicos adequados ao tipo de planta a ser controlada, ou na forma digital, através de processadores digitais, opção mais comum atualmente.

10. Na prática, o projeto de compensadores normalmente envolve um procedimento iterativo cujas etapas principais são resumidas a seguir.

1. Estabelece-se o modelo (linear, invariante no tempo) do sistema físico, o que inclui definir as funções de transferência da planta, do sensor e da conexão a ser utilizada. Especificações de desempenho para o sistema em malha fechada são formuladas;

2. Através de uma técnica de projeto adequada, determina-se a função de transferência (parâmetros) de um compensador. A capacidade do compensador de atender as especificações de desempenho é frequentemente avaliada através de um modelo de simulação (baseado em MATLAB/Simulink, por exemplo) do sistema em malha fechada;
3. Após a validação do compensador através de simulação, implementa-se o sistema de controle e observa-se o comportamento do sistema físico. Devido a características inicialmente não-modeladas, como atritos e não-linearidades em geral, o comportamento observado pode diferir (as vezes bastante) do desejado;
4. Caso os comportamentos desejado e observado diverjam significativamente, o projetista tem como alternativas refinar os modelos adotados e/ou determinar um compensador alternativo que garanta o atendimento das especificações de desempenho, ou formular novas especificações de desempenho, relaxando aquelas que se mostraram inviáveis na prática.

Aula 12

Lugar das Raízes

Compensação via lugar das raízes

Compensação avanço (*lead*)

Compensação via lugar das raízes

1. De acordo com a técnica de compensação (projeto) baseada no lugar das raízes, o compensador é obtido através da manipulação do lugar das raízes do sistema em malha fechada. Inicialmente serão analisados alguns efeitos individuais, como os da adição de um pólo e de um zero a uma dada função de transferência de malha aberta.

Efeito da adição de um pólo. O LR é *puxado* para a direita, diminuindo a estabilidade relativa e tornando o sistema mais lento, como ilustra a Figura 12.1.

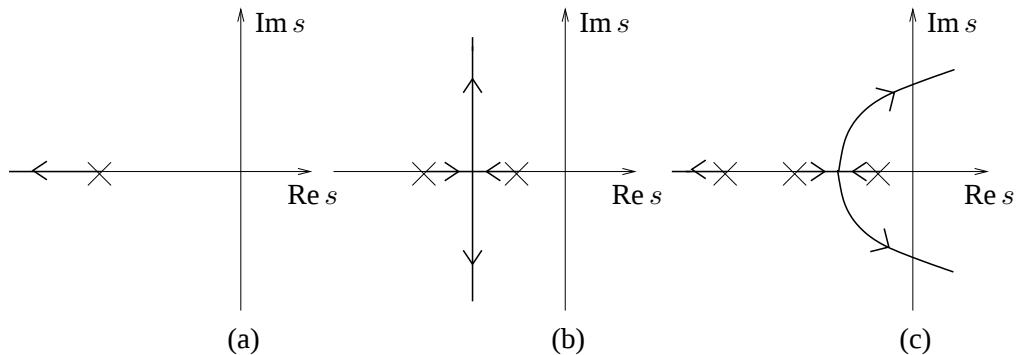


Figura 12.1: Efeito da adição de um pólo.

O efeito da adição de um pólo pode ser explicado através do comportamento das assíntotas do LR. Os ângulos das assíntotas, dados por

$$\theta = \frac{180^\circ \times r}{n - m}, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots,$$

diminuem a medida que n aumenta (mantendo m fixo), fazendo com que o LR seja puxado cada vez mais para a direita.

Efeito da adição de um zero. O LR é *puxado* para a esquerda, tornando o sistema relativamente mais estável e mais rápido. A Figura 12.2 (a) ilustra a incorporação de um zero ao LR da Figura 12.1 (c). O ângulo das assíntotas aumenta, fazendo com que o sistema em malha fechada passe a ser estável para qualquer valor de ganho.

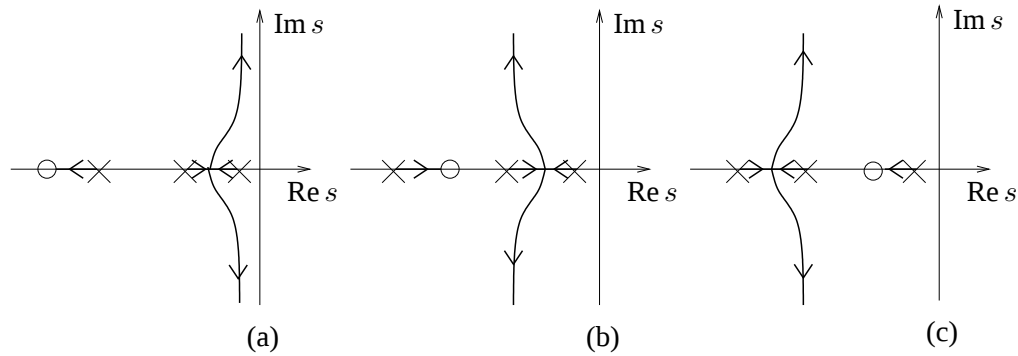


Figura 12.2: Efeito da adição de um zero.

Quando o zero é deslocado para a direita, a interseção das assíntotas se desloca para a esquerda, dado que o ponto de interseção,

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m},$$

fica mais negativo à medida que algum z_i tende a origem.

2. O projeto de compensadores baseia-se em especificações de desempenho que descrevem como o sistema em malha fechada deve se comportar em termos de resposta transitória (máxima sobre-elevação, tempo de acomodação, ...) e de regime (erros estáticos). Normalmente adota-se a seguinte estratégia:

1. Determina-se um par de pólos complexos conjugados que fornece a resposta transitória de acordo com as especificações, como se se quisesse sintetizar um sistema de segunda ordem na forma padrão;
2. Constroi-se o LR do sistema não-compensado, aqui entendido como o LR do sistema quando se adota um compensador estático $C(s) = k_c$. Geralmente não existe k_c tal que o LR passa pelos pólos especificados;

3. Determina-se um compensador dinâmico $C(s)$ (zeros e pólos), que associado em série com a planta modifica o LR fazendo com que este passe pelos pólos especificados;
4. Se as ordens (número de pólos) da planta e do compensador forem n_P e n_C , respectivamente, o número de pólos de malha fechada (raízes da equação característica) será $n_P + n_C$, em geral;
5. Dentre os $n_P + n_C$ pólos encontra-se o par de pólos complexos conjugados especificados. Suponha que estes pólos localizam-se na região I e que os demais $n_P + n_C - 2$ pólos encontram-se na região II da Figura 12.3;

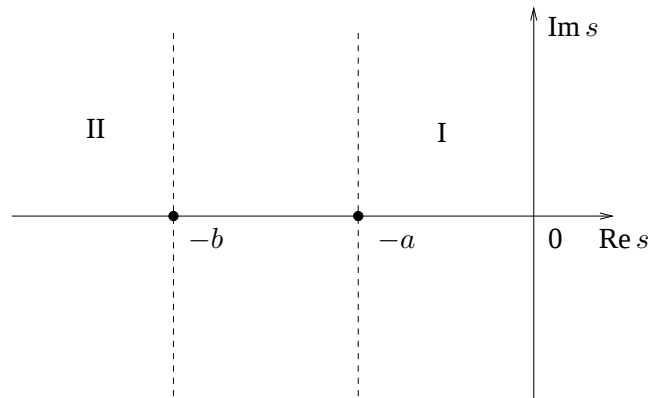


Figura 12.3: Semi-plano esquerdo - regiões dominante (I) e dominada (II).

6. Se b for suficientemente maior do que a (por exemplo $b/a = 5$), os pólos complexos conjugados **dominarão** a resposta transitória do sistema (pois possuem constantes de tempo menores), e esta se assemelhará bastante à resposta transitória do sistema de segunda ordem sintetizado através da escolha dos **pólos dominantes**;
7. Fatores como a presença de zeros e/ou ganho DC não-unitário na função de transferência de malha fechada podem alterar a resposta transitória relativamente à do sistema de segunda ordem sintetizado. Neste caso será necessário refazer o projeto;
8. Se entre os compensadores que atendem as especificações sobre resposta transitória existir ao menos um que também atenda as especificações sobre resposta em regime, o projeto é concluído com a escolha de um desses compensadores. Caso contrário o projeto prossegue, geralmente incorporando-se

ao controlador obtido na etapa anterior ganho suficiente para, por exemplo, atender especificações referentes a erros de regime.

3. Se a **estrutura** do compensador $C(s)$ (número de zeros e pólos) for definida *a-priori*, o projeto consistirá basicamente em determinar a localização dos zeros e pólos de $C(s)$, ou seja, os coeficientes do numerador e do denominador de $C(s)$. Discute-se a seguir o projeto de um tipo de compensador de primeira ordem (um zero, um pólo) conhecido como **compensador avanço** (*lead*).

Compensação avanço (*lead*)

4. A compensação avanço é usada quando o sistema original é instável, ou estável, mas não atende as especificações relativas à **resposta transitória**. A compensação avanço modifica o LR do sistema não-compensado no sentido do atendimento das especificações relativas à resposta transitória. O **compensador avanço** é definido pela função de transferência

$$C(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1},$$

em que $k_c > 0$ é o ganho do compensador e $T > 0$ e $0 < \alpha < 1$ definem as localizações do zero e do pólo do compensador. O compensador avanço **adiciona fase** a qualquer ponto do plano s pois $\phi_{zc} - \phi_{pc} > 0$ para qualquer escolha de $T > 0$ e $0 < \alpha < 1$ (Figura 12.4). Como $0 < \alpha < 1$, o zero do compensador sempre fica à direita do pólo.

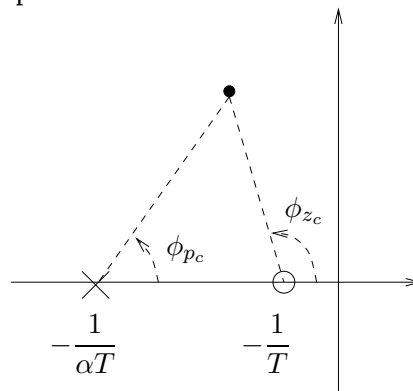


Figura 12.4: Adição de fase do compensador avanço.

5. O ganho estático do compensador avanço é $C(0) = k_c \alpha$, em que k_c e α são resultantes do projeto que visa basicamente atender as especificações sobre resposta transitória. Neste sentido, o controle da resposta em regime do sistema através da compensação avanço é bastante limitado.

Compensação avanço - procedimento

1. A partir das especificações de desempenho para a resposta transitória, determine as localizações para os pólos dominantes do sistema em malha fechada, na forma de pólos complexos conjugados $s_{1,2}$;
2. Obtenha o LR do sistema com compensação $C(s) = k_c$ e verifique se o ajuste de k_c faz o LR passar pelos pólos $s_{1,2}$ especificados. Caso contrário, calcule a fase da planta em $s = s_1$:

$$\angle P(s)|_{s=s_1};$$

Para que s_1 passe a fazer parte do LR, a fase de $C(s)$ deverá ser tal que

$$\angle C(s)|_{s=s_1} + \angle P(s)|_{s=s_1} = 180^\circ \times r = \pm 1, \pm 3, \dots$$

Seja ϕ a quantidade de fase a ser adicionada pelo compensador avanço. Determine as localizações do zero e do pólo de $C(s)$ (isto é, determine T e α) de maneira que $\phi_{z_c} - \phi_{p_c} = \phi$;

3. Finalmente, determine k_c através da condição de magnitude:

$$|C(s)P(s)|_{s=s_1} = \left| k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} P(s) \right|_{s=s_1} = 1.$$

Exemplo. Considere o sistema de controle ilustrado na Figura 12.5. A função de transferência do sistema em malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} = \frac{4}{(s + 1 - j\sqrt{3})(s + 1 + j\sqrt{3})}.$$

Os pólos de malha fechada do sistema não-compensado são tais que $\xi = 0.5$ e $\omega_n = 2$ rad/s, fornecendo máxima sobre-elevação $M_p = 15\%$ e tempo de acomodação $t_s = 4$ s. Uma especificação do tipo $t_s = 2$ s pode ser atingida com $\omega_n = 4$ rad/s. As localizações dos pólos dominantes seriam

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = -2 \pm j2\sqrt{3}.$$

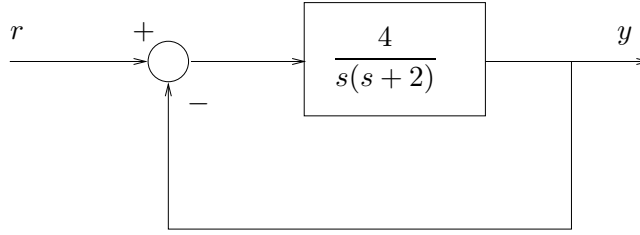
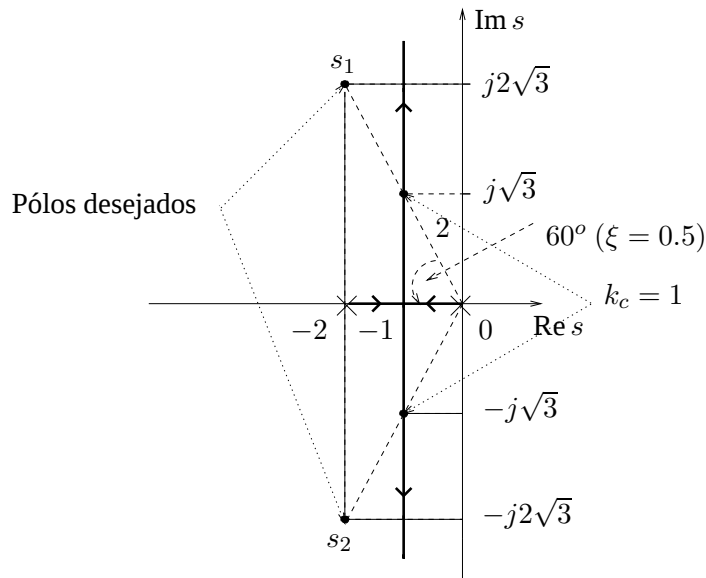


Figura 12.5: Sistema de segunda ordem em malha fechada.

A compensação proporcional ($C(s) = k_c$) em série com a planta não é capaz de fazer o LR do sistema em malha fechada passar em $s_{1,2}$, como ilustra a Figura 12.6. (Os pólos do sistema não-compensado são obtidos quando $k_c = 1$.)

Figura 12.6: LR do sistema não-compensado ($s_{1,2}$: pólos dominantes).

A fase da planta em $s = s_1$ pode ser calculada através de uma análise gráfica: $\angle P(s)|_{s=s_1} = -120^\circ - 90^\circ = -210^\circ$ (contribuições dos pólos em 0 e -2, respectivamente). Portanto, o compensador precisa adicionar $\phi = 30^\circ$ em $s = s_1$ para que a condição de fase do LR seja atendida.

Existem inúmeras formas de posicionar o pólo e o zero do compensador de tal forma que $\phi_{z_c} - \phi_{p_c} = \phi$. Uma solução é usar o chamado **método da abscissa**: determina-se a abscissa do ângulo formado pelas retas $\overline{AP}$ e $\overline{PO}$, como ilustra a

Figura 12.7.

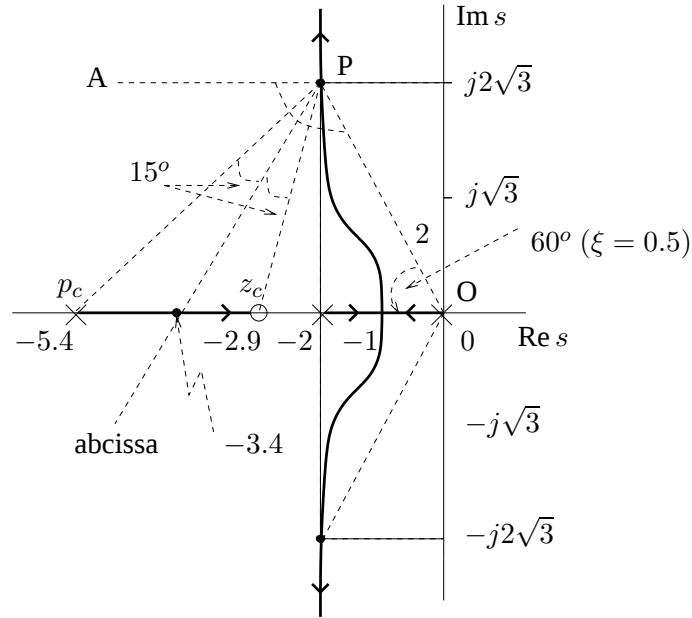


Figura 12.7: LR do sistema compensado pelo método da abcissa.

Em seguida, determinam-se duas retas formando $\phi/2$ graus a partir da abcissa. Os pontos de cruzamento com o eixo real correspondem às localizações do pólo e do zero de $C(s)$. No caso do exemplo,

$$\frac{1}{T} = 2.9, \quad \frac{1}{\alpha T} = 5.4.$$

Logo, $T = 0.345$ e $\alpha = 0.537$. Pelo método da abcissa, o valor de α é maximizado, o que eleva o ganho estático do compensador. O valor de k_c é obtido da condição de magnitude:

$$|C(s)P(s)|_{s=s_1} = \left| \frac{4k_c(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

implica em $k_c = 4.68$. O compensador avanço procurado é

$$C(s) = 4.68 \frac{s+2.9}{s+5.4} = 2.51 \frac{0.345s+1}{0.185s+1}.$$

Os pólos do sistema em malha fechada (compensado) são as raízes de

$$1 + C(s)P(s) = 1 + \left[\frac{4.68(s+2.9)}{(s+5.4)} \right] \left[\frac{4}{s(s+2)} \right] = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} s(s+2)(s+5.4) + 18.7(s+2.9) &= \\ &= (s+2+j2\sqrt{3})(s+2-j2\sqrt{3})(s+3.4) = 0. \end{aligned}$$

Note que o ganho associado ao LR no ponto s_1 é $k = 4 \times 4.68 = 18.7$. O terceiro pólo em -3.4 está próximo ao zero do compensador (em -2.9) e seu efeito na resposta do sistema será pequeno. A resposta será levemente menos amortecida do que o esperado ($\xi = 0.5$, $M_p = 15\%$) devido a presença do zero. O projeto de compensadores através do LR pode ser inteiramente desenvolvido através do MATLAB, que dispõe do ambiente interativo `rltool` para projetos desta natureza. O projeto poderia iniciar com a obtenção do LR do sistema com $C(s) = k_c$, ilustrado na Figura 12.8:

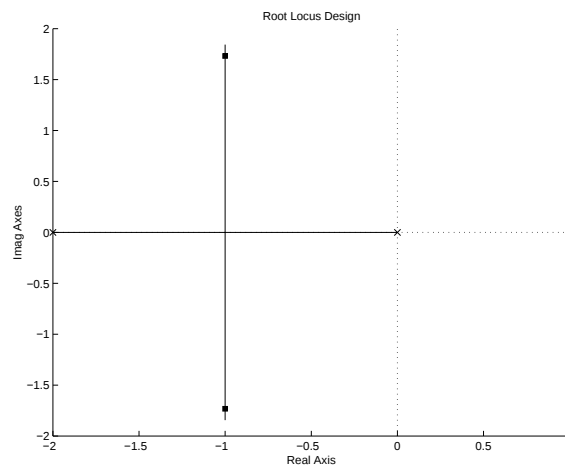


Figura 12.8: LR do sistema com $C(s) = k_c$ via MATLAB/`rltool`.

A Figura 12.9 ilustra o LR após a compensação avanço. Observe as linhas pontilhadas de fator de amortecimento e frequência natural constantes, bastante úteis na fase de projeto do compensador.

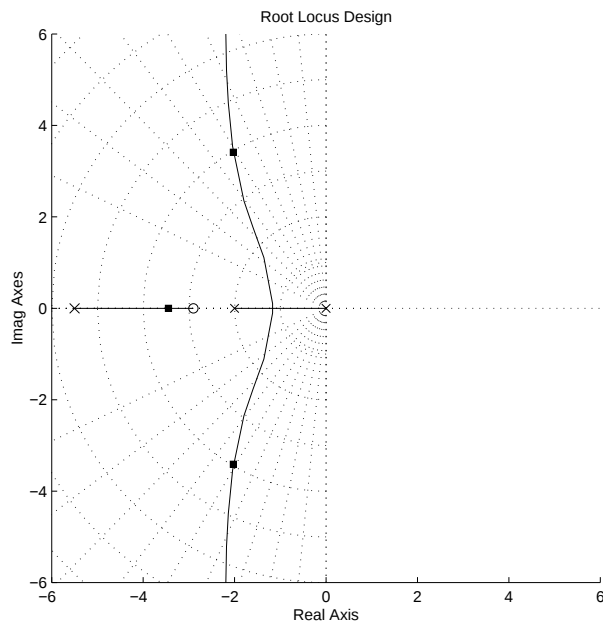


Figura 12.9: LR do sistema compensado via MATLAB/`rltool`.

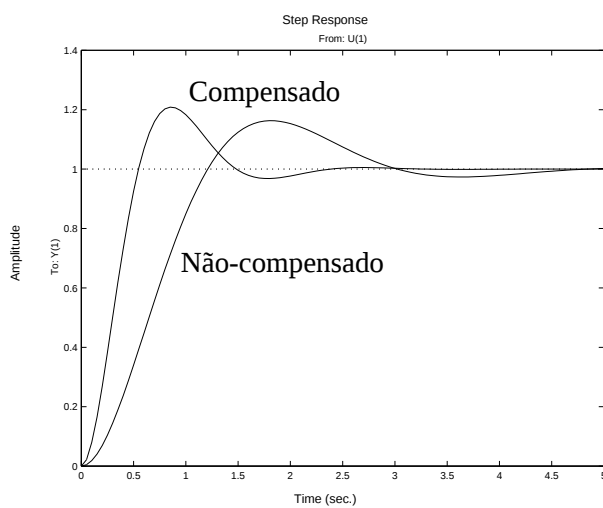


Figura 12.10: Respostas ao degrau dos sistemas não-compensado e compensado.

A Figura 12.10 apresenta as respostas ao degrau do sistemas não-compensado ($\xi = 0.5$, $\omega_n = 2$ rad/s) e compensado através de avanço ($\xi \approx 0.5$, $\omega_n = 4$ rad/s).

Como requerido, o tempo de acomodação passou a ser de aproximadamente 2 s. O erro de regime para entrada degrau é zero uma vez que a planta é do Tipo 1. O erro para entrada rampa é constante, inversamente proporcional à constante de velocidade do sistema, k_v . A constante de velocidade para o sistema não-compensado é

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4}{s(s+2)} = 2.$$

Após a compensação avanço,

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2.51(0.345s+1)}{(0.185s+1)} \frac{4}{s(s+2)} = 5.02.$$

O erro para entrada rampa cai pela metade, mas eventualmente ainda seria muito grande. Um melhor controle sobre erros de regime será obtido com o uso de um **compensador atraso** (*lag*).

Aula 13

Lugar das Raízes

Compensação atraso (*lag*)

Compensação avanço-atraso (*lead-lag*)

Outras configurações do LR

Compensação atraso (*lag*)

1. Na compensação atraso assume-se que o sistema satisfaz as especificações relativas à resposta transitória, mas não as relativas à resposta em regime. A função de transferência do compensador atraso é definida como

$$C(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = k_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

em que $k_c > 0$ é o ganho do compensador e $T > 0$ e $\beta > 1$ definem as localizações do zero e do pólo do compensador. O compensador atraso **retira fase** de qualquer ponto do plano s pois $\phi_{z_c} - \phi_{p_c} < 0$ para qualquer escolha de $T > 0$ e $\beta > 1$ (Figura 13.1). Como $\beta > 1$, o zero do compensador sempre fica à esquerda do pólo.

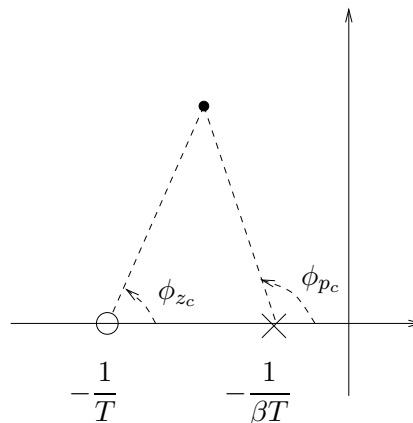


Figura 13.1: Remoção de fase do compensador atraso.

2. Na compensação atraso, assume-se que o sistema em malha fechada apresenta um par de pólos complexos conjugados dominantes que produzem a resposta transitória desejada. A idéia é não modificar o LR próximo aos pólos dominantes.

3. A compensação atraso é usada basicamente para aumentar o ganho estático do compensador (ganho na frequência $s = 0$) e assim reduzir eventuais erros de regime. O compensador atraso deve produzir apenas um pequeno decréscimo de fase, da ordem de 5° , próximo aos pólos dominantes $s_{1,2}$:

$$-5^\circ < \angle C(s)|_{s=s_1} < 0^\circ.$$

Para tanto, o zero e o pólo de $C(s)$ devem ser localizados de tal maneira que

$$-5^\circ < \angle s_1 + (1/T) - \angle s_1 + (1/\beta T) < 0^\circ.$$

4. Escolhendo-se $T > 0$ e $\beta > 1$ de forma que as quantidades $1/T$ e $1/\beta T$ sejam pequenas comparadas a s_1 , obtém-se o efeito desejado. Além disso, as magnitudes $|s_1 + 1/T|$ e $|s_1 + 1/\beta T|$ serão aproximadamente iguais e portanto para o sistema compensado

$$|C(s)P(s)|_{s=s_1} = \left| k_c \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} P(s_1) \right| = 1$$

implica que $k_c \simeq 1$, pois $|P(s_1)| = 1$ se s_1 pertence ao LR anterior à introdução do compensador atraso.

5. Como não existe aumento de ganho **na frequência** s_1 ($k_c \simeq 1$), as propriedades transitórias do sistema não serão alteradas significativamente. Os pólos dominantes apenas se deslocam para uma vizinhança do ponto s_1 devido a pequena remoção de fase causada pelo compensador.

6. O ganho estático do compensador atraso (ganho na frequência $s = 0$) é $C(0) = k_c\beta$. Assumindo-se que a planta é do Tipo 1, a constante de velocidade k_v do sistema original será então multiplicada por β :

$$\hat{k}_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s) = k_c\beta \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) \simeq \beta k_v.$$

7. É conveniente localizar o pólo e o zero do compensador próximos à origem.
Exemplo: $1/(\beta T) = 0.001$ e $1/T = 0.01$ implica em $\beta = 10$. Como os pólos do-

minantes estão afastados do eixo imaginário, as características de fase e magnitude impostas sobre $C(s)$ serão naturalmente satisfeitas.

Exemplo. Considere o sistema de controle em malha fechada da Figura 13.2.

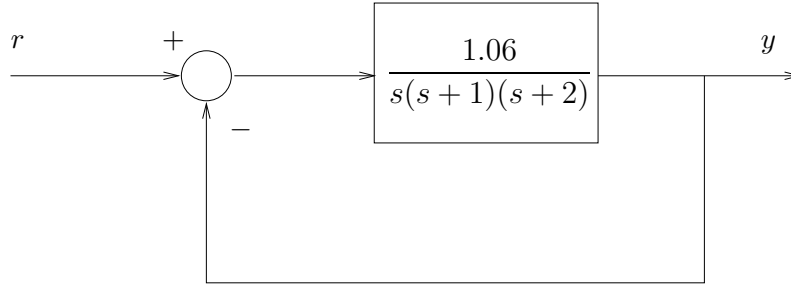


Figura 13.2: Sistema de controle em malha fechada.

A função de transferência de malha fechada é

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{1.06}{s(s+1)(s+2) + 1.06}, \\ &= \frac{1.06}{(s + 0.3307 - j0.5864)(s + 0.3307 + j0.5864)(s + 2.3384)}. \end{aligned}$$

Os pólos dominantes são $s_{1,2} = -0.3307 \pm j0.5864$, que fornecem $\xi = 0.491$ e $\omega_n = 0.673$ rad/s. Logo,

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = 0.53,$$

um valor muito baixo. Deseja-se $\hat{k}_v = 5$ sem alterar significativamente a posição dos pólos dominantes. Como $\hat{k}_v = \beta k_v$, obtém-se $\beta = 10$ aproximadamente. Um possível compensador atraso seria

$$C(s) = k_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}.$$

A contribuição deste compensador é de cerca de -4° no pontos $s_{1,2}$ (verifique). Os LR's do sistema com as compensações proporcional e atraso encontram-se ilustradas nas Figuras 13.3 e 13.4, respectivamente.

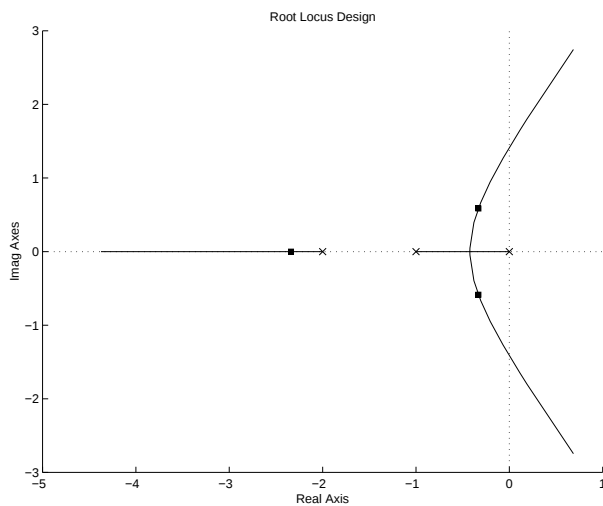


Figura 13.3: LR do sistema compensado com $C(s) = k_c$.

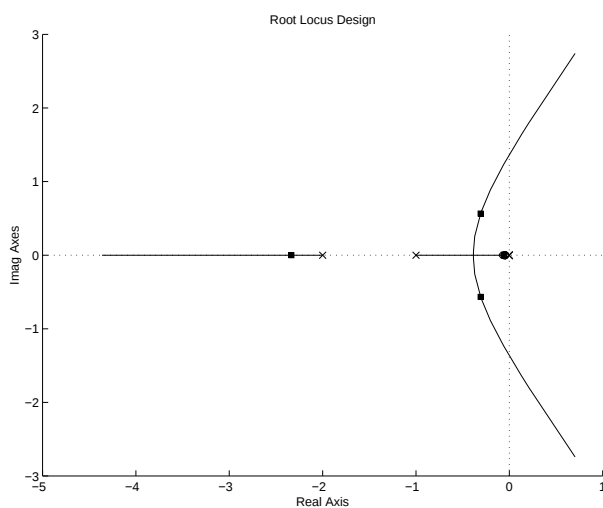


Figura 13.4: LR do sistema com compensador atraso.

Observe que o compensador atraso (Figura 13.4) não altera significativamente o LR nas proximidades dos pólos dominantes. Para melhor visualização do efeito do compensador, apresenta-se abaixo um *zoom* da região de interesse.

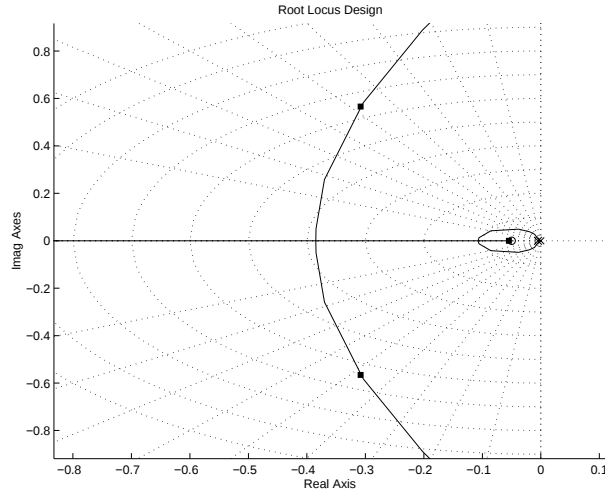


Figura 13.5: LR do sistema com compensador atraso - *zoom*.

Os pólos indicados correspondem ao ganho unitário $k = 1.06k_c = 1$. Observa-se um ligeiro decréscimo em ξ ($\xi \simeq 0.478$). Assumindo que se deseja manter $\xi \simeq 0.5$, os pólos correspondentes (obtidos diretamente do LR) deverão ser

$$s_{1,2} = -0.312 \pm j0.551 \quad (\xi = 0.493, \omega_n = 0.633).$$

O ganho em $s_{1,2} = -0.312 \pm j0.551$ (obtido diretamente do LR) é $k = 1.0235$ e portanto $k_c = k/1.06 = 0.966$. A função de malha aberta do sistema é

$$\begin{aligned} C(s)P(s) &= 0.9656 \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)}, \\ &= \frac{1.0235(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)}, \\ &= \frac{5.12(20s + 1)}{s(200s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\hat{k}_v = 5.12$. Além de $s_{1,2} = -0.312 \pm j0.551$ (dominantes), os demais pólos de malha fechada são $s_3 = -2.326$ e $s_4 = -0.055$. O LR do sistema obtido através de compensação atraso com $k_c = 0.966$ é apresentado na Figura 13.6. Na Figuras 13.7 e 13.8 são apresentadas, respectivamente, as respostas ao degrau e à rampa dos sistemas não-compensado e compensado. O fato do pólo s_4 estar próximo ao zero de $C(s)$ faz com que a resposta seja menos amortecida e mais lenta do que a prevista.

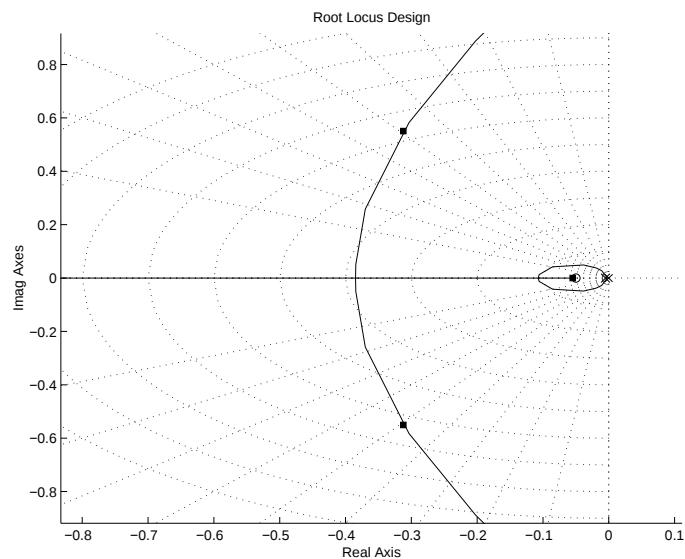


Figura 13.6: Sistema compensado (atraso) com $k_c = 0.966$.

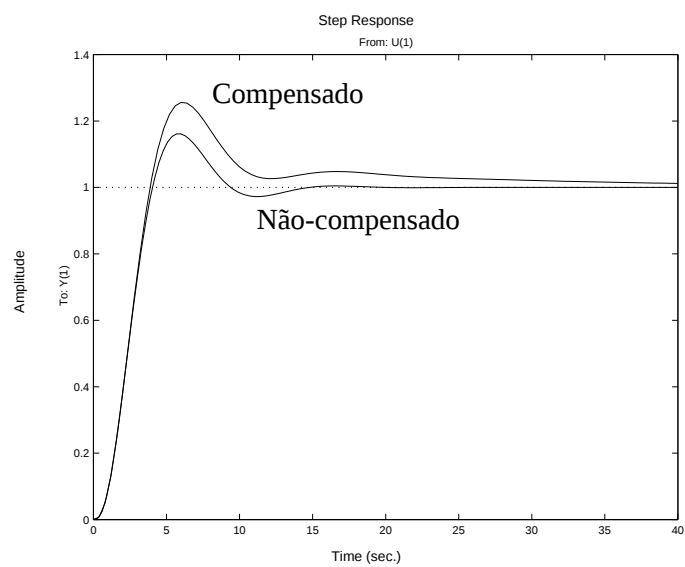


Figura 13.7: Respostas do sistema ao degrau unitário.

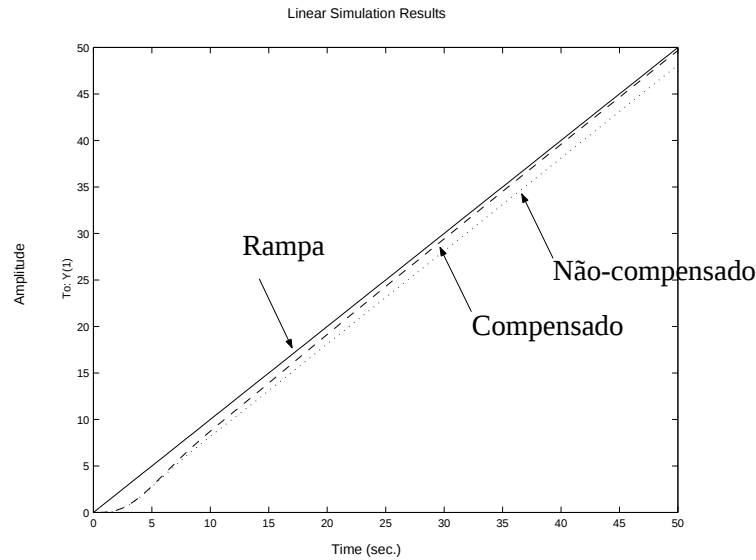


Figura 13.8: Respostas do sistema à rampa unitária.

Compensação avanço-atraso (*lead-lag*)

8. A compensação avanço-atraso é utilizada quando se deseja satisfazer simultaneamente especificações sobre as respostas transitória e de regime. Contudo, ao invés de se introduzir compensadores avanço e atraso individuais, é mais econômico obter um único compensador. A função de transferência do compensador atraso-avanço é definida por

$$C(s) = k_c \underbrace{\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\alpha T_1}} \right)}_{\text{avanço}} \underbrace{\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)}_{\text{atraso}},$$

em que $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, $0 < \alpha < 1$, e $\beta > 1$. O projeto de compensadores atraso-avanço segue as linhas gerais dos projetos individuais para compensadores avanço e atraso.

Outras configurações do LR

9. Embora o LR de um sistema em malha fechada tenha sido discutido em termos da variação de um parâmetro k referente a equação característica genérica $1 + kG(s) = 0$, $k > 0$, outras aplicações são possíveis. Em particular, o LR pode ser utilizado para analisar como os pólos do sistema em malha fechada se comportam quando um parâmetro positivo qualquer de $G(s)$ (associado a $C(s)$, $P(s)$ ou $F(s)$) varia, como ilustrado através dos exemplos a seguir.

Exemplo 1. Deseja-se analisar o LR do sistema em malha fechada da Figura 13.9 em função do parâmetro $\alpha > 0$.

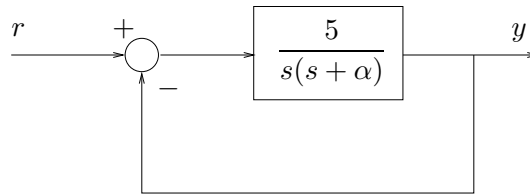


Fig 15.9: Sistema de controle em malha fechada.

A equação característica do sistema é $1 + 5/(s^2 + \alpha s) = 0$, ou reescrevendo em termos de α ,

$$s^2 + \alpha s + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \alpha \frac{s}{s^2 + 5} = 0$$

O LR das raízes do sistema de malha fechada em função de $0 < \alpha < \infty$ é apresentado na Figura 13.10. O sistema em malha fechada permanece estável para qualquer valor positivo de α .

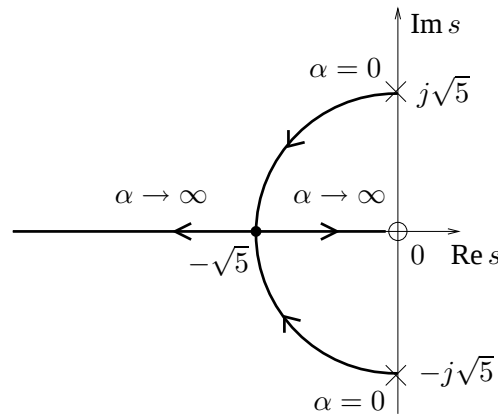


Figura 13.10: LR em função de $0 < \alpha < \infty$.

Exemplo 2. Deseja-se analisar o comportamento dos pólos de malha fechada de um sistema cuja equação característica é

$$1 + C(s)P(s) = 1 + \left(k_P + \frac{k_I}{s}\right) \left(\frac{0.25}{s + 0.1}\right) = 0,$$

em função de $k_P > 0$ quando $k_I = 1$. O compensador PI utilizado, $C(s) = k_P + k_I/s$, é uma forma especial de **compensador atraso**, com pólo na origem e zero em $-k_I/k_P$. A equação em função de k_P é (verifique)

$$1 + k_P \frac{0.25s}{s^2 + 0.1s + 0.25} = 0$$

O LR do sistema em malha fechada em função de $0 < k_P < \infty$ é apresentado na Figura 13.11. Se se desejar, por exemplo, pólos de malha fechada com amortecimento crítico, então

$$k_P = -\frac{s^2 + 0.1s + 0.25}{0.25s} \Big|_{s=-0.5} = 3.6,$$

e o compensador seria

$$C(s) = 3.6 + \frac{1}{s}.$$

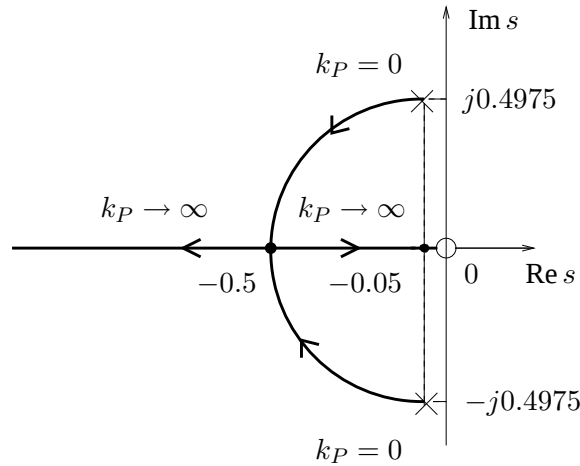


Figura 13.11: LR em função de $0 < k_P < \infty$.

Aula 14**Compensação via Resposta em Frequência**

Constantes de erro

Margem de fase $\times \xi$

Introdução à compensação via RF

Constantes de erro

1. Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de malha aberta é

$$P(s) = k \frac{(\tau_{z1}s + 1)(\tau_{z2}s + 1) \cdots (\tau_{zm}s + 1)}{s^N (\tau_{p1}s + 1)(\tau_{p2}s + 1) \cdots (\tau_{pn}s + 1)},$$

em que N é o tipo do sistema e os τ_z 's e τ_p 's são as constantes de tempo (e os valores inversos, as frequências de corte) dos zeros e pólos do sistema. Se $N = 0$, o sistema não-compensado ($C(s) = 1$) apresentará erro de estado estacionário para entrada degrau ($e_{ss} = 1/(1 + k_p)$). A constante de posição do sistema, k_p , pode ser calculada através de

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} P(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} P(j\omega) = k.$$

A constante de posição do sistema pode ser extraída do diagrama de magnitude de $P(j\omega)$ na região de baixas frequências ($\omega \rightarrow 0$), como ilustra a Figura 14.1.

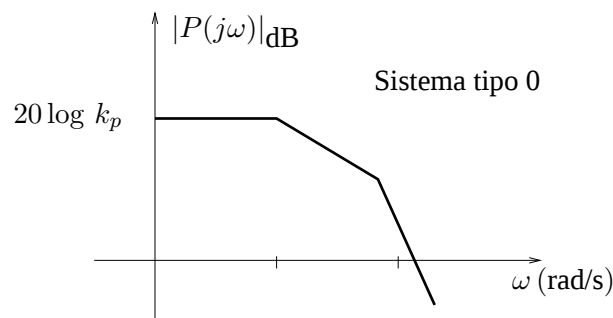


Figura 14.1: Constante de posição do sistema.

2. Se $N = 1$, então o sistema não-compensado apresenta erro de estado estacionário para entrada rampa ($e_{ss} = 1/k_v$). A constante de velocidade do sistema, k_v , é calculada através de

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega P(j\omega).$$

Para $\omega \ll 1$ é possível fazer a aproximação

$$k_v = j\omega P(j\omega) \quad \text{ou} \quad P(j\omega) = \frac{k_v}{j\omega}.$$

Em dB's,

$$\begin{aligned} 20 \log |P(j\omega)| &= 20 \log \left| \frac{k_v}{j\omega} \right|, \\ &= 20 \log k_v - 20 \log \omega. \end{aligned}$$

O lado direito da expressão é uma assíntota para as baixas frequências de $|P(j\omega)|_{\text{dB}}$. A assíntota cruza 0 dB na frequência $\omega = k_v$ rad/s, o que sugere a forma de se extrair a constante de velocidade do sistema através do diagrama de magnitude de $P(j\omega)$.

3. **Exemplo.** O diagrama de magnitude do sistema em malha aberta

$$P(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

é ilustrado na Figura 14.2. O sistema é do tipo 1 e portanto a constante de velocidade é numericamente igual à frequência de cruzamento da assíntota de baixa frequência (inclinação -20 db/dec) com 0 db. O valor obtido, $k_v = 10$, é o mesmo que seria obtido analiticamente. De fato,

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = 10.$$

Margem de fase $\times \xi$

Para um sistema de segunda ordem (malha aberta) na forma padrão

$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)},$$

a magnitude torna-se unitária ($|P(j\omega)| = 1$) na frequência

$$\omega = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}.$$

Nesta frequência, a fase de $P(\omega)$ é dada por

$$\angle P(j\omega) = -90^\circ - \angle j\omega + 2\xi\omega_n = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}}{2\xi}.$$

A margem de fase do sistema então seria

$$\begin{aligned} \text{MF} &= 180^\circ + \angle P(j\omega_1), \\ &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}}{2\xi}, \\ &= \tan^{-1} \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}}. \end{aligned}$$

Uma boa aproximação para a margem de fase na região aonde $0 \leq \xi \leq 0.6$, obtida através da linearização da expressão acima, é

$$\text{MF} = \xi \times 100.$$

Assim, uma margem de fase $\text{MF} = 50^\circ$ corresponde a aproximadamente $\xi = 0.5$. Um sistema com $\text{MF} = 10^\circ$ seria extremamente oscilatório.

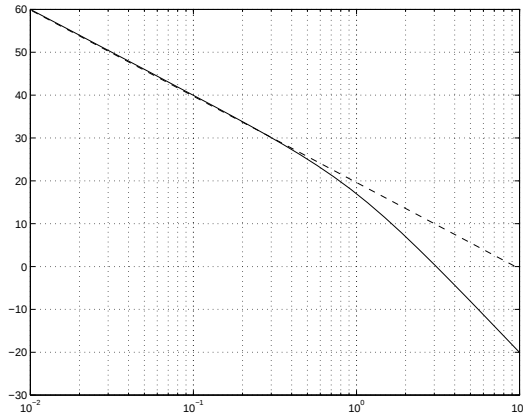


Figura 14.2: Constante de velocidade do sistema.

Introdução à compensação via RF

4. Considere o sistema de controle com realimentação unitária ilustrado na Figura 14.3.

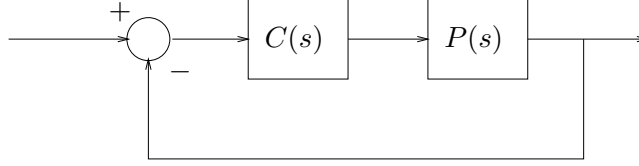


Figura 14.3: Compensação série - realimentação unitária.

O objetivo é projetar $C(s)$ de forma a satisfazer determinadas especificações de desempenho, como margens de fase e de ganho, que o sistema não-compensado ($C(s) = 1$) não satisfaz. Devido a associação série do compensador $C(s)$ com a planta $P(s)$, a magnitude de $C(j\omega)P(j\omega)$ em dB pode ser escrita como a soma das magnitudes de $C(j\omega)$ e $P(j\omega)$ em dB:

$$|C(j\omega)P(j\omega)|_{\text{dB}} = |C(j\omega)|_{\text{dB}} + |P(j\omega)|_{\text{dB}}.$$

Pela mesma razão, a fase de $C(j\omega)P(j\omega)$ é a soma das fases de $C(j\omega)$ e $P(j\omega)$ (em graus):

$$\angle C(j\omega)P(j\omega) = \angle C(j\omega) + \angle P(j\omega).$$

Como $|P(j\omega)|_{\text{dB}}$ e $\angle P(j\omega)$ são quantidades conhecidas, deve-se projetar $C(s)$ de tal forma que $|C(j\omega)|_{\text{dB}}$ e $\angle C(j\omega)$ sejam tais que, por exemplo,

$$-20 \log |C(j\omega_0)P(j\omega_0)| = \text{MG}_{\text{esp}},$$

$$180^\circ + \angle C(j\omega_1)P(j\omega_1) = \text{MF}_{\text{esp}},$$

em que MG_{esp} e MF_{esp} são margens de ganho e fase especificadas. Um aspecto importante é a determinação de frequências ω_0 (cruzamento com -180°) e ω_1 (cruzamento com 0 dB) apropriadas.

5. **Exemplo.** Os diagramas de Bode do sistema não-compensado associado à função de transferência de malha aberta

$$P(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+2)}$$

é apresentado na Figura 14.4.

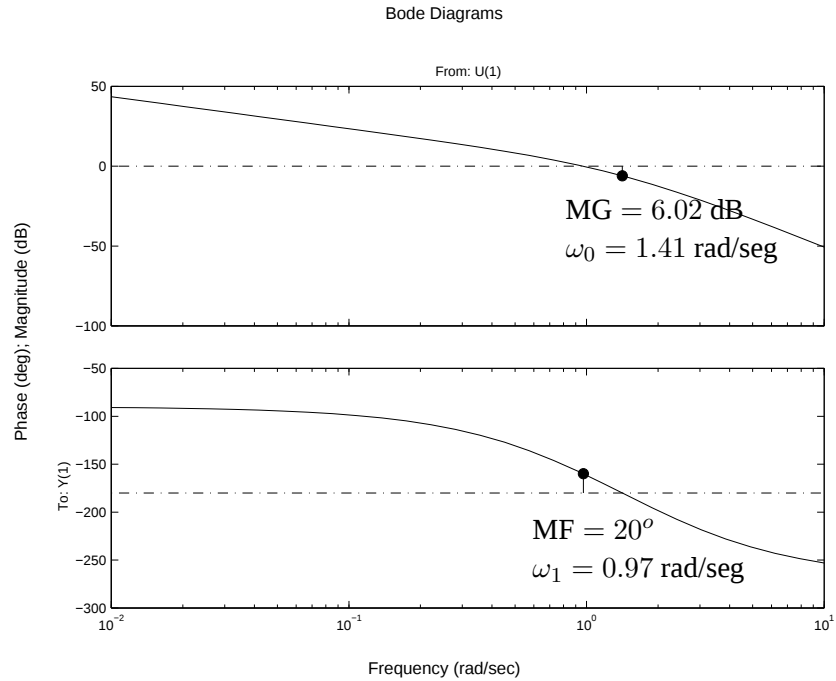


Figura 14.4: Diagramas de Bode - sistema não-compensado.

As margens de ganho e de fase do sistema não-compensado são pequenas e sua resposta tende a ser muito oscilatória ($\xi \simeq MF/100 = 0.2$). Para obter margens maiores é necessário **atenuar** a curva de magnitude de $P(j\omega)$, fazendo esta cruzar 0 dB numa frequência menor. Uma alternativa simples é escolher $C(s) = k_c < 1$ (compensação proporcional). O sistema compensado apresentado na Figura 14.5 a seguir foi obtido com $k_c = 0.33$.

6. A solução utilizada resolve o problema das margens, mas diminui a constante de velocidade (k_v) do sistema. O motivo é que a assíntota de baixa frequência do sistema compensado também cruzará 0 dB numa frequência menor, pois a atenuação produzida pelo compensador é igual para todas as frequências. Compensadores mais elaborados, a serem discutidos a seguir, agem **seletivamente** em determinadas frequências, de forma a atender simultaneamente especificações como limites para erros de estado estacionário e margens de ganho e de fase.

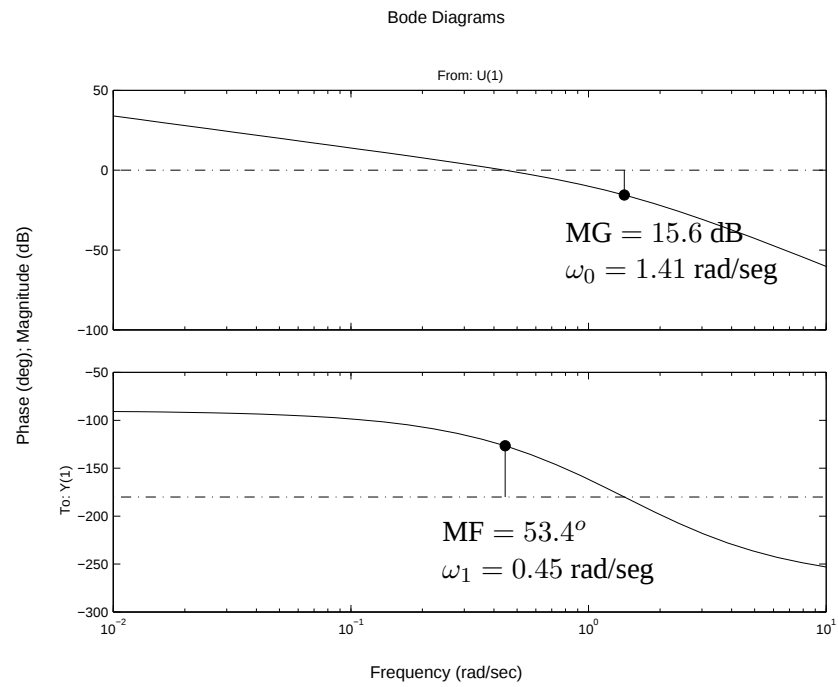


Figura 14.5: Diagramas de Bode - compensação proporcional.

Aula 15

Compensação Avanço

Introdução
Procedimento

Introdução

1. A resposta em frequência do compensador avanço é obtida a partir de

$$C(j\omega) = k_c \alpha \frac{jT\omega + 1}{j\alpha T\omega + 1}, \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Os diagramas de Bode de $C(j\omega)$ para $k_c = 1$ e $\alpha = 0.1$ são ilustrados na Figura 15.1.

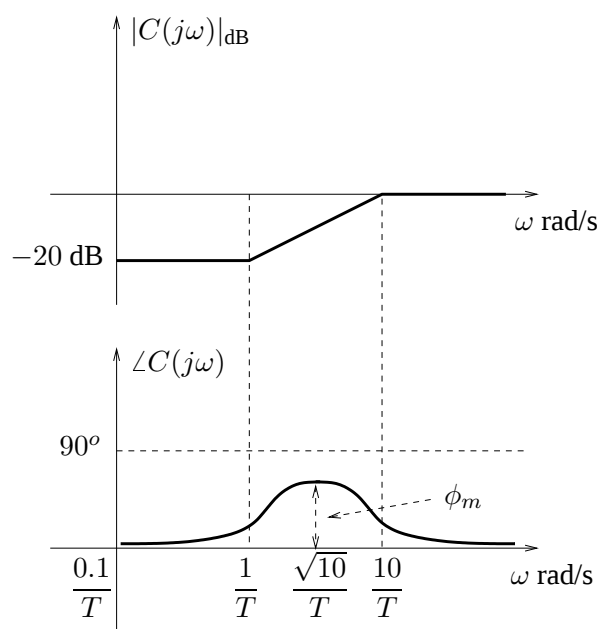


Figura 15.1: Resposta em frequência do compensador avanço.

Na compensação avanço a frequência de corte do zero (em $z = -1/T$) é sempre menor do que a frequência de corte do pólo (em $p = -1/\alpha T$), o que faz com que o compensador adicione fase ao sistema quando colocado em série com a planta. A fase do compensador avanço, dada por

$$\angle C(j\omega) = \tan^{-1} T\omega - \tan^{-1} \alpha T\omega,$$

atinge seu máximo na frequência ω_m na qual

$$\frac{d}{d\omega} \angle C(j\omega)|_{\omega=\omega_m} = 0.$$

É possível mostrar que

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}},$$

e que a fase máxima ϕ_m obtida na frequência $\omega = \omega_m$ é a solução da equação trigonométrica

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

2. A função primária da compensação avanço é remodelar as curvas de resposta em frequência, adicionando fase suficiente para compensar uma defasagem excessiva do sistema original.

Procedimento

3. Por razões práticas de projeto, a função de transferência de malha aberta do sistema compensado é reescrita na forma

$$\begin{aligned} C(s)P(s) &= k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} P(s), \\ &= C_1(s)G_1(s), \end{aligned}$$

na qual

$$C_1(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad G_1(s) = kP(s),$$

e $k = k_c \alpha$. O procedimento completo para o projeto do compensador avanço é apresentado a seguir.

1. Determine k para atender a especificação sobre o erro estático do sistema compensado. A especificação sobre erro estático pode ser atendida desta forma porque $C_1(0) = 1$ e desta forma independe de $C_1(s)$;
2. Obtenha os diagramas de Bode de $G_1(j\omega)$ e determine a margem de fase correspondente. A partir da especificação de MF, calcule a quantidade de fase ϕ_m a ser adicionada no sistema. Determine α através de

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m};$$

3. A magnitude de $C_1(j\omega)$ na frequência $\omega = \omega_m$ é igual a (verifique)

$$|C_1(j\omega)|_{\omega=\omega_m} = \left| \frac{jT\omega_m + 1}{j\alpha T\omega_m + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Determine então a frequência ω_c tal que

$$|G_1(j\omega_c)|_{\text{dB}} = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

para que a nova frequência de cruzamento com 0 dB seja ω_c , também chamada de **frequência de crossover**. Faça $\omega_m = \omega_c = 1/(T\sqrt{\alpha})$. A adição de ϕ_m ocorrerá em ω_m . Determine as frequências de corte do compensador:

$$\text{zero: } \omega = \frac{1}{T}, \quad \text{pólo: } \omega = \frac{1}{\alpha T};$$

4. Determine $k_c = k/\alpha$. Verifique se a margem de ganho obtida é satisfatória (≥ 10 dB). Senão, refaça o projeto modificando as frequências de corte do compensador.

4. **Exemplo.** Considere o sistema de controle ilustrado na Figura 15.2 a seguir.

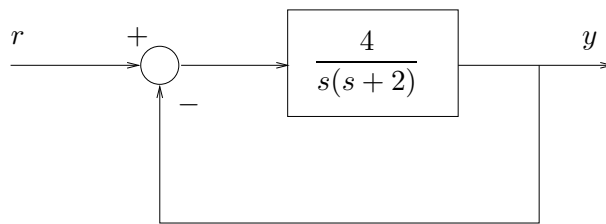


Figura 15.2: Sistema de controle não-compensado.

As especificações para o sistema compensado são as seguintes:

$$\begin{aligned} k_v &= 20, \\ \text{MF} &\geq 50^\circ, \\ \text{MG} &\geq 10 \text{ dB}. \end{aligned}$$

O projeto de $C(s)$ começa com a obtenção de k através de

$$G_1(s) = kP(s) = k \frac{4}{s(s+2)} = \frac{4k}{s(s+2)}, \quad k = k_c \alpha.$$

A constante de velocidade do sistema compensado é

$$\begin{aligned} k_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s), \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sC_1(s)G_1(s), \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Logo, $k = 10$. Os diagramas de Bode de $G_1(j\omega) = 10P(j\omega)$ são apresentados na Figura 15.3.

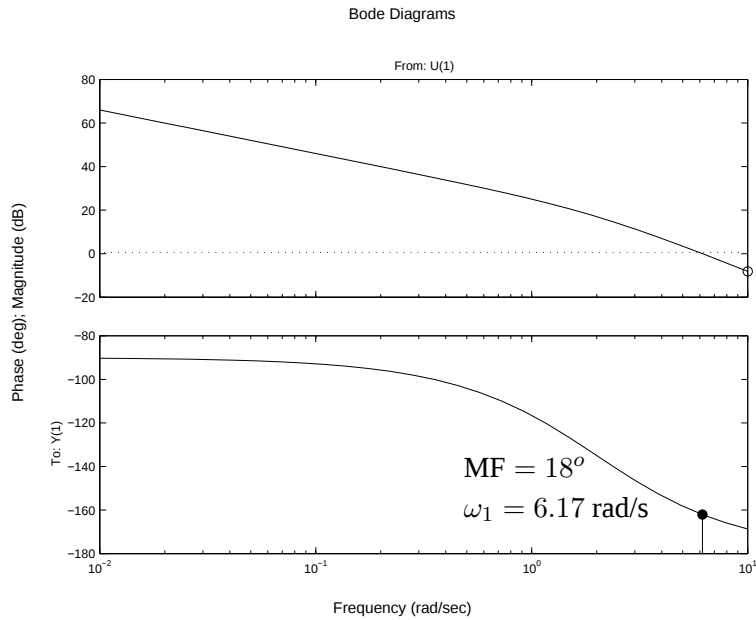


Figura 15.3: Diagramas de Bode de $G_1(s)$ ($k_v = 20$).

O ambiente `ltiview` do MATLAB permite obter as margens de fase e de ganho facilmente. No exemplo, $\text{MF} = 18^\circ$ e $\text{MG} = +\infty$ (margens infinitas ou

instáveis são indicadas por círculos abertos). Em princípio, a quantidade de fase a ser adicionada na frequência $\omega_1 = 6.17$ rad/s seria de $50^\circ - 18^\circ = 32^\circ$.

A curva de magnitude de $C_1(j\omega)$ é como ilustrada na Figura 15.1, mas começando em 0 dB. A associação de $C_1(j\omega)$ em série com $G_1(j\omega)$ não altera a especificação sobre a constante de erro porque $|C_1(j\omega)|$ vale 0 dB nas baixas frequências, mas faz a curva de magnitude se deslocar para a direita, onde a fase de $G_1(j\omega)$ será menor do que os -162° que forneceu MF = 18° .

Uma alternativa para compensar a diminuição de fase provocada indiretamente por $C_1(j\omega)$ é somar uma quantidade extra - tipicamente 5° - ao valor previamente obtido:

$$\phi_m = 32^\circ + 5^\circ = 37^\circ.$$

Determina-se então α :

$$\alpha = \frac{1 - \sin 37^\circ}{1 + \sin 37^\circ} = 0.24.$$

A adição de $\phi_m = 37^\circ$ pelo compensador será introduzida na frequência (desconhecida) $\omega_m = 1/(T\sqrt{\alpha})$. Nesta frequência, o compensador contribui em magnitude com

$$20 \log |C_1(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 6.2 \text{ dB}.$$

Em seguida determina-se a frequência na qual $|G_1(j\omega)|_{\text{dB}} = -6.2$ dB, que será a nova frequência de crossover. No exemplo, $\omega_c \simeq 9$ rad/s (obtida com um zoom dos diagramas de Bode na região de interesse). Faz-se $\omega_m = \omega_c = 1/(T\sqrt{\alpha}) = 9$ rad/s e as frequências de corte do compensador são então facilmente determinadas:

$$\begin{aligned} \text{zero} &: \frac{1}{T} = \omega_m \sqrt{\alpha} = 4.41 \text{ rad/s}, \\ \text{pólo} &: \frac{1}{\alpha T} = 18.4 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Finalmente, o ganho k_c do compensador é calculado:

$$k_c = \frac{k}{\alpha} = 41.7.$$

O compensador avanço assume a forma

$$C(s) = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = 10 \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}.$$

A Figura 15.4 apresenta as curvas de magnitude e de fase da função $G_1(s)$ que serviu de base para o projeto, do compensador $C(s)$ obtido através do procedimento de projeto e da função de malha $C(s)P(s)$ ($= C_1(s)G_1(s)$). A margem de

fase final é de $MF = 50.5^\circ$. A frequência de crossover $\omega_c = \omega_1$ ficou ligeiramente abaixo de 9 rad/s prevista, provavelmente porque $C_1(s)$ não retirou a totalidade dos 5° adicionados à fase inicialmente calculada.

A margem de ganho inicial era infinita - o sistema não-compensado é estável para qualquer valor de ganho, como a análise do lugar das raízes do sistema facilmente comprova - e continuou infinita após a introdução do compensador avanço, como seria de se esperar.

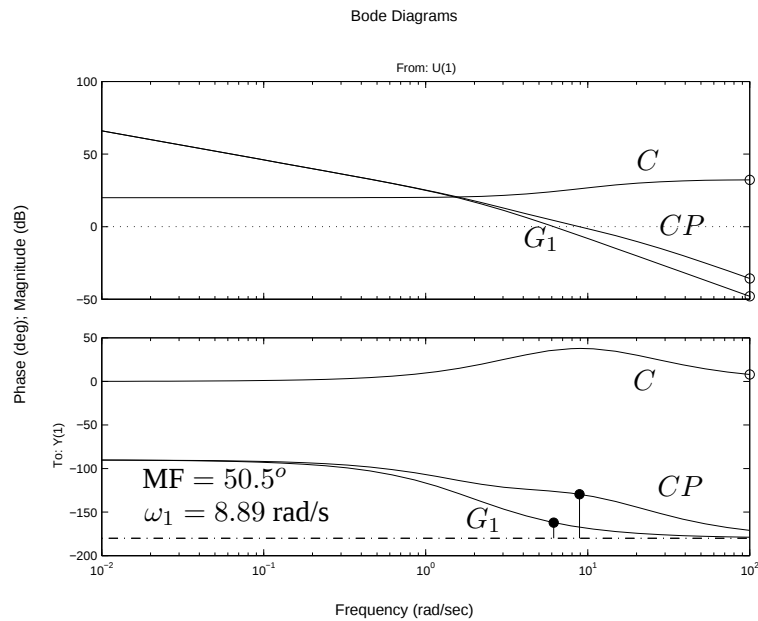


Figura 15.4: Diagramas de Bode do sistema compensado.

Aula 16

Compensação Atraso

Compensador atraso

Resposta em frequência em malha fechada

Atraso de transporte

Compensador atraso

1. O objetivo primário do compensador atraso

$$C(j\omega) = k_c \beta \frac{jT\omega + 1}{j\beta T\omega + 1}, \quad T > 0, \beta > 1,$$

é introduzir atenuação nas altas frequências e assim garantir uma margem de fase adequada para o sistema. A Figura 16.1 ilustra os diagramas de Bode do compensador atraso quando $k_c = 1$ e $\beta = 10$.

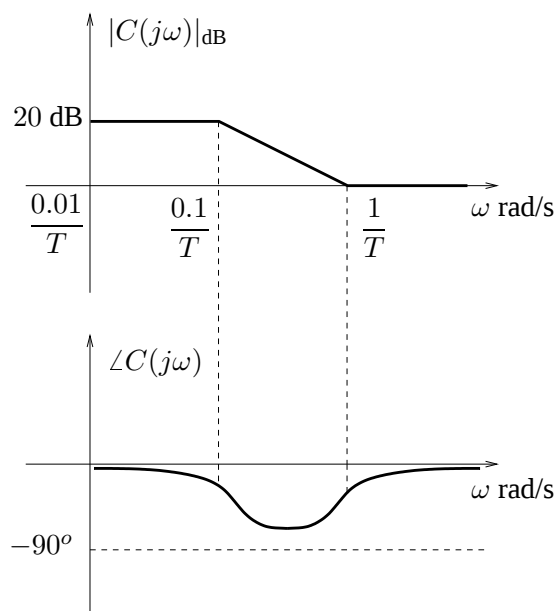


Figura 16.1: Resposta em frequência do compensador atraso.

Na compensação atraso a frequência de corte do zero (em $z = -1/T$) é maior do que a frequência de corte do pólo (em $z = -1/\beta T$). Por esta razão a frequência de corte do zero (mais a direita) deve ser substancialmente menor do que a frequência de cruzamento com 0 dB, para que o compensador não retire fase do sistema.

2. Como na compensação avanço, o ganho de malha do sistema é reescrito na forma

$$\begin{aligned} C(s)P(s) &= k_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} P(s), \\ &= C_1(s)G_1(s), \end{aligned}$$

em que

$$C_1(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}, \quad G_1(s) = kP(s),$$

e $k = k_c \beta$. Como na compensação avanço, o ganho k é determinado de forma a atender a especificação sobre o erro estático do sistema. Especificações sobre margens de fase e ganho são atendidas escolhendo-se adequadamente as frequências de corte de $C_1(s)$. O procedimento para projeto de compensadores atraso será discutido através de um exemplo.

3. **Exemplo.** Considere o sistema não-compensado ilustrado na Figura 16.2 a seguir.

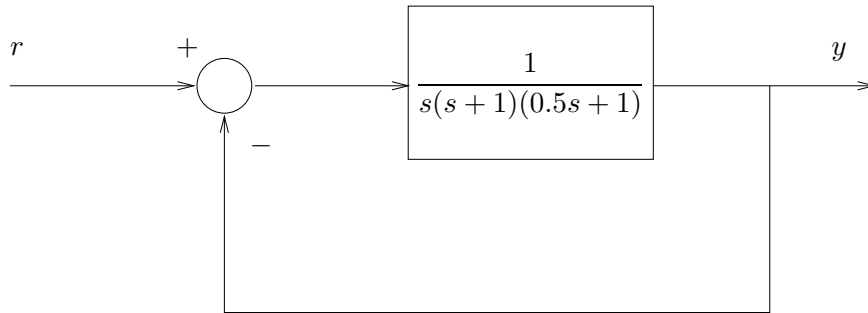


Figura 16.2: Sistema de controle não-compensado.

As especificações para o sistema de controle em malha fechada são as seguin-

tes:

$$\begin{aligned} k_v &= 5, \\ \text{MF} &\geq 40^\circ, \\ \text{MG} &\geq 10 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Inicialmente obtém-se

$$G_1(s) = kP(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.5s+1)}, \quad k = k_c\beta.$$

O valor de k é obtido da especificação sobre a constante de velocidade:

$$\begin{aligned} k_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s), \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sC_1(s)G_1(s), \\ &= k. \end{aligned}$$

Logo, $k = 5$. Os diagramas de Bode de $G_1(j\omega) = 5P(j\omega)$ são apresentados na Figura 16.3.

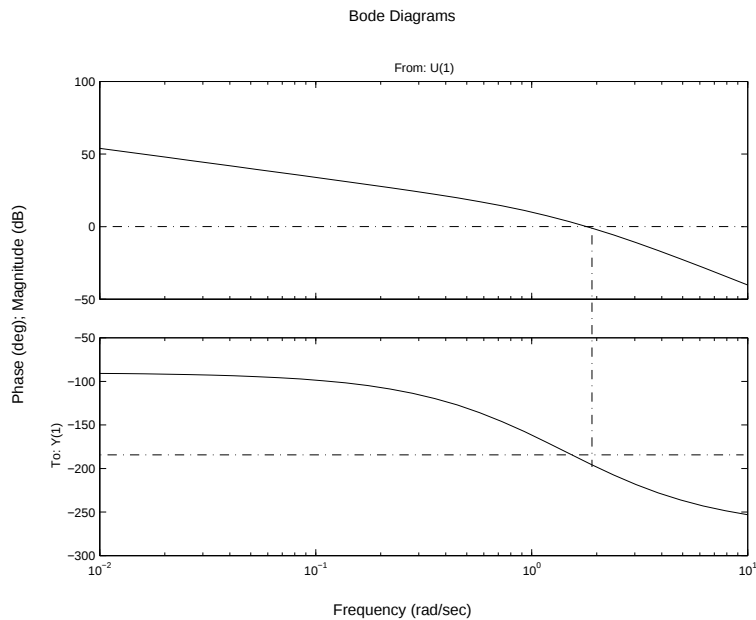


Figura 16.3: Diagramas de Bode de $G_1(j\omega)$.

A margem de fase é cerca de -10° , indicando que o sistema é instável em malha fechada. A frequência correspondente a $\text{MF} = 40^\circ$ ($\angle G_1(j\omega) = -140^\circ$)

é aproximadamente 0.61 rad/s. A idéia é usar o compensador atraso para atenuar $G_1(j\omega)$, fazendo com que a frequência de crossover fique **no entorno** de 0.61 rad/s.

A frequência de corte do zero ($1/T$) deve ser suficientemente baixa para que a contribuição negativa de fase de $C_1(j\omega)$ seja pequena no entorno de 0.61 rad/s. Escolhendo $1/T = 0.061$ rad/s - em geral, uma década abaixo da frequência inicialmente determinada - $C_1(j\omega)$ contribuirá negativamente com 5° a 12° para a fase do sistema compensado. Ao especificar que a fase na frequência de crossover seja de $40^\circ + 12^\circ$, a redução de fase provocada por $C_1(j\omega)$ é contabilizada. Portanto, a quantidade de fase necessária ao projeto é de 52° .

A frequência na qual $\angle G_1(j\omega) = -128^\circ$ é 0.42 rad/s, a nova frequência de crossover (entorno de 0.61 rad/s). Na frequência $\omega = 0.42$ rad/s,

$$|G_1(j\omega)| = 18.4 \text{ dB},$$

que é quanto $G_1(j\omega)$ deverá ser atenuada por $C_1(j\omega)$ em $\omega = 0.42$ rad/s para que de fato $\omega_c = 0.42$ rad/s seja a frequência de crossover. O diagrama de magnitude de $C_1(j\omega)$ é como ilustrado na Figura 16.1, mas começando em 0 dB. O diagrama de fase é idêntico. Como a frequência de corte do zero (mais a direita) é cerca de uma década menor do que ω_c , a atenuação produzida por $C_1(j\omega)$ em ω_c é igual a $-20 \log \beta$ (verifique). Logo,

$$-20 \log \beta = -18.4$$

ou $\beta = 8.32$. Assim, $1/(\beta T) = 0.0073$ rad/s. Finalmente, como $k = k_c \beta$, obtém-se $k_c = k/\beta = 0.6$ e o compensador atraso assume a forma final

$$C(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = 0.6 \frac{s + 0.061}{s + 0.0073}.$$

A Figura 16.4 apresenta os diagramas de Bode da função $G_1(s)$ que serviu de base para o projeto, do compensador atraso $C(s)$ projetado e do ganho de malha $C(s)P(s)$ ($= C_1(s)G_1(s)$). A margem de fase final é de $\text{MF} = 42.1^\circ$. A frequência de crossover $\omega_1 = \omega_c = 0.52$ rad/s ficou ligeiramente acima da frequência 0.42 rad/s prevista. A margem de ganho $\text{MG} = 13.2$ dB obtida atende a especificação formulada.

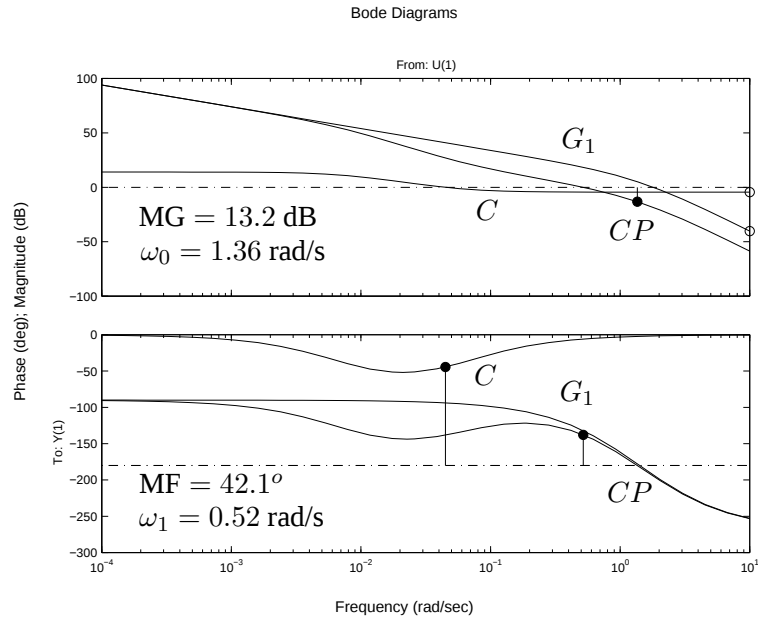


Figura 16.4: Diagramas de Bode do sistema compensado.

Resposta em frequência em malha fechada

4. Considere o sistema de controle ilustrado na Figura 16.5.

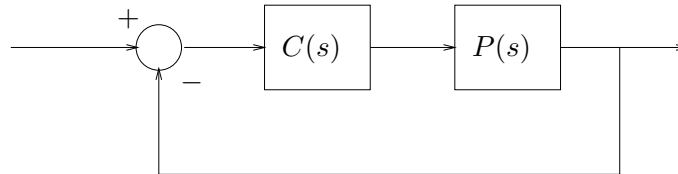


Figura 16.5: Sistema de controle com realimentação unitária.

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}.$$

Assumindo que o sistema é estável em malha fechada, é possível caracterizar $T(j\omega)$ a partir de $C(j\omega)P(j\omega)$ da seguinte forma:

1. $T(j\omega) \simeq 1$ se $\omega \ll \omega_c$, pois em geral a magnitude $|C(j\omega)P(j\omega)|$ é grande nas baixas frequências;
2. $T(j\omega) \simeq C(j\omega)P(j\omega)$ se $\omega \gg \omega_c$, pois a magnitude $|C(j\omega)P(j\omega)|$ é pequena nas altas frequências;

O comportamento de $T(j\omega)$ próximo à frequência de crossover ω_c é menos previsível mas pode ser estimado como base na margem de fase do sistema compensado. A razão é que o diagrama de magnitude de um sistema de segunda ordem apresenta uma ressonância próxima à frequência natural para fatores de amortecimento suficientemente grandes. A mesma relação aproximada vale para sistemas de ordem superior com um par de pólos complexos conjugados dominantes. Neste caso, como $MF \simeq 100 \times \xi$ para $0 \leq \xi \leq 0.6$, na vizinhança de ω_c a magnitude de $T(j\omega)$ dependerá fundamentalmente da margem de fase do sistema compensado.

5. Exemplo. Os diagramas de Bode da função de transferência de malha aberta

$$C(s)P(s) = 0.6 \frac{s + 0.061}{s + 0.0073} \frac{1}{s(s + 1)(0.5s + 1)}$$

obtido no exemplo anterior e da função de transferência de malha fechada $T(s)$ são apresentados na Figura 16.6.

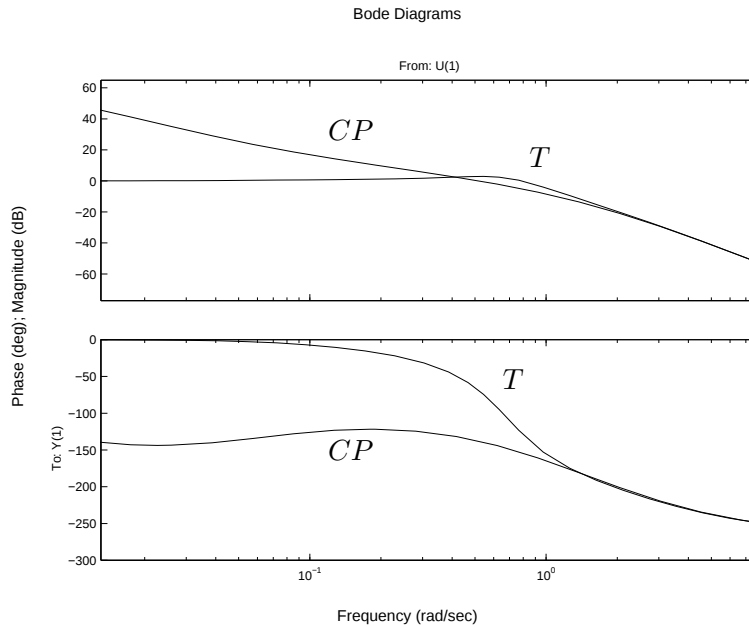


Figura 16.6: Diagramas de Bode de $C(s)P(s)$ e $T(s)$.

Observe a validade da análise anterior quando $\omega \ll \omega_c$ e $\omega \gg \omega_c$. Como consequência do projeto, tem-se que

$$|C(j\omega_c)P(j\omega_c)| = 1,$$

e como margem de fase do sistema compensado é $MF = 42.1^\circ$, conclui-se que $\angle C(j\omega_c)P(j\omega_c) = -137.9^\circ$. Portanto, a magnitude de $T(j\omega_c)$ é

$$|T(j\omega_c)| = \frac{|C(j\omega_c)P(j\omega_c)|}{|1 + C(j\omega_c)P(j\omega_c)|},$$

em que $C(j\omega_c)P(j\omega_c) = 1\angle -137.9^\circ = -0.7420 - j0.6704$. Logo

$$|T(j\omega_c)| = \frac{1}{|0.2580 - j0.6704|} = 1.39.$$

Observe que a magnitude $|T(j\omega_c)|$ cresce com a diminuição da margem de fase. A frequência de crossover é uma boa indicação da largura de banda do sistema, ω_{BW} , que por sua vez determina que tipos de sinais de referência o sistema em malha fechada será capaz de rastrear adequadamente.

Atraso de transporte

6. Sistemas térmicos, hidráulicos e pneumáticos normalmente exibem **atrasos de transporte**. O conceito será discutido através do sistema ilustrado na Figura 16.7.

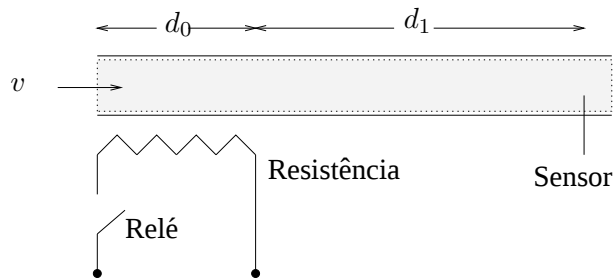


Figura 16.7: Sistema térmico com atraso de transporte.

7. Um determinado fluido se desloca com velocidade constante v ao longo de uma tubulação e deve ser aquecido por uma resistência controlada a relé. Um controlador abre ou fecha o relé de acordo com a temperatura medida pelo sensor, localizado num ponto distante do ponto de atuação.

8. Supõe-se que o relé é fechado no tempo $t = 0$ e que a variação de temperatura do fluido será de A °C. Assume-se também que não há perdas térmicas no trajeto do fluido até o ponto de medida. A variação de temperatura na saída do sistema seria como na Figura 16.8, em que $\tau_1 = d_1/v$ s e $\tau_0 = d_0/v$ s.

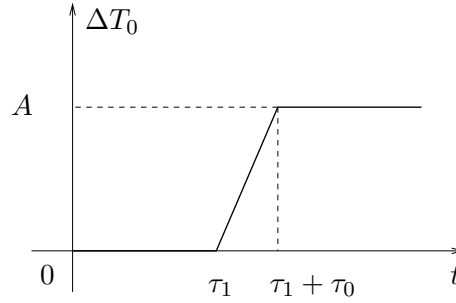


Figura 16.8: Resposta ao degrau do sistema (amplitude A °C).

9. O sensor começa a registrar um aumento de temperatura no tempo $t = \tau_1$ s. A temperatura cresce, acompanhando o tempo de permanência das seções do fluido na região da resistência, até atingir o valor máximo A °C no tempo $t = \tau_1 + \tau_0$ s. A saída do sistema pode ser representada matematicamente na forma (verifique):

$$\Delta T_0(t) = \frac{A}{\tau_0}(t - \tau_1) - \frac{A}{\tau_0}(t - (\tau_1 + \tau_0)).$$

No domínio s ,

$$\Delta T_0(s) = \frac{A}{\tau_0} \left[\frac{e^{-\tau_1 s} - e^{-(\tau_1 + \tau_0)s}}{s^2} \right].$$

A função de transferência do sistema será

$$T(s) = \frac{\Delta T_0(s)}{\Delta T_1(s)} = \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{e^{-\tau_1 s} - e^{-(\tau_1 + \tau_0)s}}{s} \right]$$

com $\Delta T_1(s) = A/s$.

Um termo do tipo $e^{-\tau s}$ é chamado de atraso de transporte na literatura de controle. Se não levado em conta, pode facilmente instabilizar o sistema de controle em malha fechada, uma vez que o valor medido pelo sensor não corresponde ao valor da saída da planta.

10. O atraso de transporte $e^{-\tau s}$ é uma **função transcendental**, isto é, a função $e^{-\tau s}$ não pode ser escrita em termos de polinômios em s . Por esta razão, as técnicas de análise e projeto desenvolvidas para sistemas modelados por funções de transferência racionais devem ser convenientemente estendidas para que se possa tratar sistemas com atrasos de transporte.

11. A análise de estabilidade de sistemas com atraso de transporte é mais facilmente realizada no domínio da frequência. A resposta em frequência de $e^{-j\tau\omega}$ pode ser representada como

$$e^{-j\tau\omega} = 1 \angle -\omega\tau, \quad 0 \leq \omega \leq \infty.$$

A magnitude de $e^{-j\tau\omega}$ é unitária qualquer que seja ω , enquanto que a fase decresce linearmente com ω , como ilustra a Figura 16.9. O diagrama de fase apresenta-se curvado para baixo uma vez que a frequência é representada em décadas. Quanto maior o valor do atraso τ , mais negativa torna-se a fase para um mesmo valor de frequência.

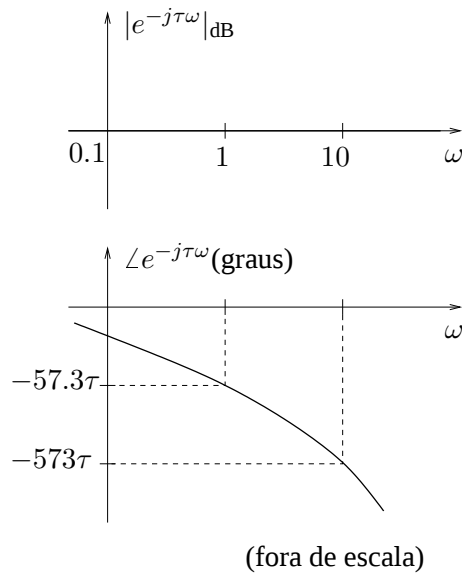


Figura 16.9: Resposta em frequência de $e^{j\tau\omega}$.

12. Assuma que a resposta em frequência de um sistema modelado pela função de transferência racional $G(s)$ é conhecida. Assuma também que $G(s)$ representa um sistema estável ($\text{MF} > 0$, $\text{MG} > 0$). Em seguida incorpore um atraso de transporte de τ segundos a $G(s)$, obtendo $G(s)e^{-\tau s}$. O diagrama de magnitude de $G(s)e^{-\tau s}$

é igual ao diagrama de magnitude de $G(s)$ mas a fase de $G(s)e^{-\tau s}$ é menor do que a fase de $G(s)$ em qualquer frequência ω . Consequente a margem de fase do sistema diminui com a introdução do atraso, tornando o sistema mais oscilatório ou mesmo instável dependendo do valor de τ .

13. Exemplo. Considere o sistema modelado pela função de transferência

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(s+1)}.$$

O sistema sem atraso seria estável em malha fechada (realimentação unitária). A estabilidade do sistema com atraso dependerá do valor de τ . A Figura 16.10 apresenta os diagramas de Bode do sistema para $\tau = 0.5$ s. A margem de fase do sistema cai de 51.8° (sistema sem atraso) para 29.3° (com atraso).

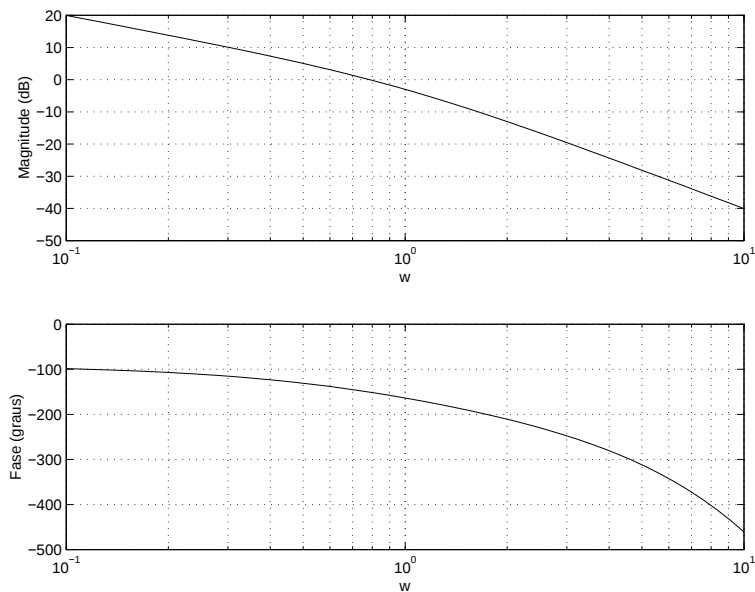


Figura 16.10: Resposta em frequência de $e^{-j\tau\omega}/j\omega(j\omega + 1)$.

14. A função não-racional $e^{-\tau s}$ pode ser aproximada em torno de $s = 0$ por funções racionais. Como sistemas de controle são quase sempre sistemas passa-baixas, aproximações em torno de $s = 0$ são suficientes. A aproximação racional

mais comum é conhecida como **aproximação de Padé**:

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{(\tau s)^2}{8} - \frac{(\tau s)^3}{48} + \dots}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{(\tau s)^2}{8} + \frac{(\tau s)^3}{48} + \dots}.$$

A ordem da aproximação (truncagem dos polinômios do numerador e denominador) necessária para representar o atraso varia em função do valor do atraso τ . Se por exemplo apenas os dois primeiros termos do numerador e do denominador forem utilizados, obtém-se

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}} = \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s}.$$

15. A aproximação de Padé sempre introduz um mesmo número de zeros e pólos. É possível mostrar que os zeros e os pólos da aproximação estão localizados nos semiplanos direito e esquerdo, respectivamente, simetricamente em relação ao eixo imaginário.

16. O uso da aproximação de Padé torna aplicáveis todas as técnicas de análise e projeto discutidas anteriormente. Entretanto as conclusões obtidas devem ser relativizadas em função da ordem da aproximação utilizada, principalmente nas questões ligadas a estabilidade.

Representação por Variáveis de Estado

Variáveis de estado
Equações de estado e de saída
Espaço e trajetória de estados
Representação matricial

Variáveis de estado

1. Através da representação de sistemas dinâmicos (lineares e invariantes no tempo) por funções de transferência, analisamos e projetamos controladores a partir da manipulação das variáveis de entrada e de saída das funções envolvidas. Dize-mos neste caso que a representação é do tipo **entrada-saída**. A representação por variáveis de estado é do tipo **interna**, pois além das variáveis de entrada e de saída, variáveis internas do sistema dinâmico também são representadas. O conceito fundamental a ser discutido é o de **estado**.

Estado. O estado de um sistema dinâmico pode ser definido como um conjunto de n variáveis denotadas por $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$, chamadas de **variáveis de estado** do sistema, cujo conhecimento num dado instante $t = t_0$, aliado ao conhecimento da entrada do sistema para todo $t \geq t_0$, permite determinar $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$ para todo $t \geq t_0$.

2. Variáveis de estado não são necessariamente grandezas físicas, embora a prática recomende, quando for possível, a escolha de variáveis que possuam interpretação ou significado físico. A razão é que mais tarde essas variáveis estarão envolvidas em estratégias de controle por realimentação.

3. **Exemplo.** Considere o sistema massa-mola-atrito ilustrado na Figura 17.1. O sistema é representado pela equação diferencial de segunda ordem

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t).$$

Defina $x_1(t) = y(t)$ (posição da massa) e $x_2(t) = \dot{y}(t)$ (velocidade da massa).

Derivando $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em relação a t , obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t).\end{aligned}$$

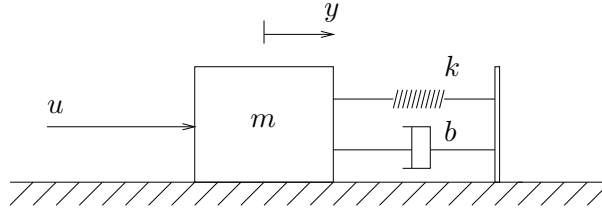


Figura 17.1: Sistema massa-mola-atrito.

Suponha que a posição e a velocidade da massa é conhecida no instante $t = t_0$, isto é, conhece-se $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$. Supondo também conhecida a entrada $u(t)$ (força aplicada à massa) para todo $t \geq t_0$ é possível integrar as duas equações diferenciais de primeira ordem e determinar a posição e a velocidade da massa para todo $t \geq t_0$. Um método simples de integração utiliza a chamada **aproximação de Euler** para a derivada:

$$\begin{aligned}\frac{x_1(t_0 + \Delta) - x_1(t_0)}{\Delta} &= x_2(t), \\ \frac{x_2(t_0 + \Delta) - x_2(t_0)}{\Delta} &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t),\end{aligned}$$

em que $\Delta > 0$ é um intervalo de integração. O conhecimento de $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$ e $u(t_0)$ permite determinar $x_1(t_1)$ e $x_2(t_1)$ para $t_1 = t_0 + \Delta$, informação que aliada ao conhecimento de $u(t_1)$ permite, por sua vez, determinar $x_1(t_2)$ e $x_2(t_2)$ para $t_2 = t_1 + \Delta$, e assim sucessivamente para todo $t = t_0 + k\Delta$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Desta forma $x_1(t)$ e $x_2(t)$ se qualificam como variáveis de estado do sistema. Observamos que o comportamento de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ anterior a $t = t_0$ não é necessário para a determinação do comportamento futuro do sistema, representado por $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \geq 0$.

Equações de estado e de saída

4. As equações diferenciais de primeira ordem que resultam da representação de um dado sistema dinâmico através de variáveis de estado são chamadas de

equações de estado. A variável de saída do sistema representa uma quantidade que pode ser medida através de um sensor. Diferentemente das equações de estado, diferenciais, a **equação de saída** é uma equação algébrica. No Exemplo, se a variável de saída for a posição da massa, a equação de saída será

$$y(t) = x_1(t),$$

Se a variável de saída for a aceleração da massa, a equação será

$$y(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t),$$

e haverá também uma transmissão direta da entrada $u(t)$ para a variável de saída. No primeiro caso, a transmissão da entrada para a saída é indireta.

5. A obtenção de uma representação interna para o sistema, isto é, a definição de um conjunto de variáveis de estado e a descrição de como essas variáveis se relacionam às variáveis de entrada e de saída, não implica necessariamente no conhecimento dos **valores** que as variáveis de estado assumem em cada instante de tempo. Podemos apenas definir a variável de entrada e medir a variável de saída. No Exemplo, se $y(t) = x_1(t)$, conhecemos a posição da massa, mas não sua velocidade. Se $y(t) = \dot{x}_2(t)$, conhecemos a aceleração da massa, não sua posição ou velocidade.

6. Sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo podem ser descritos através de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes. Suponha, por simplicidade, que a descrição diferencial do sistema de interesse não envolve derivadas da entrada. Neste caso, o sistema pode ser genericamente representado na forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = u(t),$$

na qual $y^{(n)}(t)$ denota a n -ésima derivada de $y(t)$. A solução da equação é unicamente determinada pelo conhecimento de n condições de contorno, por exemplo, $y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ (condições iniciais), e da entrada $u(t)$ para todo $t \geq t_0$. Qualquer equação diferencial de ordem n pode ser representada como um sistema de n equações de primeira ordem. De fato, definindo $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t), \dots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-1}x_n(t) + u(t). \end{aligned}$$

Espaço e trajetória de estados

7. O **espaço de estados** é o espaço real n -dimensional, no qual os eixos coordenados representam possíveis valores para as variáveis de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. O estado do sistema num instante de tempo t qualquer é visto como um **ponto** no espaço de estados. No caso de um sistema representado por duas variáveis de estado, o espaço de estados é o plano $x_1 \times x_2$, ilustrado na Figura 17.2.

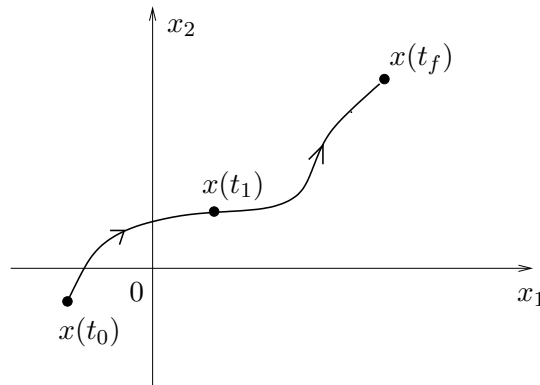


Figura 17.2: Espaço (plano) de estados.

A Figura 17.2 também ilustra a **trajetória** de um sistema hipotético entre os estados $x(t_0)$ e $x(t_f)$, passando pelo estado intermediário $x(t_1)$. O tempo fica implícito na descrição da trajetória e não guarda nenhum tipo de proporcionalidade em relação ao trajeto executado. Entretanto, a trajetória possui um **sentido** bem definido, indo de $x(t_0)$ a $x(t_f)$.

Representação matricial

8. Uma maneira conveniente de representarmos pontos (vetores) no espaço n -dimensional é através de um **vetor-coluna**:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Os sub-índices caracterizam as variáveis de estado (componentes) do vetor $x(t)$. A

derivada de $x(t)$ em relação ao tempo é, por definição,

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}.$$

A representação das variáveis de estado como um vetor conduz a uma notação matricial genérica para sistemas lineares invariantes no tempo, do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

na qual A , B , C e D são matrizes constantes de dimensões $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$ e 1×1 , respectivamente. Quase sempre, por simplicidade de notação, omitimos as dependências temporais de $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ e escrevemos simplesmente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

As matrizes constantes A , B , C e D presentes na descrição matricial recebem as denominações especiais de matriz de estados, matriz de entrada, matriz de saída e matriz de transmissão direta da entrada para a saída, respectivamente. No caso de sistemas SISO (uma entrada, uma saída), as matrizes B e C são na verdade vetores, coluna e linha, respectivamente, e D é um escalar.

9. Exemplo 1. Considere a representação por variáveis de estado associada ao sistema massa-mola-atrito discutido no exemplo anterior. As equações de estado e de saída são

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Definindo o vetor de estados ($n = 2$) como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

obtemos a seguinte representação matricial para as equações de estado e de saída:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + [0] u.$$

As matrizes A , B , C e D referentes às definições adotadas para o sistema massa-mola-atrito são as seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0].$$

Se as variáveis de estado e de saída forem definidas como $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = y$ e $y = \ddot{x}$, respectivamente, as matrizes A , B , C e D serão

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes das matrizes A , B , C e D (constantes, porque o sistema é invariante no tempo) dependem fundamentalmente das definições adotadas para as variáveis de estado e de saída. Diferentes definições levam a diferentes matrizes A , B , C e D .

10. Exemplo 2. As variáveis de estado naturais no modelo do pêndulo invertido representado na Figura 17.3 são $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$ e $x_4 = \dot{x}$. O modelo diferencial linearizado do pêndulo em torno da posição de equilíbrio instável ($\theta = 0$, $x = 0$) é

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = u,$$

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + ml \frac{d^2x}{dt^2} = mgl\theta.$$

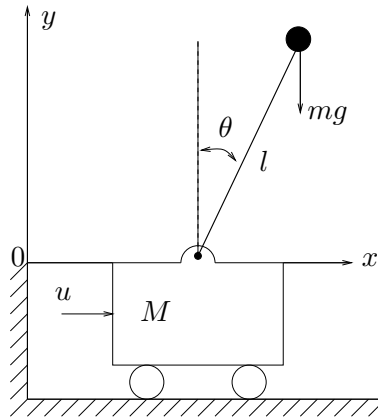


Figura 17.3: Pêndulo invertido.

Com as definições adotadas, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 - \beta u, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\gamma x_1 + \rho u,\end{aligned}$$

$$y = x_1,$$

em que

$$\alpha = \frac{(M+m)g}{Ml}, \quad \beta = \frac{1}{Ml}, \quad \gamma = \frac{mg}{M} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{M}.$$

Definindo o vetor de estados ($n = 4$) como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

a representação matricial das equações de estado e de saída do pêndulo invertido assume a forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Se a saída for definida como sendo a aceleração angular, $\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$, então a equação de saída assumirá a forma

$$y = -\alpha x_1 - \beta u = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + [-\beta]u.$$

As matrizes A , B , C , e D relativas a esta última representação para o pêndulo invertido serão dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [-\beta].$$

Aula 18

Solução das Equações Dinâmicas

Equações dinâmicas

Solução não-forçada ($u = 0$)

Solução forçada

Equações dinâmicas

1. Considere as equações dinâmicas – equação de estados e equação de saída – na forma matricial

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (27)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (28)$$

nas quais supomos conhecido $x(0) = x_0$, o estado inicial do sistema no tempo $t_0 = 0$. Desejamos determinar $x(t)$ e $y(t)$ em função do estado inicial $x(0) = x_0$ e de uma dada entrada $u(t)$, $t \geq 0$. A Figura 18.1 ilustra o inter-relacionamento das variáveis $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ e sua dependência em relação às matrizes A , B , C e D .

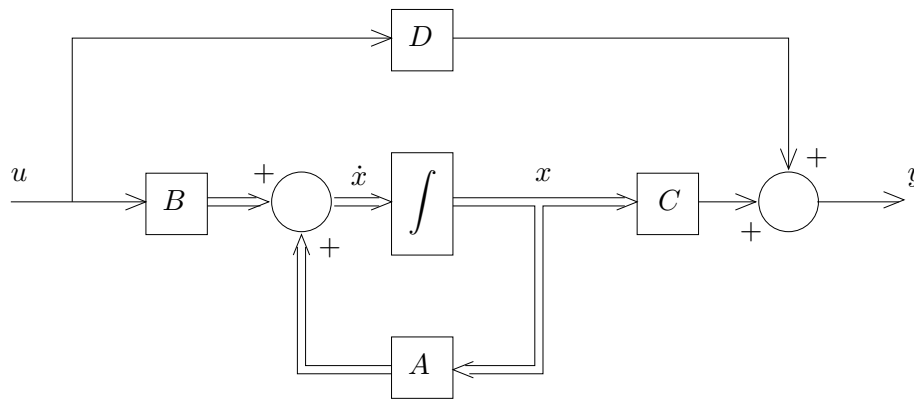


Figura 18.1: Representação das equações dinâmicas.

Na Figura 18.1 adotamos a convenção de representar sinais escalares (associados a u e y) por uma linha simples, e sinais vetoriais (associados à definição de x) por linhas duplas.

Solução não-forçada ($u = 0$)

2. Numa primeira etapa, consideraremos a resposta não-forçada do sistema dinâmico, isto é, a caracterização do estado $x(t)$ e da saída $y(t)$ quando a entrada $u(t)$ é removida, isto é, $u(t) = 0$, $t \geq 0$. O sistema responde somente à condição inicial $x(0) = x_0$ e a equação de interesse é

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (29)$$

3. A equação diferencial homogênea (29) é do tipo que pode ser resolvida por **Série de Potências**. A idéia é supor que o estado no instante t (um vetor n -dimensional) pode ser expresso como uma soma de potências de t , na forma

$$x(t) = v^0 + v^1 t + v^2 t^2 + v^3 t^3 + \dots + v^k t^k + \dots, \quad (30)$$

na qual $v^0, v^1, v^2, \dots$, são vetores n -dimensionais a serem determinados. Impondo que (30) seja uma solução da equação (29), obtemos uma identidade em termos da variável t :

$$(0 + v^1 + 2v^2 t + 3v^3 t^2 + \dots + kv^k t^{k-1} + \dots) = A(v^0 + v^1 t + v^2 t^2 + v^3 t^3 + \dots + v^k t^k + \dots). \quad (31)$$

Igualando os termos de mesma potência de t , observamos que

$$v^1 = Av^0, \quad (32)$$

$$v^2 = \frac{1}{2}Av^1 = \frac{1}{2!}A^2v^0, \quad (33)$$

$$v^3 = \frac{1}{3}Av^2 = \frac{1}{3 \times 2!}A^3v^0 = \frac{1}{3!}A^3v^0, \quad (34)$$

$$\vdots$$

$$v^k = \frac{1}{k!}A^k v^0. \quad (35)$$

De acordo com (30), o vetor v^0 que define $v^1, v^2, \dots$ é dado por $v^0 = x(0)$. Substituindo (32)–(35) em (30), o estado do sistema num tempo genérico t passa a ser expresso como

$$x(t) = \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k \dots \right) x(0).$$

Em analogia com a representação exponencial para $e^{\lambda t}$, λ escalar, dada por

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}\lambda^2 t^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\lambda^k t^k + \cdots,$$

definimos a **matriz exponencial de A** como

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad (A^0 = I). \end{aligned} \quad (36)$$

A soma infinita (36) **converge absolutamente** para todos os valores finitos de t . A solução da equação homogênea (29) assume então a forma final

$$x(t) = e^{At} x_0, \quad t \geq 0.$$

A saída do sistema fica completamente caracterizada pela solução da equação homogênea:

$$y(t) = C e^{At} x_0, \quad t \geq 0.$$

4. A matriz exponencial de A exibe um série de propriedades úteis. A derivada de e^{At} em relação a t pode ser obtida derivando (36) termo-a-termo, o que fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= A + A^2 t + \frac{1}{2!}A^3 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} + \cdots, \\ &= A \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1} t^{k-1} + \cdots \right), \\ &= A e^{At}, \\ &= \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1} t^{k-1} + \cdots \right) A, \\ &= e^{At} A. \end{aligned}$$

Observamos então que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A. \quad (37)$$

e que portanto a matriz e^{At} **comuta** com A . A matriz exponencial de A também apresenta a seguinte propriedade:

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau} \quad \text{quaisquer que sejam } t \text{ e } \tau.$$

Se $t = -\tau$, então

$$e^{At}e^{-At} = e^{-At}e^{At} = e^{A(t-t)} = I,$$

e, por definição, e^{-At} é a matriz inversa de e^{At} . A matriz exponencial de A é **não-singular** ($\det(e^{At}) \neq 0$) para todo t .

Solução forçada

5. A solução de (27)-(28) para quaisquer x_0 e $u(t)$, $t \geq 0$, dados, é obtida a partir da pré-multiplicação de ambos os lados de

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

por e^{-At} , resultando

$$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At}Bu(t). \quad (38)$$

O lado esquerdo da (38) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] &= (-A)e^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t), \\ &= \frac{d}{dt} [e^{-At}x(t)]. \end{aligned} \quad (39)$$

Para chegar a (39), utilizamos a propriedade da derivada de e^{At} e a regra para derivada do produto de funções de t . Integrando ambos os lados de

$$\frac{d}{dt} [e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

entre 0 e t , verificamos que

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Pré-multiplicando ambos os lados da última igualdade por e^{At} , a matriz inversa de e^{-At} , obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau, \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{At}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (40)$$

Como a integração é na variável τ , a matriz e^{At} pode passar a fazer parte do integrando em (40). Dado que $e^{At}e^{-A\tau} = e^{A(t-\tau)}$, chegamos finalmente a solução geral da equação de estado:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (41)$$

O primeiro termo no lado direito de (41) é a resposta do estado à condição inicial supondo $u(t) = 0$, $t \geq 0$, enquanto que o segundo termo representa a resposta do estado para uma entrada qualquer $u(t)$, $t \geq 0$ e $x_0 = 0$. A resposta total é, pelo Princípio da Superposição, a soma das duas respostas parciais. A saída do sistema é obtida diretamente de (41):

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \geq 0. \quad (42)$$

6. Os estados e a saída do sistema ficam completamente caracterizados a partir da determinação da matriz e^{At} . Entretanto, a caracterização de e^{At} através da soma infinita (36) é inconveniente do ponto de vista de cálculo. No sentido de caracterizar e^{At} de forma fechada, e lembrando que $\mathcal{L}[t^k] = k!/s^{k+1}$, tomamos então a transformada de Laplace de e^{At} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{At}] &= \mathcal{L}\left[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots\right], \\ &= \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \cdots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \cdots, \end{aligned} \quad (43)$$

$$= (sI - A)^{-1}. \quad (44)$$

A igualdade entre (43) e (44) é verdadeira, pois a multiplicação de (43) por $(sI - A)$ à direita e à esquerda resulta na matriz identidade. Assim sendo, a matriz exponencial de A pode ser definida através de anti-transformada de Laplace:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}].$$

7. **Exemplo.** As equações dinâmicas de um sistema massa-mola-atrito caracterizado pelos parâmetros físicos $m = 1.0$ kg, $b = 3.0$ N/m/s e $k = 2.0$ N/m são dadas por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

A matriz exponencial de A será obtida através de anti-transformada de Laplace:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}].$$

Inicialmente calculamos

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A anti-transformada de $(sI - A)^{-1}$ é igual à anti-transformada de cada elemento de $(sI - A)^{-1}$. Através de expansão em frações parciais e com o auxílio de uma tabela de transformadas de Laplace, chegamos a

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

A resposta do sistema à condição inicial $x_1(0) = 1$ (m) e $x_2(0) = 0$ (m/s) seria

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

A resposta do sistema a uma condição inicial e a uma entrada qualquer,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0,$$

requer uma integração na variável τ . Assumindo que a entrada é um degrau

unitário, isto é, $u(t) = 1$, $t \geq 0$, obtemos o seguinte integrando:

$$\begin{aligned} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) &= \begin{bmatrix} 2e^{\tau-t} - e^{2(\tau-t)} & e^{\tau-t} - e^{2(\tau-t)} \\ -2e^{\tau-t} + 2e^{2(\tau-t)} & -e^{\tau-t} + 2e^{2(\tau-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \\ &= \begin{bmatrix} e^{\tau-t} - e^{2(\tau-t)} \\ -e^{\tau-t} + 2e^{2(\tau-t)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau-t} - e^{2(\tau-t)} \\ -e^{\tau-t} + 2e^{2(\tau-t)} \end{bmatrix} d\tau, \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

A resposta forçada do sistema à entrada degrau unitário para a condição inicial $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$ é

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

A saída do sistema, isto é, a quantidade que seria efetivamente observada através de um sensor de posição, é, por sua vez,

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Em regime, isto é, quando $t \rightarrow \infty$, a posição da massa tende a 0.5 m. A resposta ao degrau do sistema é ilustrada na Figura 18.2.

Em regime, isto é, quando $t \rightarrow \infty$, a posição da massa tende a 0.5 m. A resposta ao degrau do sistema é ilustrada na Figura 18.2.

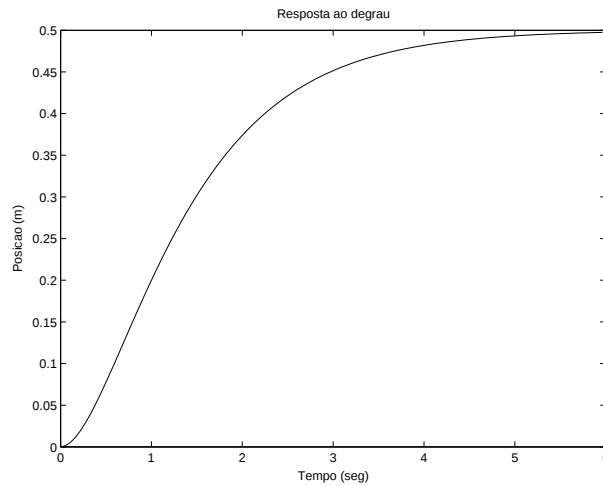


Figura 18.2: Resposta ao degrau do sistema massa-mola-atrito.

O gráfico da Figura 18.2 foi obtido através do MATLAB, comando `step`, o qual supõe condições iniciais nulas. Para obter respostas forçadas que levem em conta condições iniciais não-nulas, devemos utilizar a comando `lsim`, para simulação de sistemas dinâmicos lineares sujeitos a condições iniciais e entradas quaisquer.

Aula 19

Forma Canônica de Jordan

Autovalores e autovetores
Multiplicidades algébrica e geométrica
Forma canônica de Jordan

Autovalores e autovetores

1. Tanto a análise quanto a síntese de sistemas de controle representados através de variáveis de estado estão fundamentalmente calcadas na estrutura de **autovalores-autovetores** da matriz de estados A . Dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbf{C}$ é um **autovalor** de uma matriz A de ordem n se existe um vetor **não-nulo** $x \in \mathbf{C}^n$ tal que

$$Ax = \lambda x. \quad (45)$$

Dizemos neste caso que x é um **autovetor** associado ao autovalor λ . (O autovetor x não deve ser confundido com o vetor de estados do sistema.) Se x é um autovetor associado ao autovalor λ , então o efeito de se pré-multiplicar x pela matriz A corresponde a **escalonar** x por meio de λ . O tamanho e o sentido de x podem ser modificados, mas não a sua direção, como ilustra a Figura 19.1.

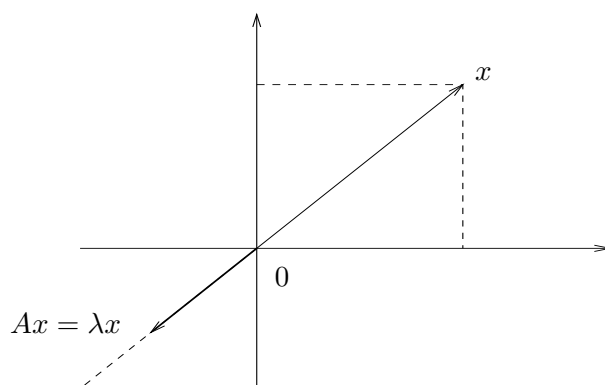


Figura 19.1: Autovalor-autovetor: interpretação.

A equação (45) pode ser reescrita na forma

$$(\lambda I - A)x = 0, \quad (46)$$

e para que x seja uma solução não-nula de (45), devemos impor que a matriz $(\lambda I - A)$ de ordem n seja **singular**, isto é, que $\det(\lambda I - A) = 0$. Caso contrário, a única solução de (46) seria $x = 0$. O determinante de $(\lambda I - A)$ define o **polinômio característico de A** ,

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

e $p(\lambda) = 0$ é a **equação característica** resultante.

2. Exemplo. Considere a matriz genérica de ordem $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A , isto é, o determinante de

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \\ &= \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \end{aligned}$$

Os autovalores de A são as raízes de $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$, que denotaremos por λ_1 e λ_2 . Um autovetor x^1 associado a λ_1 é obtido ao resolvermos o sistema de equações

$$(\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

no qual x_1^1 e x_2^1 representam a primeira e a segunda componente do autovetor x^1 , respectivamente. Um autovetor x^2 associado ao autovalor λ_2 é obtido de forma similar. Concretamente, considere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A são as raízes da equação característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0,$$

ou seja, $\lambda_1 = j$ e $\lambda_2 = -j$ ($j = \sqrt{-1}$). Autovetores x^1 e x^2 associados a λ_1 e λ_2 são obtidos resolvendo-se

$$(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As soluções gerais para os sistemas acima são

$$x^1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -j\alpha \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ j\alpha \end{bmatrix}.$$

Observamos que existe uma infinidade de autovetores associados a λ_1 e λ_2 , um para cada valor de $\alpha \neq 0$ ($x = 0$ não é um autovetor) selecionado.

3. Podemos mostrar através de um processo de indução matemática que uma matriz A de ordem n possui um polinômio característico de grau n na forma geral

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0, \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n), \end{aligned}$$

em que $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ dependem dos coeficientes de A . Uma matriz A de ordem n terá portanto n autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, e n autovetores associados, $x^1, x^2, \dots, x^n$, soluções não-nulas de

$$(\lambda_i I - A)x^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Multiplicidades algébrica e geométrica

4. **Multiplicidade algébrica.** Dada uma matriz A de ordem n , definimos a multiplicidade algébrica de um autovalor λ_i de A como o número de vezes que λ_i

aparece como raiz da equação característica $p(\lambda) = 0$. Supondo que $r \leq n$ autovalores de A são **distintos** e que suas multiplicidades algébricas são iguais a m_i , $i = 1, 2, \dots, r$, podemos reescrever $p(\lambda)$ como

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r},$$

de tal forma que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$.

5. Multiplicidade geométrica. Dada uma matriz A de ordem n , definimos a multiplicidade geométrica de um autovalor λ_i de A como o número máximo de autovetores **linearmente independentes** que podemos associar a λ_i . Denotamos as multiplicidades geométricas dos r ($r \leq n$) autovalores distintos de A por μ_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Existe pelo menos um autovetor linearmente independente associado a cada autovalor. A multiplicidade geométrica μ_i de um autovalor λ_i é limitada superiormente pela sua respectiva multiplicidade algébrica, m_i . Logo,

$$1 \leq \mu_i \leq m_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

6. Exemplo 1. A equação característica da matriz de ordem $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

é $(\lambda - 5)^2 = 0$. A multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_1 = 5$ é $m_1 = 2$. A multiplicidade geométrica de λ_1 será igual ao maior número de autovetores linearmente independentes que pudermos associar a λ_1 resolvendo o sistema

$$(\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A única solução não-nula possível é

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

e portanto $1 = \mu_1 < m_1 = 2$.

7. Exemplo 2. A equação característica da matriz de ordem $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. As raízes da equação e suas respectivas multiplicidades algébricas são $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$ ($m_1 + m_2 = 3$). Um autovetor x^1 associado a λ_1 é obtido resolvendo-se

$$(\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral para o sistema relativo ao autovalor λ_1 é

$$x^1 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Logo, a multiplicidade geométrica de λ_1 é $\mu_1 = 1$, como esperado ($1 \leq \mu_1 \leq m_1 = 1$). A multiplicidade geométrica de λ_2 é determinada através de

$$(\lambda_2 I - A)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema relativo a λ_2 possui duas soluções linearmente independentes:

$$x^2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Portanto, a multiplicidade geométrica de λ_2 é $2 = \mu_2 = m_2 = 2$.

Forma canônica de Jordan

8. Uma manipulação extremamente útil para a análise de sistemas de controle descritos através de variáveis de estado é a representação da matriz de estados A numa forma especial conhecida como **forma canônica de Jordan**. O resultado de interesse estabelece que para cada matriz A de ordem n , existe uma matriz T de ordem n não-singular (isto é, $\det(T) \neq 0$) tal que

$$T^{-1}AT = \Lambda_J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_\mu \end{bmatrix}.$$

A matriz Λ_J é a forma canônica de Jordan de A . A matriz Λ_J é **bloco-diagonal** e o número total de blocos de Λ_J é igual a $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r$, a soma das multiplicidades geométricas dos autovalores de A . Cada bloco J_i é um **bloco de Jordan** de ordem n_i . A soma das ordens dos blocos de Jordan é igual à ordem de A (e portanto, de Λ), isto é, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. A forma genérica de um bloco de Jordan é

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

A matriz Λ_J é **triangular superior**, pois abaixo da diagonal principal de cada J_i (e portanto de Λ_J) todos os elementos são nulos. O número de vezes que um autovalor de A aparece na diagonal principal de Λ_J é igual à multiplicidade algébrica do autovalor. Um mesmo autovalor pode aparecer em mais de um bloco de Jordan: o número de blocos de Jordan nos quais um autovalor aparece é igual a sua multiplicidade geométrica.

9. Exemplo 3. Considere a matriz A de ordem 3 utilizada no Exemplo 2. Os dados relevantes para a análise da forma de Jordan de A são: $\lambda_1 = 2$, $m_1 = \mu_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$, $\mu_2 = 2$. O número de blocos de Jordan é igual à soma das multiplicidades geométricas: $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 3$. O autovalor $\lambda_1 = 2$ aparece apenas uma vez na diagonal de Λ_J (pois $m_1 = 1$), num único bloco de Jordan (pois $\mu_1 = 1$). Logo, $n_1 = 1$. O autovalor $\lambda_2 = 1$ aparece duas vezes na diagonal de Λ_J (pois $m_2 = 2$), em dois blocos de Jordan (pois $\mu_2 = 2$). Consequentemente, $n_2 = n_3 = 1$, e a forma de Jordan de A é

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Exemplo 4. Considere uma matriz hipotética A de ordem 9 com os seguintes dados relevantes para a análise da sua forma canônica de Jordan: $r = 4$ (quatro autovalores distintos), $m_1 = 3$ e $\mu_1 = 1$, $m_2 = 3$ e $\mu_2 = 2$, $m_3 = 2$ e $\mu_3 = 1$, e $m_4 = 1$ e $\mu_4 = 1$. O número total de blocos de Jordan de A é $\mu = 5$, e levando-se em conta as diferenças entre as multiplicidades algébricas e geométricas, a forma de Jordan de A seria

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

11. Dadas as regras que regem a construção da forma canônica de Jordan, se uma dada matriz A de ordem n possuir autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ($r \leq n$) tais que $\mu_i = m_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, então a forma de Jordan de A será **diagonal**:

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Neste caso, como $T^{-1}AT = \Lambda_J$ implica que $AT = T\Lambda_J$, e representando a matriz T através das suas colunas como

$$T = \begin{bmatrix} x^1 & \vdots & x^2 & \vdots & \cdots & \vdots & x^n \end{bmatrix},$$

obtemos a identidade

$$A \begin{bmatrix} x^1 & \vdots & x^2 & \vdots & \cdots & \vdots & x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 & \vdots & x^2 & \vdots & \cdots & \vdots & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

ou, expressando os lados direito e esquerdo da identidade em termos de colunas, $Ax^i = \lambda_i x^i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Consequentemente, T pode ser obtida na forma de qualquer matriz formada por autovetores linearmente independentes associados aos autovalores de A . No caso mais geral em que Λ_J não é diagonal, podemos ainda obter as colunas de T na forma de **autovetores generalizados**, resolvendo recursivamente a identidade $AT = T\Lambda_J$.

Aula 20

Estabilidade Assintótica

Pontos de equilíbrio

Estabilidade assintótica

Estabilidade interna $\times$ estabilidade entrada-saída

Transformações de similaridade

Pontos de equilíbrio

1. A representação de sistemas dinâmicos através de variáveis de estado exige uma definição de estabilidade que leve em conta a representação interna do sistema. Considere o sistema não-forçado

$$\dot{x} = Ax(t), \quad (47)$$

cujas resposta à condição inicial $x(0)$ é, como sabemos, $x(t) = e^{At}x(0)$, $t \geq 0$. A noção fundamental para o estudo da estabilidade interna do sistema é a de **ponto de equilíbrio**. Dizemos que x^e é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = Ax(t)$ se, uma vez que a trajetória de estado $x(t)$, $t \geq 0$ atinja x^e , o estado do sistema permanece em x^e indefinidamente.

2. Podemos traduzir matematicamente a definição acima da seguinte forma: se x^e é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = Ax(t)$, então existe um tempo $t = t_e$ no qual $x(t_e) = x^e$ tal que $x(t) = x^e$ para todo $t \geq t_e$. Assim sendo, $\dot{x}(t_e) = Ax(t_e) = Ax^e = 0$, e pontos de equilíbrio do sistema serão pontos tais que

$$Ax^e = 0.$$

3. Pontos de equilíbrio são **soluções constantes** de (47), no sentido de que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, se $x(0) = x^e$. A origem do espaço de estados é sempre um ponto de equilíbrio do sistema. A origem é o único ponto de equilíbrio do sistema se A for uma matriz não-singular. O sistema possui infinitos pontos de equilíbrio se A for singular, pois neste caso $Ax^e = 0$ admite infinitas soluções não-nulas.

4. **Exemplo.** Considere a equação diferencial de segunda ordem que representa

um duplo integrador: $\ddot{x} = u(t)$. Definindo $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, a representação de estados correspondente seria

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Observe que A é singular. Os pontos de equilíbrio do sistema, isto é, as soluções de

$$Ax^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são do tipo

$$x^e = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que α é qualquer valor real. No plano de estados $x_1 \times x_2$, os pontos de equilíbrio são quaisquer pontos sobre o eixo x_1 .

Estabilidade assintótica

5. Dizemos que um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico representado por $\dot{x} = Ax(t)$ é **assintoticamente estável** se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^e\| = 0, \quad (48)$$

qualquer que seja a condição inicial $x(0)$. Em (48), a quantidade $\|x(t) - x^e\|$ é uma medida da **distância** entre um ponto qualquer da trajetória do sistema iniciada em $x(0)$ e o ponto de equilíbrio x^e . Uma definição tradicional de distância entre dois pontos no espaço $\mathbf{R}^n$ é

$$\|x(t) - x^e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t) - x_i^e)^2}. \quad (49)$$

6. Observamos que $\|x(t) - x^e\| = 0$ se e somente se $x(t) = x^e$. Diferentes condições iniciais produzem diferentes trajetórias. De acordo com a definição, um ponto de equilíbrio x^e é assintoticamente estável se qualquer trajetória $x(t)$, $t \geq 0$, tende a se aproximar arbitrariamente de x^e quando $t \rightarrow \infty$. O sistema $\dot{x} = Ax(t)$ possui no máximo um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, e este ponto é a origem do espaço de estados. De fato, assumamos que, além da origem, o sistema possui outro ponto de equilíbrio $x^e \neq 0$. Escolhendo $x(0) = x^e$, o sistema permanece

em x^e indefinidamente, jamais se aproximando da origem. Reciprocamente, se a trajetória for iniciada na origem, o sistema jamais se aproxima de x^e . Concluimos então que a origem é o único ponto de equilíbrio assintótico possível.

7. A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico linear depende apenas da análise da estrutura de autovalores-autovetores da matriz de estados A . Para verificarmos esta propriedade, representamos A através da sua forma de Jordan, $A = T\Lambda_J T^{-1}$, e em seguida expressamos a matriz exponencial de A em termos de Λ_J :

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T\Lambda_J^k T^{-1} t^k}{k!}, \\ &= T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_J^k t^k}{k!} T^{-1}, \\ &= T e^{\Lambda_J t} T^{-1}. \end{aligned}$$

Na primeira igualdade usamos a identidade

$$A^k = \underbrace{(T\Lambda_J T^{-1})(T\Lambda_J T^{-1}) \cdots (T\Lambda_J T^{-1})}_{k \text{ vezes}} = T\Lambda_J^k T^{-1},$$

na segunda, o fato de que T é uma matriz constante, e na terceira a definição básica de exponencial de matriz. A vantagem de se representar e^{At} através de $e^{\Lambda_J t}$ decorre da estrutura pré-determinada desta última exponencial, função apenas de Λ_J . Um exemplo do formato da matriz exponencial $e^{\Lambda_J t}$ é

$$e^{\Lambda_J t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix},$$

dado que Λ_J é a matriz de ordem 6

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

8. Um elemento genérico de $e^{\Lambda_J t}$ é da forma $t^k e^{\lambda t}$, na qual $\lambda = \sigma + j\omega$, sendo σ e ω as partes real e imaginária do autovalor λ , respectivamente. Se $\sigma < 0$, então $t^k e^{\lambda t} = t^k e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do valor de k . A seguinte condição para a estabilidade assintótica do sistema pode então ser formulada.

Crítério de Estabilidade Assintótica. A origem do sistema dinâmico $\dot{x} = Ax(t)$ é assintoticamente estável se e somente se as partes reais de todos os autovalores de A são estritamente negativas.

De fato, se as partes reais dos n autovalores de A são negativas, todos os elementos da matriz $e^{\Lambda_J t}$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$ e $e^{\Lambda_J t}$ tende à matriz nula. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - 0\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|Te^{\Lambda_J t}T^{-1}x(0) - 0\|, \\ &= \|T \cdot 0 \cdot T^{-1}x(0)\|, \\ &= 0, \end{aligned}$$

para qualquer condição inicial $x(0)$. Portanto, a origem do sistema é assintoticamente estável.

9. Se pelo menos um autovalor de A possui parte real positiva, a matriz $e^{\Lambda_J t}$ contém pelo menos um elemento da forma $t^k e^{\lambda t}$ cujo valor cresce indefinidamente quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, qualquer ponto de equilíbrio será **instável**, pois sempre poderemos escolher uma condição inicial $x(0)$ de tal forma que

$$\|x(t) - x^e\| = \|Te^{\Lambda_J t}T^{-1}x(0) - x^e\| \rightarrow \infty,$$

quando $t \rightarrow \infty$, qualquer que seja o ponto de equilíbrio considerado.

10. Se nenhum autovalor possuir parte real positiva, mas um ou mais autovalores possuírem partes reais nulas, devemos proceder a uma análise mais detalhada. Se as multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores com partes reais nulas são iguais, a matriz $e^{\Lambda_J t}$ é diagonal. Os elementos da diagonal associados aos autovalores com partes reais nulas são genericamente da forma $e^{j\omega t}$, fazendo com que $e^{\Lambda_J t}$ (e portanto $T^{-1}e^{\Lambda_J t}T$) tenda a uma matriz constante (se as partes imaginárias também forem nulas) ou periódica (se uma ou mais partes imaginárias forem diferentes de zero) quando $t \rightarrow \infty$. Assim, para cada condição inicial, a trajetória de estados $x(t) = Te^{\Lambda_J t}T^{-1}x(0)$, $t \geq 0$, tende a um ponto ou a uma curva periódica no espaço de estados, qualquer que seja a condição inicial $x(0)$. Neste caso, dizemos que o sistema é **marginalmente estável**.

11. Se a multiplicidade geométrica de pelo menos um autovalor com parte real nula for menor do que a sua multiplicidade algébrica, a matriz $e^{\Lambda t}$ conterá elementos da forma $te^{j\omega t}$, os quais (para qualquer ω) assumirão valores arbitrariamente grandes quando $t \rightarrow \infty$. Neste último caso, o sistema será **instável**, pois uma escolha apropriada da condição inicial fará a trajetória de estado se afastar indefinidamente de qualquer ponto de equilíbrio.

12. **Exemplo.** Assuma que a matriz A de um sistema hipotético é descrita como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de A é $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$. A estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema depende da natureza do produto $a_{12}a_{21}$.

- a) $a_{12}a_{21} > 0$. Os autovalores de A são $\lambda_1 = \sqrt{a_{12}a_{21}}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{a_{12}a_{21}}$. O sistema é instável pois um dos autovalores é positivo;
- b) $a_{12}a_{21} < 0$. Os autovalores de A são $\lambda_1 = j\sqrt{|a_{12}a_{21}|}$ e $\lambda_2 = -j\sqrt{|a_{12}a_{21}|}$. Os autovalores são distintos e possuem partes reais nulas. Como as multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores são iguais, o sistema é marginalmente estável;
- c) $a_{11} = a_{21} = 0$. A matriz A possui um autovalor $\lambda = 0$ com multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica também igual a 2. O sistema é marginalmente estável;
- d) $a_{11} \neq 0$, $a_{21} = 0$ (ou $a_{11} = 0$, $a_{21} \neq 0$). A matriz A possui um autovalor $\lambda = 0$ com multiplicidade algébrica igual a 2. Para obter a multiplicidade geométrica do autovalor, resolvemos

$$(\lambda I - A)x = (0I - A)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Existe apenas um autovetor associado a $\lambda = 0$:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Como a multiplicidade geométrica do autovalor é igual a 1, o sistema é instável.

Estabilidade interna $\times$ estabilidade entrada-saída

13. É natural indagar sobre a relação entre os conceitos e critérios de estabilidade assintótica e entrada-saída para um mesmo sistema dinâmico. Lembremos que um sistema dinâmico linear e invariante no tempo é estável do ponto de vista entrada-saída se a saída do sistema é limitada sempre que a entrada aplicada ao sistema é limitada. Seja

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

a função de transferência do sistema de interesse. Os zeros (finitos) e pólos de $G(s)$ são as raízes de $N(s) = 0$ e de $D(s) = 0$, respectivamente, desde que $N(s) = 0$ e $D(s) = 0$ não possuam qualquer fator comum. Um sistema dinâmico modelado através de $G(s)$ é estável do ponto de vista entrada-saída se as partes reais de todos os pólos forem estritamente negativas, instável se pelo menos uma das partes reais for positiva e marginalmente estável se todas as partes reais forem menores ou iguais a zero.

14. Uma forma de comparar os critérios de estabilidade assintótica e entrada-saída é obter a função de transferência $G(s)$ do sistema de interesse partindo da sua representação por variáveis de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

Tomando a transformada de Laplace das equações dinâmicas do sistema supondo condições iniciais nulas, isto é, $x(0) = 0$, obtemos

$$sX(s) = AX(s) + BU(s), \quad (50)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \quad (51)$$

A primeira equação fornece a transformada de Laplace do vetor de estados $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$, a qual substituída na segunda equação leva a

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s).$$

Podemos então definir então a função racional

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Como a matriz inversa de $(sI - A)$ pode ser escrita na forma

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)},$$

na qual $\text{adj}(sI - A)$ denota a **matriz adjunta** de $(sI - A)$, obtemos

$$G_1(s) = \frac{C \text{adj}(sI - A)B + \det(sI - A)D}{\det(sI - A)}.$$

em que

$$N_1(s) = C \text{adj}(sI - A)B + \det(sI - A)D \quad \text{e} \quad D_1(s) = \det(sI - A)$$

representam os polinômios numerador e denominador de $G_1(s)$. Observamos que as raízes de $D_1(s) = 0$ são os autovalores da matriz A . Se $N_1(s) = 0$ e $D_1(s) = 0$ não possuírem raízes comuns, então $G(s) = G_1(s)$ caracteriza a função de transferência do sistema. Caso contrário, cancelamos quaisquer raízes comuns para obter a representação da função de transferência $G(s)$ do sistema em termos de zeros e pólos.

15. Estabilidade assintótica implica em estabilidade entrada-saída. De fato, os pólos de $G(s)$ são um sub-conjunto dos autovalores da matriz A (após eventual cancelamento). Se todos os autovalores de A possuírem partes reais estritamente negativas, o mesmo acontecerá com os pólos de $G(s)$ e o sistema será também estável do ponto de vista entrada-saída.

16. Estabilidade entrada-saída não implica em estabilidade assintótica. Como os pólos de $G(s)$ são em geral um sub-conjunto dos autovalores da matriz A , pode ocorrer de todos os pólos de $G(s)$ possuírem partes reais estritamente negativas, mas algum autovalor de A possuir parte real nula ou positiva, precisamente um autovalor que foi cancelado no processo de obtenção de $G(s)$. Neste caso, o sistema não seria assintoticamente estável.

17. Como a estabilidade assintótica implica em estabilidade entrada-saída, o primeiro conceito é mais forte (restritivo) do que o segundo. Quando analisamos a estabilidade de um sistema do ponto de vista entrada-saída, estamos preocupados apenas em garantir que entradas limitadas produzam saídas limitadas. As variáveis internas do sistema podem eventualmente assumir valores arbitrariamente grandes, desde que o efeito líquido das variações produzidas internamente não apareçam na saída do sistema.

Transformações de similaridade

18. Enfatizamos anteriormente que um mesmo sistema dinâmico linear e invariante no tempo pode ser representado através de variáveis de estado de diferentes maneiras (diferentes A , B , C e D). Por outro lado, a função de transferência do sistema é única. Podemos demonstrar esta importante característica através da idéia de **transformação de similaridade**.

19. Duas matrizes de ordem n são **similares** se possuem exatamente os mesmos autovalores. Em particular, as matrizes A e $T^{-1}AT$, em que T é qualquer matriz não singular, são similares. De fato,

$$\begin{aligned}\det(sI - T^{-1}AT) &= \det(sT^{-1}T - T^{-1}AT), \\ &= \det[T^{-1}(sI - A)T], \\ &= \det(T^{-1}) \det(sI - A) \det(T), \\ &= \det(sI - A),\end{aligned}$$

pois $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$. Como A e $T^{-1}AT$ possuem o mesmo polinômio característico, seus autovalores são iguais, e as matrizes, similares.

20. Diferentes representações por variáveis de estado de um mesmo sistema estão relacionadas através de transformações de similaridade. Se

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

é uma dada representação do sistema e definimos $x(t) = T\bar{x}(t)$, T não-singular, obtemos

$$\begin{aligned}T\dot{\bar{x}}(t) &= AT\bar{x}(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CT\bar{x}(t) + Du(t),\end{aligned}$$

ou como T é não-singular,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t),\end{aligned}$$

em que $\bar{A} = T^{-1}AT$, $\bar{B} = T^{-1}B$, $\bar{C} = CT$ e $\bar{D} = D$. Sejam $G(s)$ e $\bar{G}(s)$ as funções de transferência do sistema quando representado pelos estados x e $\bar{x}$,

respectivamente. Por definição

$$\begin{aligned}
 \bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}, \\
 &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D, \\
 &= CT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}B + D, \\
 &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B + D, \\
 &= C(sI - A)^{-1}B + D, \\
 &= G(s),
 \end{aligned}$$

e as funções de transferência são iguais, como esperado.

21. Como diferentes representações por variáveis de estado estão relacionadas através de transformações de similaridade, a estrutura de autovalores-autovetores do sistema é preservada sempre que se passa de uma representação para outra. Algumas transformações de similaridade são especialmente úteis porque evidenciam propriedades importantes do sistema, tanto do ponto de vista de análise quanto de projeto. Entre estas, encontram-se transformações que levam a **formas canônicas**, como as formas canônicas **controláveis** e **observáveis**.

Realimentação de estados

Controlabilidade
Realimentação de estados
Forma canônica controlável
Fórmula de Ackermann

Controlabilidade

1. A equação de estados de um sistema dinâmico linear invariante no tempo representado através de n variáveis de estado é

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0.$$

As matrizes A ($n \times n$) e B ($n \times 1$), assim como a condição inicial x_0 ($n \times 1$), são quantidades conhecidas. A solução geral da equação de estados é, como sabemos,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

2. Nesta seção analisamos a **controlabilidade** de sistemas modelados por variáveis de estado, isto é, a existência de entradas de controle capazes de transferir um sistema de um estado inicial qualquer para um estado final qualquer. Buscamos caracterizar sob que condições existe um tempo finito t_f e uma entrada $u(t)$, $0 \leq t \leq t_f$ tais que

$$x^* = e^{At_f}x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

para quaisquer estados inicial x_0 e final $x^* = x(t_f)$ especificados.

Definição. O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é (completamente) **controlável** se para x_0 (estado inicial) e x^* (estado final) quaisquer, existe um tempo finito t_f e uma entrada $u(t)$, $0 \leq t \leq t_f$ tais que $x(t_f) = x^*$.

Controlabilidade completa implica na existência de uma trajetória ligando dois pontos (estado inicial e estado final) quaisquer do espaço de estados, como ilustra a Figura 21.1. Observamos que controlabilidade é uma propriedade relacionada apenas às matrizes A e B .

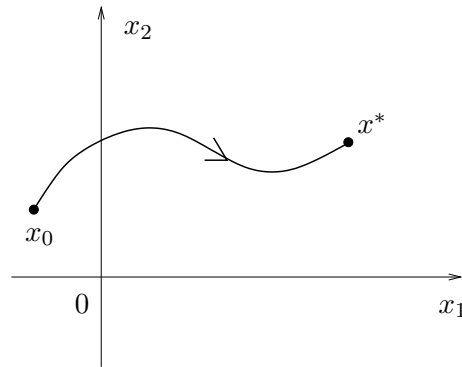


Figura 21.1: Plano de estados.

3. Normalmente utilizamos o seguinte critério algébrico para verificar se um dado sistema é ou não controlável.

Teorema. O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável se e somente se o rank da **matriz de controlabilidade**

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

é igual a n .

No caso de sistemas SISO, a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ é uma matriz quadrada de ordem n e a condição $\text{rank}(\mathcal{C}) = n$ é equivalente a $\det(\mathcal{C}) \neq 0$.

4. **Exemplo.** Considere o circuito elétrico representado na Figura 23.2. As variáveis de estado naturais do sistema são $x_1 =$ corrente no indutor e $x_2 =$ tensão no capacitor.

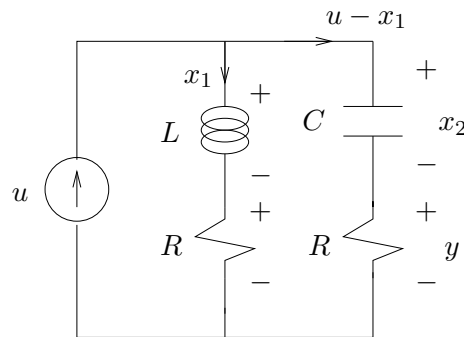


Figura 21.2: Circuito RLC.

Definimos como variável de saída a tensão no resistor em série com o capacitor. O sistema é modelado pelas seguintes equações de estado e de saída derivadas das leis de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} -L\dot{x}_1 - Rx_1 + (u - x_1)R + x_2 &= 0, \\ C\dot{x}_2 + x_1 &= u, \\ R(u - x_1) &= y. \end{aligned}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Ru.$$

A matriz de controlabilidade, de ordem 2, é

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & : & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & -\frac{2R^2}{L^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix}.$$

O circuito da Figura 21.2 será completamente controlável, significando que qualquer corrente no indutor e tensão no capacitor podem ser atingidas em tempo finito através da fonte de corrente (entrada) u , se e somente se

$$\det(\mathcal{C}) = -\frac{R^2}{L^2C} + \frac{2R^2}{L^2C} - \frac{1}{LC^2} = \frac{R^2}{L^2C} - \frac{1}{LC^2}$$

for diferente de zero. Impondo $\det(\mathcal{C}) = 0$, verificamos que o circuito não é controlável apenas quando $RC = L/R$. É interessante observar que RC e L/R são as constantes de tempo dos ramos $L - R$ e $R - C$ do circuito. Assim, quando as constantes de tempo são iguais, a corrente no indutor e a tensão no capacitor não podem assumir valores independentemente especificados. Para analisar este ponto com mais detalhes, considere a transformada de Laplace de $x(t)$ obtida da equação de estado $\dot{x} = Ax + Bu$ com condições iniciais nulas:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s).$$

Realizando as operações indicadas com as matrizes A e B relativas ao circuito, e fazendo a substituição $C = L/R^2$ para impor não-controlabilidade, obtemos

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(L/R)s + 1} \\ \frac{R}{(L/R)s + 1} \end{bmatrix} U(s).$$

Portanto,

$$X_1(s) = \frac{1}{(L/R)s + 1} U(s), \quad X_2(s) = \frac{R}{(L/R)s + 1} U(s) \quad \text{e} \quad \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = R,$$

A anti-transformada de

$$X_2(s) = R X_1(s)$$

é $x_2(t) = R x_1(t)$, indicando que o lugar geométrico dos estados atingíveis pela ação da entrada u é a reta $x_2 = R x_1$ no plano de estados $x_1 \times x_2$, conforme ilustra a Figura 21.3.

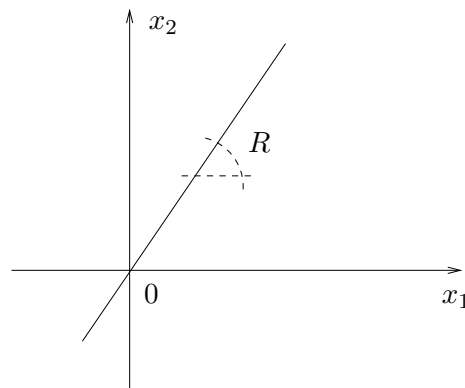


Figura 21.3: Estados atingíveis do circuito RLC.

A não-controlabilidade do circuito se reflete no fato de que apenas os estados sobre a reta de inclinação R podem ser atingidos pela ação da entrada. A corrente no indutor e a tensão no capacitor não podem ser especificadas de forma independente, embora individualmente tanto a corrente quanto a tensão possam assumir valores quaisquer.

Realimentação de estados

5. **Realimentação de estados** é a principal estratégia para o controle de sistemas modelados através de variáveis de estado. Numa primeira etapa, pressupõe-se que todos os estados do sistema estão acessíveis para realimentação. Deseja-se obter um comportamento **regulador** para o sistema, no sentido de que o seu estado tenda, de forma pré-determinada, ao estado de equilíbrio $x^* = 0$, a partir de qualquer estado inicial $x(0) \neq 0$. A entrada de controle no instante t assume a forma

$$u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) - \dots - k_nx_n(t),$$

onde $k_1, k_2, \dots, k_n$ são **ganhos de realimentação** constantes, a serem determinados, e $r(t)$ é o valor da entrada de referência no instante t . Definindo a **matriz de ganhos de realimentação** K ($1 \times n$) como

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n],$$

a entrada de controle pode ser reescrita na forma matricial como

$$u(t) = -Kx(t).$$

Quando a entrada $u(t) = -Kx(t)$ é substituída na equação de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

obtemos a equação de estado em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t).$$

A aplicação da transformada de Laplace a ambos os lados da equação anterior com condição inicial $x(0)$ permite caracterizar o estado do sistema na forma

$$X(s) = (sI - A + BK)^{-1}x(0) = \frac{\text{adj}(sI - A + BK)}{\det(sI - A + BK)}x(0).$$

O estado, assim como a saída do sistema, é fundamentalmente influenciado pelas raízes da **equação característica de malha fechada** $\det(sI - A + BK) = 0$, isto é, pelos autovalores de $A - BK$. Os autovalores de $A - BK$ serão quase sempre os pólos do sistema em malha fechada.

6. **Alocação de pólos.** O princípio da técnica de controle por alocação de pólos é **casar** o polinômio característico de malha fechada $\det(sI - A + BK)$ com um certo polinômio $p_c(s)$; as raízes de $p_c(s) = 0$ representam os pólos de malha fechada responsáveis pelo comportamento desejado para os estados (saída) do sistema. Resolvemos então a seguinte equação algébrica em termos de K , dados A , B e $p_c(s)$:

$$\det(sI - A + BK) = p_c(s).$$

Se o sistema for controlável, qualquer conjunto de pólos de malha fechada especificado pode ser alocado.

Teorema. Assuma que o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável. Então existe uma matriz K ($1 \times n$) tal que

$$\det(sI - A + BK) = p_c(s).$$

para qualquer polinômio $p_c(s)$ de grau n especificado.

7. A determinação de K pode ser feita igualando-se os coeficientes do polinômio $\det(sI - A + BK)$, os quais serão funções de $k_1, k_2, \dots, k_n$, com os coeficientes de mesmo grau do polinômio $p_c(s)$, cujas raízes são os pólos desejados de malha fechada. Desta forma, obtemos um sistema de n equações lineares e n incógnitas ($k_1, k_2, \dots, k_n$).

8. **Exemplo.** Considere a equação de estado representada pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $\det(sI - A) = s^2 + 3s + 2$. Os pólos do sistema em malha aberta (raízes da equação característica) são -1 e -2 . Supondo que os pólos de malha fechada devam ter fator de amortecimento $\xi = 0.5$ e frequência natural $\omega_n = 4$ rad/s (correspondentes a pólos complexos conjugados em $-2 \pm j2\sqrt{3}$), desejamos então que o polinômio característico de malha fechada seja

$$p_c(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 16.$$

Por outro lado,

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right).$$

Efetuando as operações indicadas,

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ (2 + k_1) & s + (3 + k_2) \end{bmatrix}\right), \\ &= s[s + (3 + k_2)] + (2 + k_1), \\ &= s^2 + (3 + k_2)s + (2 + k_1). \end{aligned}$$

Da identidade $\det(sI - A + BK) = p_c(s)$ obtemos um sistema com duas equações lineares e duas incógnitas:

$$\begin{aligned} 3 + k_2 &= 4, \\ 2 + k_1 &= 16. \end{aligned}$$

Logo $k_1 = 14$, $k_2 = 1$ e

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1 \end{bmatrix}.$$

Forma canônica controlável

8. O cálculo dos ganhos de realimentação, dados A , B e $p_c(s)$, é substancialmente mais simples quando a representação de estados do sistema encontra-se na chamada **forma canônica controlável**. A forma canônica controlável associada à função de transferência

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} x + b_n u.$$

A matriz de estados A encontra-se representada numa forma denominada de **forma companheira**, a partir da qual podemos obter facilmente o polinômio característico de A :

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0.$$

2. Supondo realimentação de estados $u = -Kx$, a matriz de estados do sistema em malha fechada assume a forma

$$\begin{aligned}
A - BK &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \cdots & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $A - BK$ também se encontra numa forma companheira, o polinômio característico do sistema em malha fechada é

$$\det(sI - A + BK) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1).$$

Definindo o polinômio desejado como

$$p_c(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_1s + q_0,$$

da identidade $\det(sI - A + BK) = p_c(s)$ resulta um sistema de n equações lineares a n incógnitas trivial, que resolvido fornece os ganhos de realimentação:

$$\begin{aligned}
k_1 &= q_0 - a_0, \\
k_2 &= q_1 - a_1, \\
&\vdots \\
k_n &= q_{n-1} - a_{n-1}.
\end{aligned}$$

9. Exemplo. Notando que as matrizes A e B do exemplo anterior encontram-se na forma canônica controlável e que $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $q_0 = 16$ e $q_1 = 4$, obtemos diretamente os ganhos de realimentação:

$$\begin{aligned}
k_1 &= q_0 - a_0 = 16 - 2 = 14, \\
k_2 &= q_1 - a_1 = 4 - 3 = 1.
\end{aligned}$$

Fórmula de Ackermann

10. Obter a forma canônica controlável e os ganhos de realimentação de um sistema dinâmico são tarefas simples quando a função de transferência do sistema é conhecida. Entretanto, em certos casos conhecemos apenas uma representação de estados do sistema, e a representação não se encontra na forma canônica controlável.

11. É possível mostrar que se o sistema não se encontra na forma canônica controlável, mas é controlável ($\text{rank}(\mathcal{C}) = n$), existe uma transformação de similaridade que leva o sistema a ser representado na forma canônica controlável. Como o objetivo da transformação é facilitar a obtenção dos ganhos de realimentação adotamos de vez a chamada **fórmula de Ackermann**:

$$K = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ componentes}} \mathcal{C}^{-1} p_c(A),$$

na qual $\mathcal{C}$ é a matriz de controlabilidade do sistema, $p_c(A)$ é a **matriz** definida por

$$p_c(s) = A^n + q_{n-1}A^{n-1} + \cdots + q_1A + q_0I,$$

e $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ são os coeficientes do polinômio característico desejado para o sistema em malha fechada.

12. **Exemplo.** Retomando o exemplo anterior e ignorando o fato de que o sistema se encontra na forma canônica controlável, obtemos

$$\begin{aligned} p_c(A) &= A^2 + 4A + 16I, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como o sistema é controlável ($\det(\mathcal{C}) \neq 0$, verifique), a inversa de $\mathcal{C}$ existe e é dada por

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} B & : & AB \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os ganhos de realimentação são obtidos através da fórmula de Ackermann:

$$\begin{aligned} K &= [0 \quad 1] \mathcal{C}^{-1} p(A), \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}, \\ &= [14 \quad 1], \end{aligned}$$

os mesmos ganhos encontrados pelos procedimentos anteriores.

Estimadores de estado

Observabilidade

Estimador (observador) de estados

Forma canônica observável

Fórmula de Ackermann

Controlador baseado no estimador

Observabilidade

1. A estratégia de controle por realimentação de estados pressupõe que todos os n estados do sistema estão disponíveis para realimentação, o que raramente ocorre em situações práticas. Conhecemos (medimos) em geral apenas a quantidade escolhida como saída do sistema. Para que seja possível **implementar** a realimentação de estados faz-se necessário estimar os estados internos do sistema.

2. Nesta seção analisamos a **observabilidade** de um sistema dinâmico linear invariante no tempo modelado por variáveis de estado:

$$\dot{x} = Ax, \quad (52)$$

$$y = Cx. \quad (53)$$

Como a entrada u é conhecida, as parcelas Bu e Du que dependem de u não precisam ser explicitamente consideradas no estudo de observabilidade. As matrizes A ($n \times n$) e C ($n \times 1$) são quantidades conhecidas, mas não a condição inicial do sistema $x(0) = x_0$. Se x_0 fosse conhecida, então o estado do sistema em qualquer instante de tempo futuro também seria conhecido a partir da solução da equação de estados:

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \geq 0. \quad (54)$$

A idéia por trás do estudo de observabilidade é determinar x_0 através da saída do sistema:

$$y(t) = Ce^{At}x_0, \quad t \geq 0. \quad (55)$$

Definição. O sistema $\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$ é (completamente) **observável** se existe um tempo finito t_f tal que o conhecimento da saída

$y(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq t_f$ é suficiente para se determinar a condição inicial x_0 .

Observabilidade é uma propriedade relacionada apenas às matrizes A e C . O seguinte critério algébrico é normalmente utilizado para verificar se um dado sistema é ou não observável.

Teorema. O sistema $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ é observável se e somente se o rank da **matriz de observabilidade**

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

é igual a n .

Como a matriz de observabilidade $\mathcal{O}$ é uma matriz quadrada de ordem n (sistemas SISO), a condição $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$ é equivalente a $\det(\mathcal{O}) \neq 0$.

4. **Exemplo.** A representação de estados do circuito elétrico representado na Figura 22.1 é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Ru.$$

A matriz de observabilidade, de ordem 2, é

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ \frac{2R^2}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}.$$

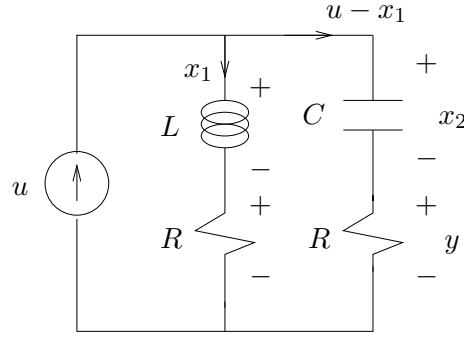


Figura 22.1: Circuito RLC.

O circuito da Figura 22.1 será completamente observável, significando que a partir da tensão medida no resistor em série com o capacitor durante um intervalo de tempo finito $0 \leq t \leq t_f$ é possível determinar a corrente e a tensão iniciais no indutor e no capacitor, se e somente se

$$\det(\mathcal{O}) = \frac{R^2}{L}$$

for diferente de zero. O sistema (circuito) é observável para quaisquer valores não-nulos de R e L . Não seria observável se por exemplo $R = 0$, quando então a saída medida por um voltímetro seria identicamente nula.

Estimador (observador) de estados

5. Se os estados do sistema não estão diretamente disponíveis para realimentação, mas o sistema é observável, é possível construir um **estimador** ou **observador de estados** e substituir a realimentação do estado real $x(t)$ pela sua estimativa $\hat{x}(t)$. O chamado **estimador de ordem completa** é descrito pela equação de estados estimados

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) + Bu(t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (56)$$

$$= (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t). \quad (57)$$

O estimador (56)-(57) é de ordem completa porque a dimensão do vetor de estados estimados $\hat{x}(t)$ é igual à dimensão de vetor de estados original $x(t)$. A equação do estimador possui duas entradas independentes, $y(t)$ e $u(t)$. A diferença entre a saída da planta $y(t)$, medida, e a saída do estimador, $C\hat{x}(t)$, fictícia, é

ponderada pela matriz L , de dimensão $n \times 1$, denominada de **matriz de ganhos de estimativa**:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}.$$

6. Se a matriz L for escolhida de tal forma que as raízes do polinômio característico de $A - LC$ tenham partes reais negativas, então o estado estimado $\hat{x}(t)$ tende ao estado real $x(t)$ quando t tende ao infinito. De fato, definindo o **erro de estimativa** no instante t como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

obtemos a seguinte equação dinâmica para o erro:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}}, \\ &= Ax + Bu - [A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) + Bu], \\ &= Ax - A\hat{x} - LCx + LC\hat{x}, \\ &= (A - LC)(x - \hat{x}), \\ &= (A - LC)e, \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0). \end{aligned}$$

A solução para a equação do erro é

$$e(t) = e^{(A-LC)t}e(0), \quad t \geq 0,$$

e se todos os autovalores de $A - LC$ possuírem partes reais estritamente negativas, então $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, qualquer que seja o erro inicial $e(0)$ (desconhecido, porque não conhecemos $x(0)$). Consequentemente, $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$, como desejado. Para determinar L utilizamos um procedimento análogo ao adotado para a determinação do ganho de realimentação K . As raízes do polinômio característico de $A - LC$ determinam como $\hat{x}(t)$ responde às entradas $y(t)$ e $u(t)$, como indica a transformada de Laplace de (56)-(57):

$$\begin{aligned} \hat{X}(s) &= (sI - A + LC)^{-1}LY(s) + (sI - A + LB)^{-1}BU(s), \\ &= \frac{\text{adj}(sI - A + LC)}{\det(sI - A + LC)}LY(s) + \frac{\text{adj}(sI - A + LC)}{\det(sI - A + LC)}BU(s). \end{aligned}$$

Escolhemos então as raízes desejadas para $\det(sI - A + LC)$ na forma de um polinômio $p_o(s)$ e em seguida resolvemos

$$\det(sI - A + LC) = p_o(s),$$

agora em termos de L . Se o sistema for observável, qualquer conjunto de pólos (isto é, qualquer $p_o(s)$) para o estimador pode ser alocado.

Teorema. Assuma que o sistema $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ é observável. Então existe uma matriz L ($n \times 1$) tal que

$$\det(sI - A + LC) = p_o(s). \quad (58)$$

qualquer que seja o polinômio $p_o(s)$ de grau n .

7. A determinação de L que resolve (58) pode ser feita igualando-se os coeficientes do polinômio $\det(sI - A + LC)$, os quais serão funções de $l_1, l_2, \dots, l_n$, com os coeficientes de mesmo grau do polinômio $p_o(s)$, cujas raízes são os pólos desejados para o estimador. Obtemos então um sistema de n equações lineares e n incógnitas ($l_1, l_2, \dots, l_n$).

8. Como o estado real $x(t)$ será substituído pelo estado estimado $\hat{x}(t)$ para fins de realimentação, quando mais rápido se der a convergência de $\hat{x}(t)$ para $x(t)$ melhor. Isso exige escolher pólos para o estimador com constantes de tempo suficientemente mais rápidas do que aquelas escolhidas para o sistema em malha fechada. Um critério prático consiste em escolher as constantes de tempo do estimador de 3 a 5 vezes menores do que a menor constante de tempo do sistema em malha fechada.

9. **Exemplo.** Considere o sistema representado pelas matrizes (relevantes para o projeto do observador)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os pólos do sistema em malha fechada foram alocados através de realimentação de estados em $-2 \pm j2\sqrt{3}$. Escolhendo os pólos do estimador com constantes de tempo 5 vezes mais rápidas, $-10 \pm j2\sqrt{3}$, obtemos o polinômio característico para o estimador

$$\begin{aligned} p_o(s) &= (s + 10 - j2\sqrt{3})(s + 10 + j2\sqrt{3}), \\ &= s^2 + 20s + 112. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\det(sI - A + LC) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Efetando as operações indicadas,

$$\begin{aligned}\det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ 2 + l_2 & s + 3 \end{bmatrix}\right), \\ &= (s + l_1)(s + 3) + (2 + l_2), \\ &= s^2 + (3 + l_1)s + (2 + 3l_1 + l_2).\end{aligned}$$

Da identidade $\det(sI - A + LC) = p_o(s)$ obtemos

$$\begin{aligned}3 + l_1 &= 20, \\ 2 + 3l_1 + l_2 &= 112.\end{aligned}$$

Logo $l_1 = 17$, $l_2 = 59$ e

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 59 \end{bmatrix}.$$

Forma canônica observável

10. Assim como a forma canônica controlável facilita o cálculo dos ganhos de realimentação de estados, a **forma canônica observável** simplifica substancialmente o cálculo dos ganhos do observador. A forma canônica observável associada à função de transferência

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x + b_n u.\end{aligned}$$

Assim com a matriz de estados na forma canônica controlável, a matriz de estados na forma canônica observável encontra-se representada numa forma companheira, a partir da qual o polinômio característico de A é facilmente obtido:

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0.$$

11. Com o sistema representado na forma canônica observável, a matriz $A - LC$ do estimador assume a forma

$$\begin{aligned} A - LC &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_0 + l_1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1 + l_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(a_{n-1} + l_n) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $A - LC$ também se encontra numa forma companheira, o polinômio característico de $A - LC$ é

$$\det(sI - A + LC) = s^n + (a_{n-1} + l_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + l_2)s + (a_0 + l_1).$$

Definindo o polinômio desejado como

$$p_o(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_1s + q_0,$$

da identidade $\det(sI - A + LC) = p_o(s)$ resulta um sistema de n equações lineares a n incógnitas trivial, que resolvido fornece os ganhos do estimador:

$$\begin{aligned} l_1 &= q_0 - a_0, \\ l_2 &= q_1 - a_1, \\ &\vdots \\ l_n &= q_{n-1} - a_{n-1}. \end{aligned}$$

Fórmula de Ackermann

12. Com a mesma motivação que levou à fórmula de Ackermann para o cálculo dos ganhos de realimentação de estados, é possível mostrar que se o sistema não se encontra na forma canônica observável, mas é observável ($\text{rank}(\mathcal{O}) = n$), existe uma transformação de similaridade que leva o sistema a ser representado na forma canônica observável. A fórmula de Ackermann correspondente para o cálculo dos ganhos do estimador é

$$L = p_o(A)\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

na qual $\mathcal{O}$ é a matriz de observabilidade do sistema, $p_o(A)$ é a matriz definida por

$$p_o(A) = A^n + q_{n-1}A^{n-1} + \cdots + q_1A + q_0I,$$

e $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ são os coeficientes do polinômio característico desejado para o observador.

13. **Exemplo.** Retomando o exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned} p_o(A) &= A^2 + 20A + 112I, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 + 20 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + 112 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 110 & 17 \\ -34 & 59 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como o sistema é observável ($\det(\mathcal{O}) \neq 0$, verifique), a inversa de $\mathcal{O}$ existe e é dada por

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os ganhos do estimador são obtidos através da fórmula de Ackermann:

$$\begin{aligned} L &= p(A)\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 110 & 17 \\ -34 & 59 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 59 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

os mesmos ganhos encontrados pelo procedimento anterior.

Controlador baseado no estimador

14. Dado um sistema dinâmico representado por variáveis de estado, controlável e observável,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

a ser controlado através de realimentação dos estados estimados, $u = -K\hat{x}$, podemos determinar a função de transferência de um controlador dinâmico equivalente a partir das seguintes equações de estado e de saída:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \\ &= (A - LC)\hat{x} - BK\hat{x} + Ly, \\ &= (A - LC - BK)\hat{x} + Ly, \end{aligned}$$

$$u = -K\hat{x}.$$

A saída da planta y passa a ser a entrada de um **controlador baseado no estimador** ($\hat{x}$ representa o estado do controlador), enquanto que a saída do controlador corresponde à entrada da planta, u . Neste caso, a função de transferência do controlador dinâmico é dada por

$$C(s) = -K(sI - A + LC + BK)^{-1}L,$$

a qual fica completamente caracterizada após a obtenção dos ganhos de realimentação e de estimativa. A propriedade que nos garante ser possível determinar K e L independentemente recebe o nome de **Princípio da Separação**.

Aula 23

Realimentação de estados – comportamento servo

Controle proporcional

Controle integral

Controle proporcional

1. A realimentação linear de estados foi apresentada como uma técnica de projeto para se obter **comportamento regulador** do sistema de controle. Especificamente, dada a equação de estados de um sistema linear invariante no tempo a ser controlado,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

deseja-se transferir o sistema de uma condição inicial $x(0)$ qualquer para a origem do espaço de estados. O controle da haste de um pêndulo invertido na posição de equilíbrio vertical, caracterizada por $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $x = 0$ e $\dot{x} = 0$, é uma aplicação típica. Com a definição usual de variáveis de estado $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$ e $x_4 = \dot{x}$, e supondo que o sistema é levado inicialmente a uma condição $x(0) \neq 0$ pela ação de um distúrbio externo, por exemplo, o sistema de controle deve ser capaz de restaurar a posição de equilíbrio $x = 0$, o que basicamente envolve selecionar uma matriz de ganhos de realimentação K tal que todos os autovalores de $A - BK$ tenham partes reais negativas. Desta forma, o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

torna-se assintoticamente estável, isto é, $x(t) = e^{(A-BK)t}x(0)$ tende a zero quando t tende ao infinito, qualquer que seja a condição inicial $x(0)$.

2. A técnica de controle por realimentação de estados também pode ser utilizada para obter **comportamento servo**. Através de uma escolha adequada, é sempre possível definir a saída da planta como sendo uma das variáveis de estado. A Figura 23.1 ilustra o sistema de controle em malha fechada com realimentação de estados a ser empregado.

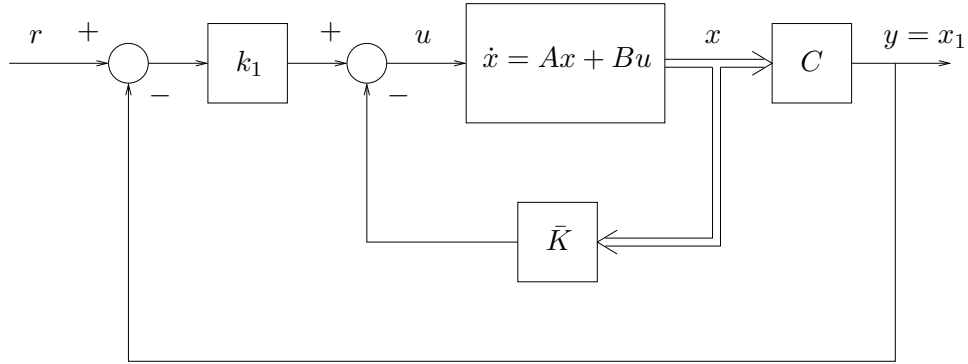


Figura 23.1: Realimentação de estados- controle proporcional.

Sem perda de generalidade, definimos $y_1 = x_1$, e supomos que a referência a ser seguida é $r(t) = r_0$, $t > 0$, uma função degrau de amplitude r_0 . A entrada de controle pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} u &= -\bar{K}x + k_1 e \\ &= -\bar{K}x + k_1(r - x_1), \end{aligned}$$

onde

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{bmatrix}.$$

A dinâmica do sistema em malha fechada para a referência degrau de amplitude r_0 aplicada no instante $t = 0$ é governada pela equação de estados

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_1 r,$$

cuja solução geral é

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) + \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} Bk_1 r_0 d\tau, \quad t \geq 0.$$

A matriz de ganhos de realimentação K é determinada de forma que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Com isso, o estado do sistema quando t tende ao infinito,

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(A-BK)t}x(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} Bk_1 r_0 d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{(A-BK)(t-\tau)} Bk_1 r_0 d\tau \end{aligned}$$

tende a um vetor constante. Consequentemente,

$$\dot{x}(\infty) = 0 = (A - BK)x(\infty) + Bk_1r(\infty), \quad r(\infty) = r_0.$$

Como por hipótese todos os autovalores de $A - BK$ possuem partes reais negativas, a matriz inversa de $A - BK$ existe¹. Podemos então calcular os valores de regime do vetor de estados,

$$x(\infty) = -(A - BK)^{-1}Bk_1r_0,$$

da entrada de controle,

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_1r_0,$$

e da saída da planta, $y(\infty) = x_1(\infty)$.

3. Exemplo. Considere a planta de segunda ordem definida por

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s + \alpha)(s + 1)} = \frac{1}{s^2 + (1 + \alpha)s + \alpha},$$

onde α é um parâmetro real. A representação do sistema na forma canônica controlável é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -(1 + \alpha) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

O polinômio característico de A é dado por

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= s^2 + (1 + \alpha)s + \alpha \\ &= s^2 + a_1s + a_0. \end{aligned}$$

Supondo que o objetivo seja alocar os dois pólos de malha fechada em -4 , o polinômio desejado fica sendo $p_c(s) = (s + 4)^2$; a matriz de ganhos K deve ser tal que

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= s^2 + 8s + 16 \\ &= s^2 + q_1s + q_0. \end{aligned}$$

¹Propriedade utilizada: uma matriz quadrada é invertível se e somente se todos os seus autovalores são diferentes de zero

Como o sistema se encontra na forma canônica controlável, os ganhos de realimentação são facilmente obtidos:

$$\begin{aligned}k_1 &= q_0 - a_0 = 16 - \alpha \\k_2 &= q_1 - a_1 = 7 - \alpha.\end{aligned}$$

Neste caso,

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A - BK)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores de regime dos estados são dados por

$$\begin{aligned}x(\infty) = \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \end{bmatrix} &= -(A - BK)^{-1} B k_1 r_0 \\&= -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (16 - \alpha) r_0 \\&= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\alpha}{16}\right) r_0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

O valor de regime da entrada de controle, após simplificações, assume a forma

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_1 r_0 = \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{16}\right) r_0.$$

Finalmente, o valor de regime da saída é dado por

$$y(\infty) = x_1(\infty) = \left(1 - \frac{\alpha}{16}\right) r_0.$$

Se $\alpha = 0$, então $y(\infty) = r_0$, indicando que saída do sistema passará a seguir a referência degrau de amplitude r_0 sem erro de regime. Nesta condição, $u(\infty) = 0$. Este resultado era previsível, uma vez que para $\alpha = 0$, o sistema possui um pólo na origem, e sistemas desse tipo (Tipo 1) não apresentam erros de regime para entradas constantes.

Controle integral

4. Como nem todo sistema a controlar possui um integrador natural que anule o erro de regime para entrada degrau, torna-se necessário incluí-lo adequadamente na malha de controle. A Figura 23.2 ilustra um sistema de controle em malha fechada com um bloco integrador no caminho direto entre a referência e a saída da planta.

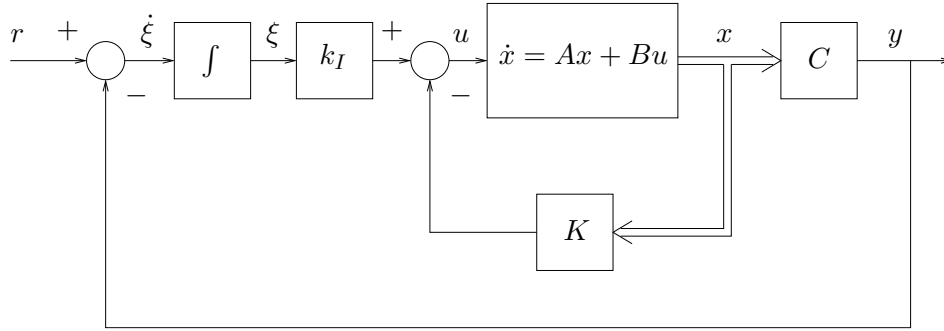


Figura 23.2: Realimentação de estados - controle integral.

A representação de estados associada ao sistema ilustrado na Figura 23.2 é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ \dot{\xi} &= r - y, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

onde $u = -Kx + K_I\xi$ e K_I é o chamado **ganho integral**, uma constante a ser determinada juntamente com K a partir das especificações de desempenho para o sistema em malha fechada. Como anteriormente, assuma que $r(t) = r_0$, $t > 0$.

5. As equações anteriores representam um **sistema aumentado**, uma vez que o vetor de estados foi acrescido da variável auxiliar ξ . Na forma matricial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r.$$

Dado que $u = -Kx + K_I\xi$, podemos reescrever a equação de estado na forma compacta

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r.$$

Defina

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

As dimensões de $\tilde{x}$, $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ são $(n+1)$, $(n+1) \times (n+1)$ e $(n+1) \times 1$, respectivamente. A equação de estado do sistema aumentado assume a forma matricial compacta

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r.$$

Supondo que os ganhos K e K_I possam ser escolhidos de tal forma que todos os autovalores de $\tilde{A}$ tenham partes reais negativas, então com argumentos similares aos utilizados no caso de controle proporcional, podemos mostrar que o estado do sistema aumentado,

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}r_0 d\tau, \quad t \geq 0.$$

atinge um valor constante $\tilde{x}(\infty)$ quando t tende ao infinito, o mesmo acontecendo com a entrada de controle, $u(\infty) = -Kx(\infty) + K_I\xi(\infty)$, e com a saída do sistema, $y(\infty) = Cx(\infty)$. Os valores de regime podem ser determinados a partir das equações de estados do sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\infty) &= 0 = Ax(\infty) + Bu(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) &= 0 = r_0 - Cx(\infty), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \end{bmatrix}.$$

Se a matriz à esquerda for não-singular, isto é, se $\text{rank}(\tilde{A}) = n+1$, então $x(\infty)$ e $u(\infty)$ serão calculados através de

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \end{bmatrix},$$

e como

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + K_I\xi(\infty),$$

obtém-se

$$\xi(\infty) = \frac{1}{K_I}[u(\infty) + Kx(\infty)].$$

A saída do sistema é $y(\infty) = Cx(\infty)$. O resultado que permite caracterizar os valores de regime do sistema em malha fechada na forma acima pode ser enunciado como segue.

Teorema. Se o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável e

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + 1,$$

então os autovalores de $\tilde{A}$ podem ser arbitrariamente alocados através de escolhas apropriadas de K e K_I .

6. Exemplo. Considere a planta de primeira ordem definida por

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.25}{s + 0.1}.$$

Uma representação do sistema na forma de estado é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -0.1x + 0.25u, \\ y &= x. \end{aligned}$$

Note que $n = 1$, $A = [-0.1]$, $B = [0.25]$ e $C = [1]$. O sistema em malha aberta é controlável e possui um pólo real em -0.1 . O sistema aumentado, de ordem $n + 1 = 2$, é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 - 0.25K & 0.25K_I \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r.$$

Como

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} -0.1 & 0.25 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

os autovalores do sistema aumentado podem ser arbitrariamente alocados através de K e K_I . Supondo que o objetivo seja alocar os dois pólos de malha fechada do sistema aumentado em -2 , o polinômio desejado fica sendo $p_c(s) = (s + 2)^2$; as constantes K e K_I devem ser tais que

$$\det(sI - \tilde{A}) = s^2 + 4s + 4,$$

onde

$$\begin{aligned}\det(sI - \tilde{A}) &= \det \left(\begin{bmatrix} s + (0.1 + 0.25K) & -0.25K_I \\ 1 & s \end{bmatrix} \right) \\ &= s^2 + (0.1 + 0.25K)s + 0.25K_I.\end{aligned}$$

Igualando os polinômios, obtém-se $K_I = 16$ e $K = [15.6]$. Os valores de regime do estado e da entrada são

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.25 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_0 \\ 0.4r_0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Note que como $y = x$, obtém-se $y(\infty) = x(\infty) = r_0$, e a saída segue a referência em regime – o controle puramente proporcional não produziria o mesmo resultado. O valor de regime do estado auxiliar ξ é dado por

$$\begin{aligned}\xi(\infty) &= \frac{1}{K_I} [u(\infty) + Kx(\infty)] \\ &= \frac{1}{16} [0.4r_0 + 15.6r_0] = r_0.\end{aligned}$$

Introdução ao Controle Digital

Controle digital
Conversor A/D
Conversor D/A
Controlador digital
Equações a diferenças
Funções de transferência discretas
Resposta temporal de sistemas discretos

Controle digital

1. Podemos definir **controle digital** como sendo o controle de sistemas dinâmicos na **forma amostrada** através de computadores digitais. A Figura 24.1 ilustra um sistema de controle em malha fechada no qual a função de controle é realizada por um controlador digital residente num processador digital de sinais.

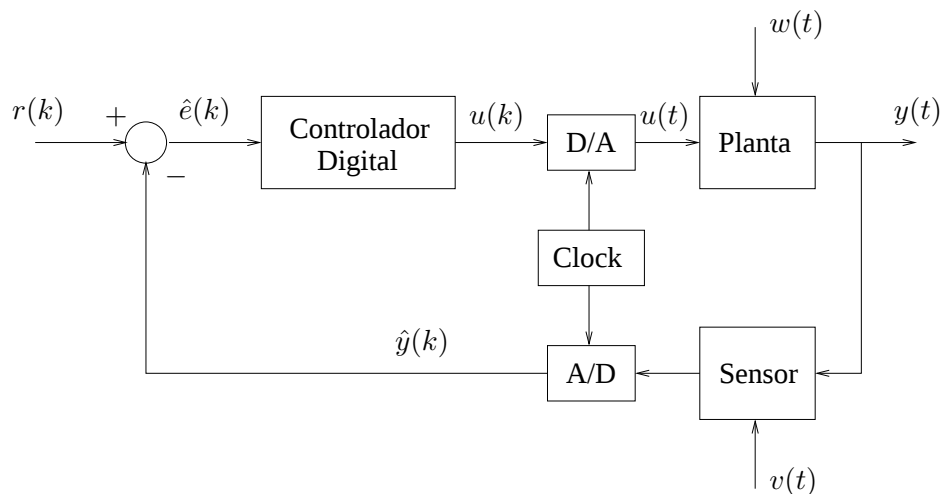


Figura 24.1: Sistema de controle com implementação digital.

2. No diagrama de blocos da Figura 24.1 coexistem dois tipos distintos de sinais:

sinais **contínuos** ou **analógicos**, representados por $u(t)$, $w(t)$, $y(t)$ e $v(t)$, e sinais **discretos** ou **amostrados**, representados por $r(k)$, $\hat{e}(k)$, $u(k)$ e $\hat{y}(k)$. O argumento k , que indica o instante de tempo no qual o valor da variável associada é representado, é uma abreviação para kT , onde T é o chamado **período de amostragem** do sistema. Os sinais discretos assumem valores apenas nos instantes $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$, ..., correspondentes a $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, ...

3. A saída do sistema no instante $t = kT$, medida pelo sensor, é submetida a um **conversor analógico-digital** (A/D); a saída do controlador, representado pelo computador digital, é submetida a um **conversor digital-analógico** (D/A), sendo as operações de conversão habilitadas por um sinal de *clock*. Em seguida, a saída do conversor A/D é comparada com o valor da referência no mesmo instante discreto de tempo, para gerar o erro a ser processado pelo computador digital. Assume-se que a soma dos tempos necessários às conversões e ao processamento pelo computador é pequena quando comparada ao período de amostragem T .

Conversor A/D

4. Um conversor A/D é basicamente um dispositivo eletrônico que transforma sinais analógicos em sinais **digitais**. A conversão A/D consiste de duas etapas. Na primeira é obtida a **amostra** do sinal analógico através de um **circuito amostrador**. Para que o sinal analógico seja adequadamente representado, a taxa de amostragem a ser utilizada deve ser de pelo menos duas vezes a faixa de passagem do sinal analógico, a chamada **frequência de Nyquist**.

5. Na segunda etapa do processo de conversão A/D, o valor da amostra é representado por um número binário, digital. A Figura 24.2 ilustra o processo de digitalização do sinal amostrado. O **nível de quantização** do sinal depende do número de *bits* utilizados pelo conversor. Exemplo: um conversor de 4 bits permite quantizar o valor do sinal amostrado em $2^4 = 16$ níveis distintos. Se o sinal amostrado variar de 0 a M volts, então o sinal digital poderá assumir os valores 0, $M/16$, $2M/16$, ..., até $15M/16$, representados pelos números binários 0000, 0001, 0010, ..., até 1111.

6. Assumindo que o processo de digitalização aproxima as tensões analógicas para os níveis de quantização mais próximos, superiores ou inferiores, o erro máximo introduzido pelo processo será de metade da diferença entre níveis de quantização. Para um conversor de 4 bits, o erro máximo de quantização é $M/32$. Como o custo de um conversor A/D é inversamente proporcional ao nível de quantização produ-

zido, torna-se necessário estabelecer uma relação de compromisso entre precisão desejada e custo.

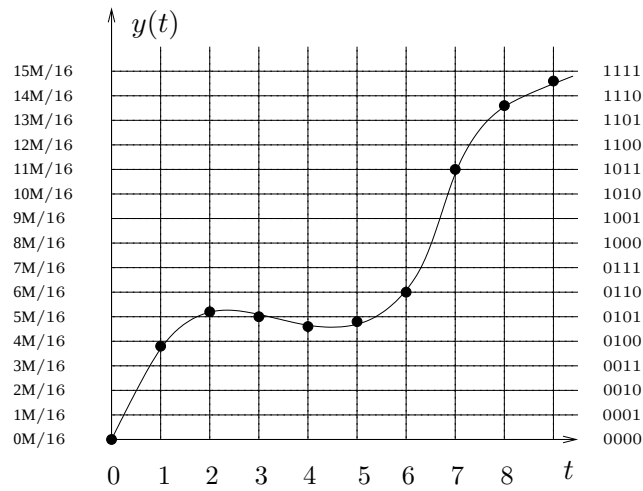


Figura 24.2: Amostragem e digitalização do sinal analógico.

Conversor D/A

7. O conversor D/A transforma sinais digitais em sinais analógicos. A Figura 24.3 ilustra um processo de conversão digital-analógica que utiliza o chamado **segurador de ordem zero** – SOZ.

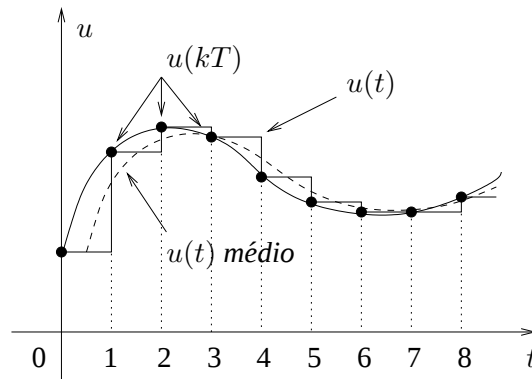


Figura 24.3: Conversão D/A com SOZ.

O valor $u(kT)$ é **segurado** (mantido na saída do conversor) pelo período de amostragem T , até que a chegada da próxima amostra $u[(k+1)T]$, quando então o processo é repetido. O resultado final é um sinal contínuo $u(t)$ **constante por partes**. O sinal $u(t)$ atrasa $u(kT)$, em média, $T/2$ segundos. O atraso diminui ao se reduzir o período T , mas o custo do circuito amostrador aumenta.

Controlador digital

8. O controlador digital indicado na Figura 24.1 pode ser visto como um programa executável contendo instruções descritas numa linguagem de programação que suporte aplicações em tempo real. Essas instruções descrevem como o sinal digital de controle $u(k)$ deve ser computado a partir do sinal de erro $\hat{e}(k)$. O controlador digital pode estar *hospedado* num mini ou micro-computador, ou mesmo num microprocessador integrado num único *chip*. Para fins de ilustração, considere um controlador contínuo do tipo PID,

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(t),$$

onde k_P , k_I e k_D são os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador, por hipótese conhecidos. No instante $t = kT$, obtém-se

$$\begin{aligned} u(kT) &= k_P e(kT) + k_I \int_0^{kT} e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(kT), \\ &\simeq k_P e(kT) + k_I T \sum_{i=0}^{k-1} e(iT) + k_D \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T}. \end{aligned}$$

onde a integral do erro foi aproximada através de **integração retangular** e a derivada do erro através da **regra de Euler**. Subtraindo-se $u(kT)$ e

$$\begin{aligned} u[(k-1)T] &= k_P e[(k-1)T] + \\ &\quad k_I T \sum_{i=0}^{k-2} e(iT) + k_D \frac{e[(k-1)T] - e[(k-2)T]}{T}, \end{aligned}$$

obtém-se a seguinte recorrência para o sinal de controle:

$$\begin{aligned} u(kT) &= u[(k-1)T] + k_P (e(kT) - e[(k-1)T]) + \\ &\quad k_I T e[(k-1)T] + k_D \frac{e(kT) - 2e[(k-1)T] + e[(k-2)T]}{T}. \end{aligned}$$

Apenas o valor do controle no instante $(k-1)T$ e os valores do erro nos instantes $(k-2)T$, $(k-1)T$ e kT são necessários. A recorrência acima é facilmente codificada em qualquer linguagem de programação que suporte aplicações em tempo real. A Figura 24.4 apresenta uma possível codificação do controlador PID digitalizado através da linguagem de programação disponível no Laboratório de Controle e Servomecanismos da FEEC. O programa começa com as definições de variáveis e parâmetros e prossegue com as inicializações necessárias. A parte do programa delimitada por `begin` e `end` é executada a cada T segundos. Note a existência das variáveis com nomes reservados `cmdpos` e `encpos`, através das quais o programa tem acesso aos valores da referência e da saída da planta, e `controleffort`, que representa o valor da variável de controle – a saída do programa.

```
; Definicoes
#define T      q1
#define kP     q2
#define kI     q3
#define kD     q4
#define ukm1   q5
#define ek     q7
#define ekm1   q8
#define ekm2   q9
; Inicializacoes
T=0.000884
kP=1.72
kI=8
kD=0.065
ukm1=0
ekm2=0
ekm1=0
uk=0
; Loop
begin
ek=cmdpos-encpos
controleffort=ukm1+kP*(ek-ekm1)+kI*T*ekm1
               +kD*(ek-2*ekm1+ekm2)/T
ukm1=controleffort
ekm2=ekm1
ekm1=ek
end
```

Figura 24.4: Controlador PID digital codificado.

Equações a diferenças

9. O controlador PID digital discutido na seção anterior foi obtido através da discretização do controlador contínuo. Sistemas obtidos dessa forma são chamados de sistemas discretizados. Existe entretanto um classe de sistemas que são inerentemente discretos. Considere por exemplo o sistema que descreve como o saldo de uma conta corrente evolui ao longo do tempo. Se $y(k)$ representa o saldo da conta e $u(k)$ a diferença entre o que foi depositado e o que foi retirado da conta no mês k , então

$$y(k+1) = y(k) + u(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Qualquer sistema discreto ou discretizado linear e invariante no tempo cuja saída no instante k depende de n valores passados da saída e m valores passados da entrada, pode ser representado por uma **equação a diferenças** da forma

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_ny(k-n) + b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_mu(k-m)$$

onde $y(k)$ e $u(k)$ denotam saída e entrada, respectivamente, e $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ são os parâmetros constantes do sistema.

Funções de transferência discretas

10. A análise e a síntese de sistemas discretos no tempo podem ser sistematizadas e tornadas operacionalmente mais simples quando se utiliza a **Transformada $\mathcal{Z}$** (discreta), do mesmo modo que a transformada de Laplace empresta simplicidade ao estudo de sistemas contínuos no tempo. Se $f(t)$ é uma função que admite transformada de Laplace e $f(t) = 0$ para todo $t < 0$, então

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Supondo que a n -ésima derivada de $f(t)$ possui transformada de Laplace, então com condições iniciais nulas, obtém-se

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s),$$

que é a propriedade fundamental por trás da obtenção de funções de transferência de sistemas contínuos.

11. A transformada $\mathcal{Z}$ de um sinal discreto no tempo $f(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ tal que $f(k) = 0$ para todo inteiro $k < 0$ é definida como

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}.$$

Em particular, a transformada $\mathcal{Z}$ do sinal $f(k - n)$ pode ser calculada da seguinte forma: se $l = k - n$, então $k = l + n$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k - n)] &= \sum_{l=0}^{\infty} f(l)z^{-(l+n)} \\ &= z^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} f(l)z^{-l} \\ &= z^{-n} F(z). \end{aligned}$$

12. A propriedade $\mathcal{Z}[f(k - n)]$ é essencial para se obter **funções de transferência discretas** a partir de equações a diferenças. A função de transferência do sistema discreto genérico da seção anterior é obtida aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ a ambos os lados da equação:

$$\begin{aligned} Y(z) &= -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \dots - a_n z^{-n} Y(z) + \\ &\quad + b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z). \end{aligned}$$

A função de transferência discreta do sistema é definida por

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}.$$

Se $n \geq m$ então é possível representar $P(z)$ como a seguinte razão de polinômios na variável z :

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}.$$

Caso não hajam raízes comuns, os zeros dos polinômios numerador e denominador de $P(z)$ são os zeros e os pólos de $P(z)$, respectivamente.

Resposta temporal de sistemas discretos

13. A resposta temporal de um determinado sistema discreto a uma dada entrada pode ser obtida através da equação a diferenças que o descreve. Entretanto, com esse procedimento obtemos apenas os valores da saída instante-a-instante, e não uma expressão analítica que descreva a saída em qualquer instante discreto de tempo. Além disso, gostaríamos de conhecer o valor final da saída, caso esse valor exista. A resposta temporal de sistemas discretos pode ser eficientemente caracterizada através do conceito de função de transferência discreta.

14. O procedimento para obter a resposta temporal de um sistema modelado pela função de transferência discreta $P(z) = Y(z)/U(z)$ pode ser resumido como segue:

1. Obtenha a transformada $\mathcal{Z}$ da entrada $u(k)$;
2. Obtenha a transformada $\mathcal{Z}$ da saída, $Y(z) = P(z)U(z)$;
3. A transformada $Y(z)$ é tipicamente uma função racional – razão de polinômios – na variável z . Fatore $Y(z)$ numa soma de frações parciais com anti-transformadas $\mathcal{Z}$ conhecidas;
4. A resposta temporal do sistema, $y(k)$, será a soma das anti-transformadas das frações parciais de $Y(z)$.

Os dois últimos passos são normalmente conduzidos com o auxílio de uma **tabela de anti-transformadas $\mathcal{Z}$** .

15. **Exemplo.** Considere a equação a diferenças que descreve a evolução do saldo de uma conta corrente, modelada anteriormente como $y(k+1) = y(k) + u(k)$. A função de transferência do sistema é

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z-1}.$$

Desejamos conhecer o saldo da conta em qualquer instante discreto de tempo k , dado que mensalmente a conta recebe recursos líquidos no montante de r reais. Neste caso, $u(k) = r_0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Consultando uma tabela de transformadas $\mathcal{Z}$, obtemos $U(z) = r_0 z / (z-1)$. A transformada $\mathcal{Z}$ da saída é

$$Y(z) = P(z)U(z) = \frac{r_0 z}{(z-1)^2}.$$

No presente caso não é necessário empregar o processo de fatoração porque $Y(z)$ possui uma anti-transformada tabelada, a qual fornece $y(k) = r_0 k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

O resultado final indica que o saldo da conta cresce (decresce) linearmente quando a movimentação da conta (constante) é positiva (negativa).

16. Seja $Y(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de um sinal qualquer $y(k)$ que possui um valor final $y(\infty)$ quando $k \rightarrow \infty$. Este valor pode ser calculado utilizando-se a versão discreta do Teorema do Valor Final empregado para sistemas contínuos. Se todos os pólos de $(1 - z^{-1})Y(z)$ se encontrarem no interior do **círculo de raio unitário**, isto é, possuírem módulos menores do que 1, então

$$y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z).$$

17. **Exemplo.** Considere a saída $Y(z) = r_0 z / (z - 1)^2$ obtida no exemplo anterior. Como

$$(1 - z^{-1})Y(z) = \frac{z - 1}{z} \frac{r_0 z}{(z - 1)^2} = \frac{r_0}{z - 1}$$

não satisfaz a hipótese formulada, não é possível calcular o valor final de $y(k)$. (Note que $y(k) = r_0 k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ não possui valor final para $r_0 \neq 0$). Por outro lado, um sinal $y(k)$ tal que

$$Y(z) = \frac{z(z + 1)}{(z - 0.5)(z - 1)}$$

satisfaz a hipótese e seu valor final é

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} \frac{z(z + 1)}{(z - 0.5)(z - 1)} = 4. \end{aligned}$$

Aula 25

Introdução ao Controle Digital

Estabilidade entrada-saída

Mapeamento Plano s – Plano z

Estabilidade entrada-saída

1. Dizemos que um sistema é estável do ponto de vista entrada-saída se a resposta do sistema a qualquer entrada limitada é também limitada. De forma a caracterizar a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares discretos e invariantes no tempo, seja $G(z)$ uma função de transferência discreta de um sistema qualquer. A transformada $\mathcal{Z}$ da função **pulso unitário**, definida como $u(k) = 1$ se $k = 0$ e $u(k) = 0$ para $k \neq 0$, é

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} = 1.$$

Como a resposta de $G(z)$ à entrada pulso unitário é $Y(z) = G(z)U(z) = G(z)$, podemos obter $G(z)$ experimentalmente submetendo o sistema que a função representa a uma entrada pulso unitário e coletando as amostras $g(0)$, $g(1)$, $\dots$, $g(k)$, $\dots$, e então calculando a transformada $\mathcal{Z}$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k}.$$

A resposta do sistema a uma entrada $u(k)$ qualquer é $Y(z) = G(z)U(z)$, ou em termos da definição de transformada $\mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j)z^{-k}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$y(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j).$$

A resposta do sistema no instante k é igual à convolução discreta entre a entrada e a resposta ao impulso do sistema. Se a entrada $u(k)$ for limitada, significando que existe um $M < \infty$ tal que $|u(k)| < M$ para todo k , então

$$\begin{aligned} |y(k)| &= \left| \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^k |g(k-j)||u(j)| \\ &\leq M \sum_{j=0}^k |g(k-j)|, \end{aligned}$$

e se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$$

a saída será também limitada.

Teorema. Seja $g(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ a resposta ao impulso de um sistema linear discreto invariante no tempo e $G(z)$ a função de transferência discreta associada. Então

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$$

se e somente se todos os pólos de $G(z)$ possuem módulos estritamente menores do que 1.

Assim, o sistema representado por $G(z)$ é estável se e somente se todos os pólos de $G(z)$ possuem módulos estritamente menores do que 1. O sistema será instável caso algum pólo possua módulo maior do que 1; marginalmente estável caso todos os pólos possuam módulos menores ou iguais a 1.

Exemplo. Considere o sistema modelado pela função de transferência discreta

$$G_1(z) = \frac{10(z - 0.4)}{z(z - 0.1)(z - 0.8)}.$$

Como todos os pólos do sistema possuem módulos menores do que 1, o sistema é estável. Os sistemas

$$G_2(z) = \frac{z}{(z - 1.5)(z - 0.8)}$$

e

$$G_3(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z^2-z+0.5)} = \frac{z+1}{(z-1)(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5)}$$

não são estáveis, o primeiro porque possui um pólo maior do que 1, o segundo porque um pólo possui módulo igual a 1 (marginalmente estável).

2. A estabilidade absoluta de sistemas discretos no tempo representados por funções de transferência pode ser analisada através de um procedimento conhecido como **Crítério de Jury**, similar ao Critério de Routh-Hurwitz para sistemas contínuos no tempo. Assim como o critério de Routh-Hurwitz, o critério de Jury é baseado na construção de uma tabela associada ao polinômio característico do sistema discreto – denominador de $G(z)$. Uma regra simples determina se todas as raízes possuem módulos estritamente menores do que 1.

Mapeamento Plano s – Plano z

3. Várias características importantes de sistemas contínuos no tempo modelados por funções de transferência podem ser associadas às localizações de seus pólos e zeros no plano complexo s . A questão da estabilidade, por exemplo pode ser respondida a partir da localização dos pólos do sistema relativamente ao eixo imaginário. Neste ponto torna-se conveniente estabelecer um mapeamento entre pontos no plano s e pontos no plano $\text{Re } z \times \text{Im } z$, a ser referido como **plano complexo z** . O mapeamento é definido por

$$z = e^{sT},$$

onde T representa o período de amostragem referido anteriormente. A frequência de amostragem associada é $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$ rad/s.

4. A região do Plano s indicada na Figura 25.1, na qual a frequência ω varia de $-\omega_s/2$ a $\omega_s/2$, é chamada de **faixa primária**. As faixas complementares seriam de $\omega_s/2$ a $3\omega_s/2$, de $-\omega_s/2$ a $-3\omega_s/2$, e assim sucessivamente. Denotando $s = \sigma + j\omega$, obtém-se

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}.$$

Logo, $|z| = e^{\sigma T}$ e $\angle z = \omega T$. O mapeamento da faixa primária do plano s no plano z é indicado na Figura 25.2. O mapeamento dos pontos críticos para o mapeamento, A, B, C, D, E, é indicado na Tabela 25.1.

5. Se um dado ponto s pertence a uma faixa complementar, então s pode ser escrito como $s = s_1 + jn\omega_s$, onde s_1 pertence à faixa primária e n é um número inteiro. A imagem do ponto s_1 no plano z é $z_1 = e^{s_1 T}$; a imagem de $s = s_1 + jn\omega_s$ é

$$z = e^{sT} = e^{(s_1 + jn\omega_s)T} = e^{s_1 T} e^{jn\omega_s T} = e^{s_1 T} e^{j2n\pi} = e^{s_1 T} = z_1.$$

Concluimos então que os pontos nas faixas complementares são mapeados **sobre** os mapeamentos dos pontos da faixa primária. Exemplo: $s_1 = 1 + \omega_s/2$ e $s_2 = 1 + 3\omega_s/2$ são mapeados no mesmo ponto do plano z .

Tabela 25.1: Mapeamento de pontos críticos.

	Res	Im s	Re z	Im z
A	0	0	1	0
B	0	$\omega_s/2$	-1	0
C	$-\infty$	$\omega_s/2$	0	0
D	$-\infty$	$-\omega_s/2$	0	0
E	0	$-\omega_s/2$	-1	0

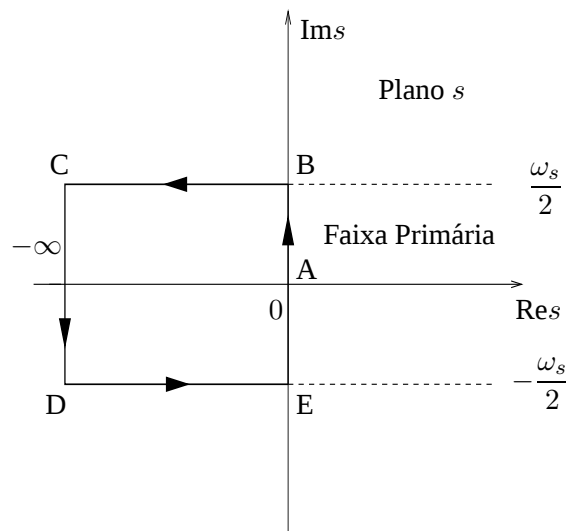
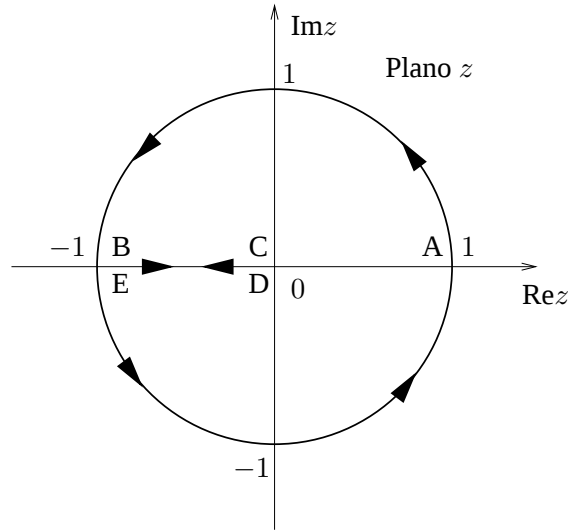


Figura 25.1: Plano s – faixa primária.

Figura 25.2: Plano z – círculo unitário.

6. Dos resultados anteriores podemos afirmar que:

1. Pontos no semi-plano esquerdo do plano s ($\sigma < 0$) são mapeados no plano z no interior do círculo de raio unitário ($|z| < 1$);
2. Pontos no semi-plano direito do plano s ($\sigma > 0$) são mapeados no plano z fora do círculo de raio unitário ($|z| > 1$);
3. Pontos sobre o eixo imaginário do plano s ($\sigma = 0$) são mapeados no plano z na circunferência de raio unitário ($|z| = 1$).

7. As características da resposta temporal de um sistema contínuo no tempo estão intrinsecamente associadas à região do plano s na qual seus zeros e pólos se encontram. Índices de desempenho relativos à resposta ao degrau do sistema, como máxima sobre-elevação, tempo de subida e tempo de acomodação, entre outros, dependem fundamentalmente do fator de amortecimento (ξ) e da frequência natural dos pólos dominantes do sistema. O mapeamento de pontos do plano s com ξ ou ω_n constante nos permitirá prever qual o tipo de resposta a ser apresentada por um sistema discreto no tempo a partir do conhecimento dos zeros e pólos da função de transferência discreta.

8. **Parte real constante.** Pontos com parte real constante são representados por $s = \sigma + j\omega$, onde σ é um valor constante e $-\infty < \omega < +\infty$. No plano s a região

assim descrita é uma linha paralela ao eixo imaginário. No plano z obtém-se um círculo de raio $z = e^{\sigma T}$, interior ou exterior ao círculo de raio unitário conforme $\sigma < 0$ ou $\sigma > 0$, como ilustra a Figura 25.3. Note que à variação de ω de $-\infty$ a $+\infty$ corresponde infinitas voltas sobre a circunferência de raio $z = e^{\sigma T}$.

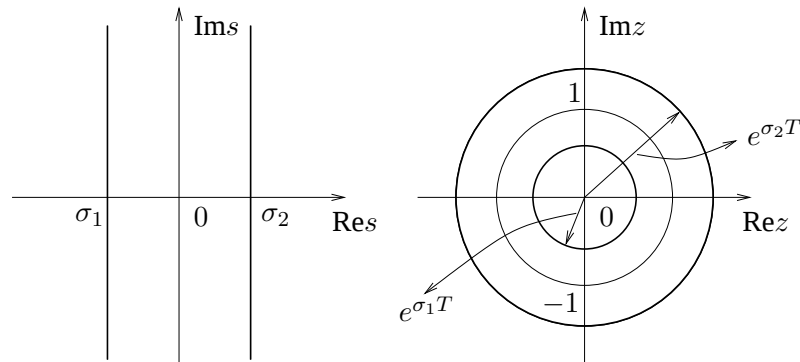


Figura 25.3: Parte real constante.

9. Parte imaginária constante. Pontos com parte imaginária constante são representados por $s = \sigma + j\omega$, onde $-\infty < \sigma < \infty$ e ω é um valor constante. No plano z a região assim determinada é uma linha radial, pois o módulo de $z = e^{sT}$ varia de 0 a ∞ e o ângulo permanece constante. Exemplo: às frequências $\omega_s/2$ e $-\omega_s/8$ correspondem ângulos de 180° e -45° , respectivamente, como indicado na Figura 25.4.

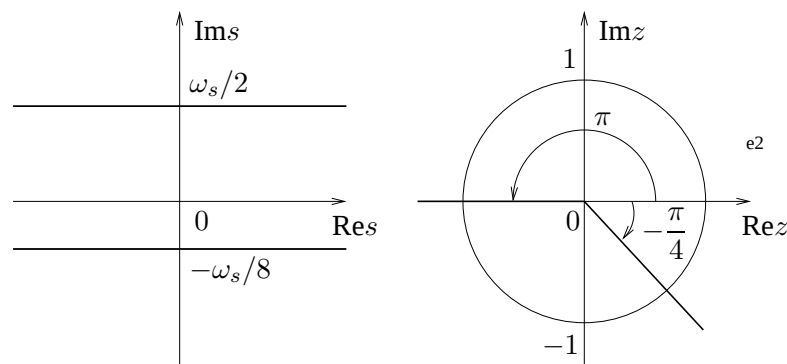


Figura 25.4: Parte imaginária constante.

10. Fator de amortecimento constante. Para analisar o mapeamento da região correspondente a fator de amortecimento constante e frequência natural variável, considere a seguinte representação para pontos com fator de amortecimento constante:

$$s = -\xi\omega + j\omega, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty,$$

onde $\xi = \cos \theta$. O mapeamento de s no plano z é

$$\begin{aligned} z = e^{sT} &= e^{(-\xi\omega + j\omega)T} = e^{-\xi\omega_n T} e^{j\omega T} \quad (T = 2\pi/\omega_s) \\ &= e^{-2\pi\xi/\omega_s} e^{j2\pi\omega/\omega_s} \\ &= e^{-2\pi\xi/\omega_s} \angle 2\pi\omega/\omega_s. \end{aligned}$$

Os lugares geométricos no plano z associados a ξ constantes são curvas espiraladas, simétricas em relação ao eixo real, exceto quando $\xi = 0$ ($\theta = 90^\circ$) e $\xi = 1$ ($\theta = 0^\circ$). A Figura 25.5 ilustra o mapeamento de pontos de fator de amortecimento constante para frequências na faixa $0 \leq \omega \leq \omega_s/2$. As curvas relativas a $-\omega_s/2 \leq \omega \leq 0$ são simétricas em relação às curvas indicadas.

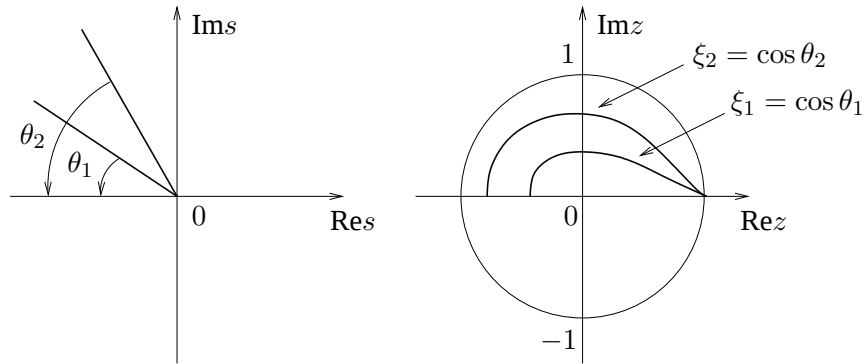


Figura 25.5: Fator de amortecimento constante.

11. Frequência natural constante. O mapeamento no plano z da região correspondente a frequência natural constante no plano s – semi-círculos concêntricos de raio ω_n com $\sigma < 0$ – são curvas como as ilustradas na Figura 25.6. As curvas relativas aos semi-círculos com $\sigma > 0$ são simétricas em relação às curvas indicadas.

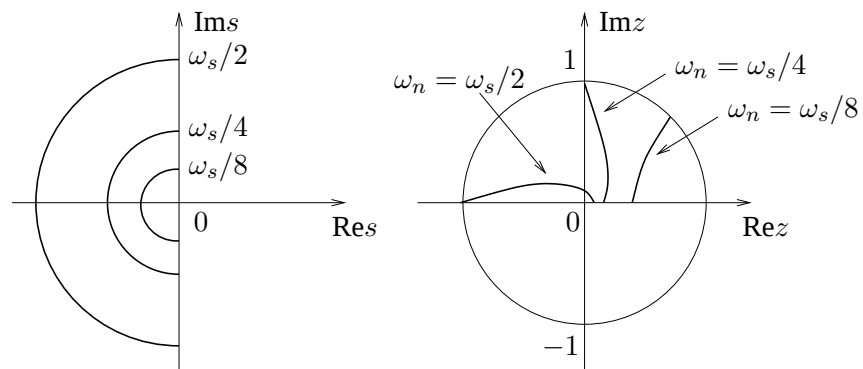


Figura 25.6: Frequência natural constante.

Introdução ao Controle Digital

Amostragem de sistemas contínuos

Diagramas de blocos

Especificações de desempenho

Amostragem de sistemas contínuos

1. Considere o sistema de controle com implementação digital ilustrado na Figura 26.1. O objetivo central ao abordar esse tipo de sistema é determinar a função de transferência discreta $C(z)$, que exerce a função de controlador digital, de forma que as especificações de desempenho para o sistema em malha fechada sejam atendidas. (Uma vez determinada a função $C(z)$, podemos obter a equação a diferenças associada e implementá-la usando uma linguagem de programação que suporte aplicações em tempo real.) Como a planta a ser controlada é descrita por uma função de transferência em s , com entrada e saída no tempo contínuo t , torna-se conveniente amostrá-la e em seguida obter sua função de transferência discreta.

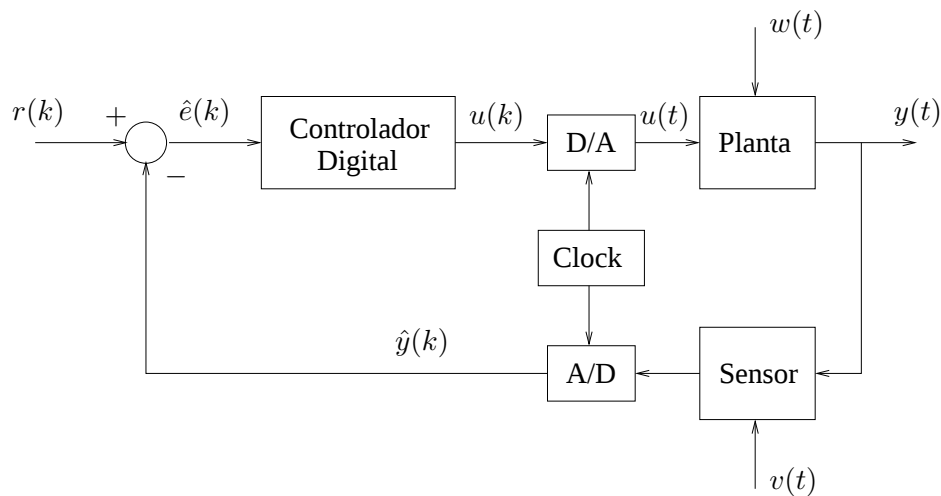


Figura 26.1: Sistema de controle com implementação digital.

2. Uma representação amostrada da planta será obtida a partir das seguintes hipóteses:

Realimentação unitária: um eventual ganho na malha de realimentação é incorporado à planta ou ao controlador;

Conversão D/A: o conversor D/A converte o sinal digital em analógico usando um segurador de ordem zero (SOZ);

Conversão A/D: o tempo de amostragem – não confundir com período – e o nível de quantização do sinal analógico são suficientemente pequenos para que a saída do conversor A/D possa ser aproximada por $y(kT)$, a saída da planta no tempo $t = kT$.

3. O objetivo passa a ser determinar a função de transferência entre $u(kT)$ e $y(kT)$, dada a função de transferência contínua da planta, $P(s)$, como ilustra a Figura 26.2.

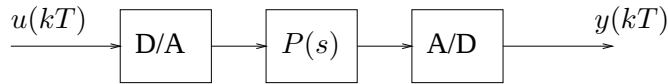


Figura 26.2: Diagrama para obtenção de $P(z)$.

A função de transferência discreta desejada é obtida supondo-se que a entrada $u(kT)$ é um pulso unitário: $u(kT) = 1$ para $k = 0$ e $u(kT) = 0$ para $k \neq 0$. A saída do conversor D/A para uma entrada deste tipo é como ilustrada na Figura 26.3.

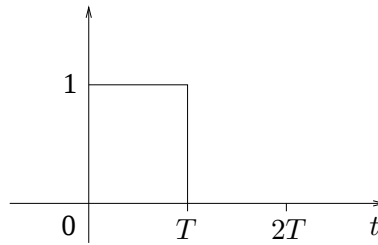


Figura 26.3: Resposta do conversor D/A ao pulso unitário.

4. A resposta do conversor D/A ao pulso unitário pode ser expressa como $\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T)$, onde $\mathbf{1}(t)$ denota a função degrau unitário (contínua). A resposta de $P(s)$

a esta entrada particular é

$$\begin{aligned} Y(s) &= P(s) \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right] \\ &= (1 - e^{-Ts}) \frac{P(s)}{s}. \end{aligned}$$

Por definição, a função de transferência de $u(kT)$ para $y(kT)$ é a transformada $\mathcal{Z}$ da resposta ao pulso unitário:

$$P(z) = \mathcal{Z} [y(kT)],$$

onde $y(kT) = y(t)|_{t=kT}$ (amostragem) e $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$. Usaremos a notação

$$P(z) = \mathcal{Z} \left[(1 - e^{-Ts}) \frac{P(s)}{s} \right]$$

para representar o processo de anti-transformar $Y(s) = (1 - e^{-Ts})P(s)/s$ para obter $y(t)$, amostrar $y(t)$ para obter $y(kT)$ e calcular a transformada $\mathcal{Z}$ de $y(kT)$ (a resposta ao pulso unitário do sistema) para obter $P(z)$. Como e^{-Ts} representa um atraso de T s, verifica-se que

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s} \right].$$

5. Na prática a função de transferência discreta $P(z)$ é obtida com o auxílio de uma tabela de transformadas através do seguinte procedimento: dado $P(s)$,

1. Expanda $P(s)/s$ em frações parciais, de tal forma que os termos individuais da expansão apareçam na tabela de transformadas;
2. Usando a tabela, encontre as transformadas $\mathcal{Z}$ dos termos individuais determinados no item 1;
3. Multiplique a soma dos termos em z determinados no item 2 por $(1 - z^{-1})$. O resultado é a função de transferência discreta $P(z)$.

6. **Exemplo.** Considere

$$P(s) = \frac{a}{s + a}.$$

Então

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{a}{s(s + a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a}.$$

Note que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right] = \mathbf{1}(t) - e^{-at} \mathbf{1}(t).$$

A resposta amostrada seria $\mathbf{1}(kT) - e^{-akT} \mathbf{1}(kT)$. A função de transferência discreta correspondente é

$$\begin{aligned} P(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right) \\ &= \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})} \\ &= \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}. \end{aligned}$$

O sistema descrito por $P(z)$ é estável do ponto de vista entrada-saída se $a > 0$, pois neste caso $0 < e^{-aT} < 1$.

7. Exemplo. Considere

$$P(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}.$$

Então

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{a^2}{s(s+a)^2},$$

e

$$\mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s} \right] = \frac{z[z(1-c-acT) + c^2 - c + acT]}{(z-1)(z-c)^2},$$

onde $c = e^{-aT}$. A função de transferência discreta é dada por

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(\frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \\ &= \frac{z(1-c-acT) + c^2 - c + acT}{(z-c)^2}. \end{aligned}$$

O sistema descrito por $P(z)$ é estável do ponto de vista entrada-saída se $a > 0$, pois neste caso $0 < c < 1$.

Diagramas de blocos

7. Uma vez determinada a função de transferência discreta associada à planta a ser controlada, o sistema de controle em malha fechada pode ser representado de forma equivalente como ilustrado na Figura 26.4. (Eventuais distúrbios agindo na planta e no sensor não estão explicitamente representados.)

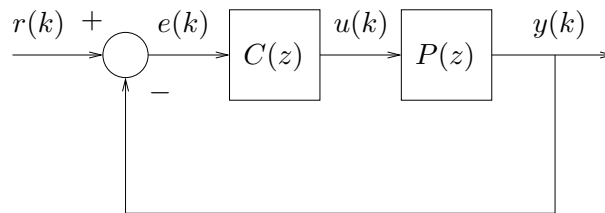


Figura 26.4: Diagrama de blocos equivalente.

8. As regras para manipulação e simplificação de diagramas de blocos descritos por funções de transferência na variável complexa z são rigorosamente as mesmas utilizadas para diagramas descritos na variável s . Em particular, tendo em vista o diagrama de blocos da Figura 26.4, a função de transferência de malha fechada entre a entrada de referência $r(k)$ e a saída da planta $y(k)$ é dada por

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)}.$$

A equação característica do sistema discreto é

$$1 + C(z)P(z) = 0$$

e $C(z)P(z)$ é o ganho de malha associado. O erro de rastreamento do sinal de referência pode ser determinado através de

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + C(z)P(z)}.$$

Especificações de desempenho

9. Como no caso contínuo, a primeira especificação de desempenho a ser atendida, sem a qual nenhuma das outras é possível, é que o sistema de controle em malha

fechada seja estável. Se representarmos a função de transferência de malha fechada na forma

$$T(z) = \frac{N_T(z)}{D_T(z)} = \frac{N_C(z)N_P(z)}{D_C(z)D_P(z) + N_C(z)N_P(z)},$$

onde ' N ' e ' D ' denotam numerador e denominador das funções de transferência envolvidas, e assumirmos que $N_T(s) = 0$ e $D_T(s) = 0$ não possuem raízes comuns, então os zeros e os pólos de $T(z)$ são as raízes de $N_C(z)N_P(z) = 0$ e $D_C(z)D_P(z) + N_C(z)N_P(z) = 0$, respectivamente. Para garantir a estabilidade do sistema discreto em malha fechada devemos selecionar um controlador $C(z)$ tal que todas as raízes de

$$D_T(z) = D_C(z)D_P(z) + N_C(z)N_P(z) = 0$$

tenham módulos estritamente menores do que 1.

10. Assumindo que $C(z)$ é tal que o sistema em malha fechada seja estável, podemos passar a caracterizar os erros de regime do sistema para determinadas entradas-padrão. Supondo que exista, isto é, seja finito, o erro de regime para uma dada entrada $r(k)$ é calculado através do Teorema do Valor Final relativo a sinais discretos no tempo:

$$e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + C(z)P(z)}.$$

Em analogia com o caso de sistemas contínuos no tempo, dizemos que o sistema discreto no tempo é do **Tipo** N se a função de transferência de malha aberta $C(z)P(z)$ possui N pólos em $z = 1$.

12. **Resposta ao degrau unitário.** A função degrau unitário discreta é definida por $r(kT) = 1$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Como sua transformada $\mathcal{Z}$ é $R(z) = z/(z - 1)$, o erro de regime para essa entrada é

$$\begin{aligned} e_d &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + C(z)P(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z - 1}{z} \right) \frac{\frac{z}{z - 1}}{1 + C(z)P(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + C(z)P(z)} \\ &= \frac{1}{1 + k_p}, \end{aligned}$$

onde, como no caso contínuo,

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} C(z)P(z)$$

é a constante de posição do sistema. Se $N = 0$ (nenhum pólo em $z = 1$), então k_p é uma constante, assim como e_d . Se $N \geq 1$, então $k_p = \infty$ e $e_d = 0$.

13. Resposta à rampa unitária. A função rampa unitária discreta é definida por $r(kT) = kT$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Sua transformada $\mathcal{Z}$ é $R(z) = Tz/(z-1)^2$; o erro de regime do sistema para essa entrada é

$$\begin{aligned} e_r &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + C(z)P(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{\frac{Tz}{(z-1)^2}}{1 + C(z)P(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)[1 + C(z)P(z)]} \\ &= \frac{1}{k_v}, \end{aligned}$$

e de forma similar

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)C(z)P(z)}{T}$$

é a constante de velocidade do sistema. Se $N = 0$, então $k_v = 0$ e $e_r = \infty$. Se $N = 1$, então k_v é uma constante, assim como e_r . Se $N \geq 2$, obtém-se $k_v = \infty$ e $e_r = 0$. O procedimento pode ser estendido para entradas de ordens maiores. Genericamente, para que o erro de regime relativo a uma entrada de ordem n seja nulo é necessário que o ganho de malha $C(z)P(z)$ possua pelo menos n pólos em $z = 1$.

14. Uma técnica frequentemente empregada no projeto de sistemas de controle consiste em selecionar uma função de transferência para o controlador de forma que o sistema em malha fechada possua um par de pólos dominantes complexos conjugados. A técnica é motivada pelo fato de sabermos expressar índices de desempenho típicos da resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem, como máxima sobre-elevação percentual, M_p , tempo de subida, t_r , e tempo de acomodação, t_s , em termos de fator de amortecimento, ξ , e frequência natural, ω_n . Especificamente, a máxima sobre-elevação percentual é dada por

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100, \quad (0 \leq \xi < 1)$$

o tempo de subida, necessário para que a resposta vá de 10% a 90% do valor de regime, por

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n},$$

e o tempo de acomodação da resposta numa faixa de 2% do valor de regime, por

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}.$$

15. A partir do mapeamento plano s – plano z , função do período de amostragem do sistema, T , é possível associar pontos no plano z com as características desejadas de resposta em termos de M_p , t_r e t_s . Suponha por exemplo que $\bar{M}_p$, $\bar{t}_r$ e $\bar{t}_s$ sejam, respectivamente, os valores máximos admitidos para sobre-elevação, tempo de subida e tempo de acomodação do sistema, e que se deseja determinar a região do plano z correspondente. As especificações são atendidas com $\xi \geq \bar{\xi}$, onde $\bar{\xi}$ é tal que $M_p = \bar{M}_p$,

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{\bar{t}_r} = \bar{\omega}_n \quad \text{e} \quad \xi\omega_n \geq \frac{4}{\bar{t}_s} = \bar{\sigma}.$$

No círculo unitário do plano z , ao valor $\bar{\xi}$ corresponde uma curva de fator de amortecimento constante. Qualquer ponto entre essa curva e o eixo real satisfaz a especificação de máxima sobre-elevação. Pontos no círculo unitário à esquerda da curva correspondente a $\bar{\omega}_n$ satisfazem a especificação de tempo de subida. Como T é conhecido, é possível determinar a curva de frequência natural constante associada. A região no círculo unitário correspondente $\sigma \leq -\bar{\sigma}$ é um círculo interno de raio $r = e^{-\bar{\sigma}T}$. A três especificações de desempenho serão simultaneamente atendidas escolhendo-se pólos na região hachurada da Figura 26.5.

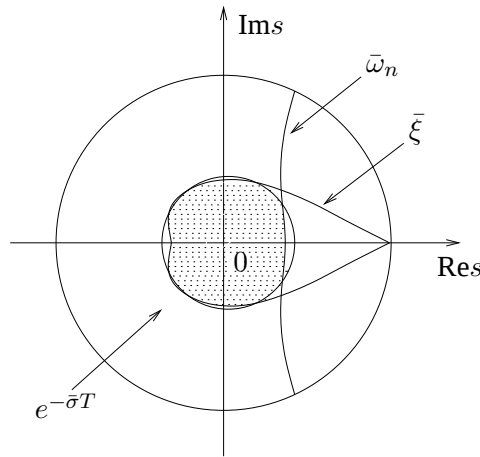


Figura 26.5: Região para alocação de pólos no plano z .

Introdução ao Controle Digital

Projeto via discretização
Projeto via emulação
Projeto via Lugar das Raízes

Projeto via discretização

1. Dada a planta a ser controlada, formuladas as especificações a serem atendidas pelo sistema de controle em malha fechada e definido que a implementação do sistema será na forma de controle digital, resta determinar a função de transferência discreta (isto é, os parâmetros) do controlador. Existem basicamente três enfoques para o projeto de controladores discretos. O primeiro pode ser denominado de **projeto via discretização**. O procedimento neste caso é simples: através de uma técnica adequada de projeto, obtém-se um controlador contínuo que atenda as especificações de desempenho formuladas. Em seguida o controlador contínuo é aproximado por um controlador discreto através de um dos vários métodos de integração disponíveis.

2. O método mais indicado para discretização de controladores contínuos é o da **integração trapezoidal** ou **método de Tustin**. Consiste em, obtida a função de transferência contínua $C(s)$, calcular

$$C(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}},$$

onde T é o período de amostragem do sistema. Exemplo: suponha que os ganhos do controlador proporcional-integral $C(s) = k_P + k_I/s$ foram determinados de forma a atender certas especificações de desempenho. O controlador discreto correspondente seria

$$\begin{aligned} C(z) &= \left(k_P + \frac{k_I}{s} \right) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \\ &= k_P + K_I \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned}$$

Projeto via emulação

3. No projeto de controladores por emulação utiliza-se a relação $z = e^{sT}$ entre pontos nos planos s e z para mapear o controlador contínuo $C(s)$ num controlador discreto $C(z)$. As regras básicas deste mapeamento são as seguintes:

Pólos: Os pólos de $C(s)$ são mapeados em pólos de $C(z)$ através de $z = e^{sT}$. Se $C(s)$ possui um pólo em $s = -a + jb$, então $C(z)$ terá um pólo em $z = \rho e^{j\theta}$, onde $\rho = e^{-aT}$ e $\theta = bT$;

Zeros finitos: Os zeros finitos de $C(s)$ são mapeados em zeros finitos de $C(z)$ através de $z = e^{sT}$. Aplica-se a mesma regra utilizada para pólos;

Zeros no infinito: Os zeros de $C(s)$ no infinito são mapeados em zeros de $C(z)$ no ponto $z = -1$;

Ganho: O ganho de $C(z)$ é igualado ao ganho de $C(s)$ numa frequência de interesse. Na frequência $s = 0$, para a igualdade de valores DC, caso estes sejam finitos, teríamos

$$C(z) \Big|_{z=1} = C(s) \Big|_{s=0}.$$

4. **Exemplo.** Considere novamente o controlador proporcional-integral

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} = \frac{k_P(s + k_I/k_P)}{s},$$

que possui um zero em $s = -k_I/k_P$, um pólo em $s = 0$ e ganho DC é infinito. O controlador emulado seria

$$C(z) = \frac{k_P (z - e^{-k_I T/k_P})}{z - 1}.$$

Como exemplo adicional, o controlador contínuo $C(s) = a/(s + a)$ possui um zero no infinito, um pólo em $s = -a$ e ganho DC igual a 1. O controlador discreto seria

$$C(z) = \frac{1}{2} \frac{(z + 1)(1 - e^{-aT})}{z - e^{-aT}}.$$

5. Tanto os controladores discretos obtidos através do método de Tustin quanto os obtidos por emulação de controladores contínuos apresentam bom desempenho

desde que o período de amostragem do sistema seja suficientemente pequeno. Requerem verificação *a posteriori* para se saber se as especificações de desempenho formuladas foram de fato atendidas. O método baseado em emulação geralmente envolve menos operações algébricas do que o método de Tustin.

6. O terceiro enfoque para o projeto de controladores discretos não envolve qualquer tipo de aproximação de controladores contínuos. Definido o período de amostragem do sistema, o projeto pode ser inteiramente desenvolvido no plano z , associando-se especificações a regiões adequadas do círculo unitário, o que garante *a priori* o atendimento das especificações. Técnicas já conhecidas para o projeto de controladores contínuos, como as baseadas no **Lugar das Raízes** do sistema em malha fechada podem ser utilizadas. O controlador resultante é ainda dependente do período de amostragem do sistema, mas ao contrário dos dois métodos anteriores, não é necessário que o período empregado na amostragem seja muito pequeno.

Projeto via Lugar das Raízes

7. Como a equação característica do sistema discreto em malha fechada é

$$1 + C(z)P(z) = 0,$$

e não existe nenhuma diferença prática entre ' z ' e ' s ', as regras de construção do Lugar das Raízes são rigorosamente as mesmas já utilizadas para projetos no domínio da transformada de Laplace. As várias etapas do projeto de controladores discretos através do Lugar das Raízes serão ilustradas por meio de um exemplo.

Exemplo Dada a função de transferência da planta a ser controlada,

$$P(s) = \frac{1}{s(10s + 1)},$$

obter $C(z)$ via Lugar das Raízes, de tal forma que $k_v \geq 1$, $M_p \leq 16\%$ e $t_s \leq 10$ s. O primeiro passo é encontrar a função de transferência discreta da planta:

$$\begin{aligned} P(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \\ &= \frac{0.0484(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)}. \end{aligned}$$

O LR da equação característica $1 + C(z)P(z) = 0$ relativo a $C(z) = k$ (compensação estática) encontra-se ilustrado na Figura 27.1. Observe que o gráfico

é o mesmo que seria obtido ao se substituir z por s na função de transferência $P(z)$. Entretanto a análise de estabilidade muda: o sistema torna-se instável quando os ramos abandonam o círculo unitário. Através dos recursos gráficos do MATLAB podemos determinar o ganho crítico como sendo $k_c = 2.32$.

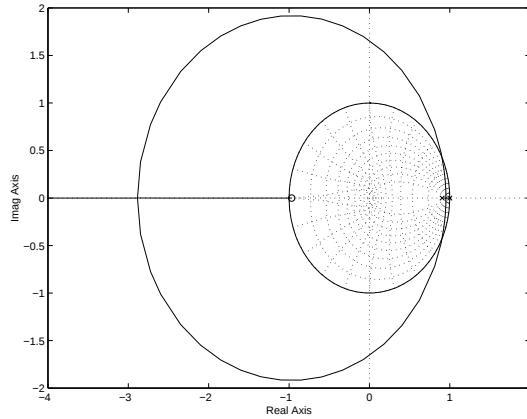


Figura 27.1: Lugar das Raízes – compensação estática.

Compensação estática. A constante de velocidade do sistema é

$$\begin{aligned} k_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)C(z)P(z)}{T}, \quad (T = 1\text{s}) \\ &= \frac{0.048374k(1+0.9672)}{(1-0.9048)} = k. \end{aligned}$$

Qualquer valor $1 \leq k \leq 2.32$ atende a especificação $k_v \geq 1$. Mas para que $M_p \leq 16\%$, é necessário que $\xi \geq 0.5$, e o LR cruza a curva $\xi = 0.5$ quando $k = 0.08$, aproximadamente. Logo, as especificações $k_v \geq 1$ e $M_p \leq 16\%$ não podem ser simultaneamente atendidas. Além disso, a região correspondente no plano z a $\xi \geq 0.5$ ($M_p \leq 16\%$) e $\omega_n \geq 1$ ($t_s \leq 10$ seg) é o círculo de raio

$$r = e^{-\xi\omega_n T} = e^{-0.5 \times 1 \times 1} = 0.6065.$$

Os ramos do LR tangenciam um círculo de raio 0.95, aproximadamente. A especificação $t_s \leq 10$ s também não pode ser atendida.

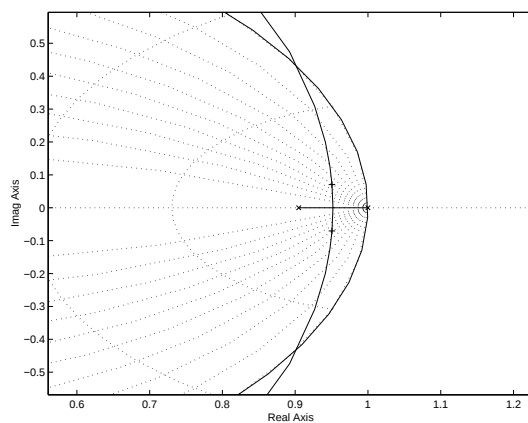


Figura 27.2: Análise da especificação $t_s \leq 10$ s.

Compensação dinâmica. Uma tentativa inicial é feita com o compensador dinâmico

$$C_1(z) = 6.64 \frac{z - 0.9048}{z - 0.3679},$$

obtido pelo método de emulação ($T = 1$ s) aplicado ao compensador contínuo

$$C(s) = \frac{10s + 1}{s + 1},$$

que atende as especificações de desempenho.

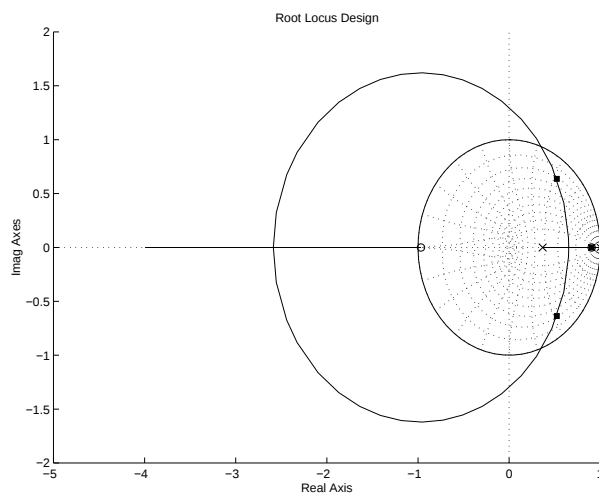


Figura 27.3: Lugar das Raízes – compensador $C_1(z)$.

O LR associado a $C_1(z)$ encontra-se ilustrado na Figura 27.3. Com $k = 6.64$ a constante de velocidade é

$$\begin{aligned} k_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)C_1(z)P(z)}{T} \\ &= 6.64 \times 0.048374 \frac{1+0.9672}{1-0.3679} \approx 1, \end{aligned}$$

os pólos apresentam $\xi \approx 0.2$, mas os ramos tangenciam um círculo de raio ≈ 0.65 não atendendo a especificação $t_s \leq 10$ s. O compensador terá de ser modificado. Uma possibilidade é mover o zero e o pólo de $C_1(z)$ para a esquerda e ajustar o ganho k . Na Figura 27.4, apenas o pólo é deslocado, para $z = 0.05$.

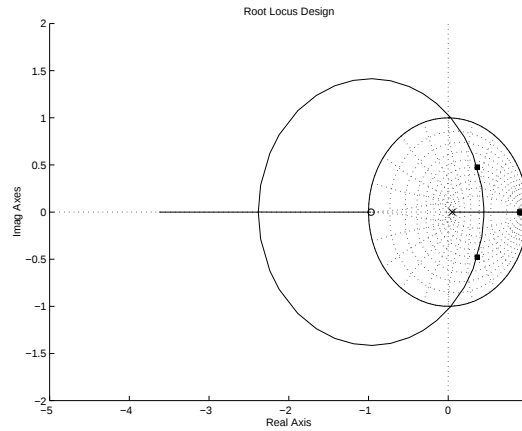


Figura 27.4: Deslocamento do pólo do compensador para $z = 0.05$.

Os pólos de malha fechada,

$$z = 0.3644 \pm j0.4774,$$

correspondem a $s = (1/T) \ln z = -0.5099 \pm j0.9188$, resultando em $\xi = 0.49$ e $\omega_n = 1.05$ como desejado. Entretanto,

$$k_v = 6.64 \times 0.048374 \frac{1+0.9672}{1-0.05} = 0.66.$$

O valor de k_v tende a aumentar ao se mover o zero de $C_1(z)$ para a esquerda. Assuma que o zero é deslocado para 0.8, resultando no controlador

$$C_2(z) = 6.64 \frac{z - 0.80}{z - 0.05}.$$

A Figura 27.5 ilustra o LR associado a $C_2(z)$. A nova constante de velocidade é

$$k_v = 6.64 \times 0.048374 \frac{(1 - 0.8)(1 + 0.9672)}{(1 - 0.05)(1 - 0.9048)} = 1.40,$$

e portanto a especificação $k_v \geq 1$ é atendida.

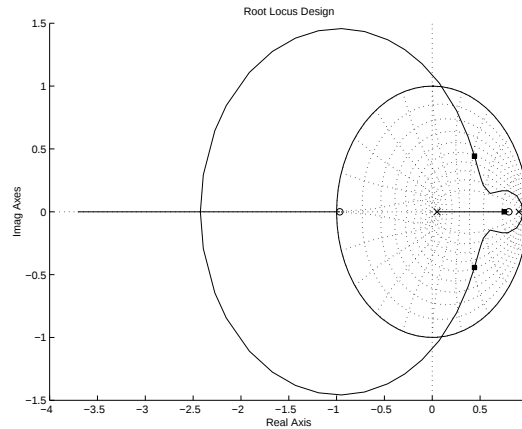


Figura 27.5: Lugar das Raízes – compensador $C_2(z)$.

A resposta do sistema ao degrau unitário é representada na Figura 27.6. Os pólos de malha fechada são $z_{1,2} = 0.4410 \pm j0.4431$ e $z_3 = 0.7516$, além do zero em $z = 0.80$. Os pólos complexos se traduzem em $\xi = 0.51$ e $\omega_n = 0.91$, o que em tese levaria a $M_p \leq 16\%$ e $t_s \leq 10$ s, aproximadamente.

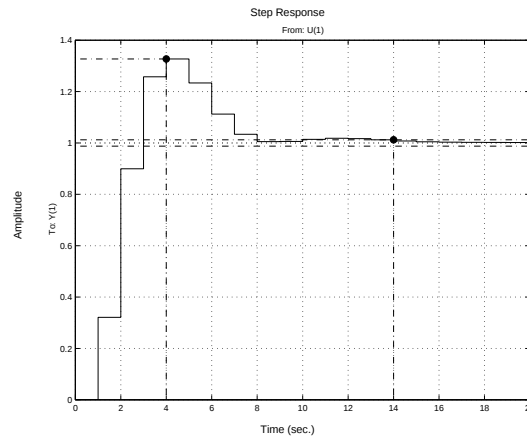


Figura 27.6: Resposta ao degrau unitário – compensador $C_2(z)$.

Note entretanto que este seria o comportamento para um sistema de segunda ordem sem zeros ! A presença do zero em $z = 0.80$ diminui o amortecimento, aumentando a máxima sobre-elevação ($M_p \approx 33\%$). A presença do pólo em $z = 0.75$ torna a resposta mais lenta, aumentando o tempo de acomodação ($t_s \approx 14$ s). O efeito do zero pode ser minimizado movendo-o para próximo do pólo em $z = 0.9048$, mas isto diminuiria K_v . Após um processo de tentativa-e-erro chega-se ao compensador

$$C_3(z) = 13 \frac{z - 0.89}{z + 0.50},$$

que efetivamente atende as especificações de desempenho formuladas. As Figuras 29.7 e 29.8 ilustram o Lugar das Raízes e a resposta do sistema ao degrau unitário, respectivamente, referentes ao compensador $C_3(z)$.

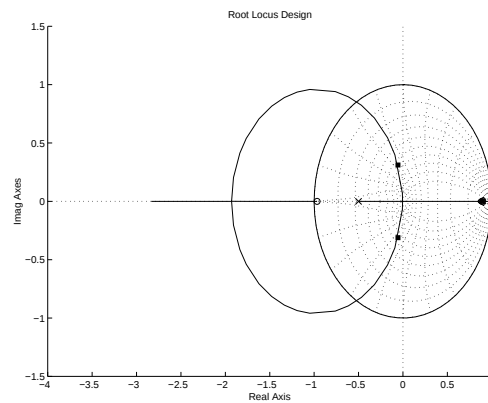


Figura 27.7: Lugar das Raízes – compensador $C_3(z)$.

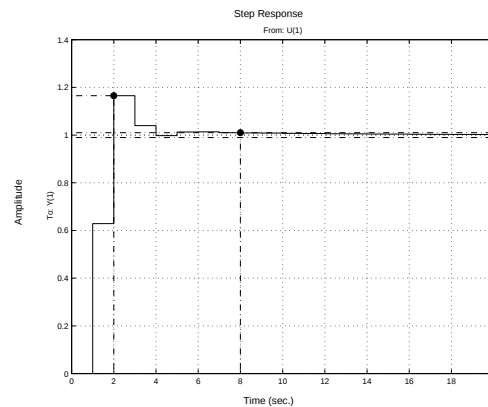


Figura 27.8: Resposta ao degrau unitário – compensador $C_3(z)$.

Pequena História da Realimentação

1. **Realimentação** é um princípio fundamental na Natureza. A vida na Terra se tornou possível porque durante o processo evolutivo foram desenvolvidos mecanismos de realimentação em seres vivos. O próprio corpo humano é um repositório de sistemas realimentados. Parte do sistema de controle de temperatura do corpo humano, o sistema de transpiração, é um exemplo de sistema realimentado. Quando a temperatura ambiente torna-se mais elevada do que a temperatura normal da pele, as glândulas sudoríparas secretam fortemente, induzindo o resfriamento da pele através de evaporação. O controle da pressão arterial, isto é, o controle da pressão em vasos sanguíneos, é outro exemplo de sistema realimentado no corpo humano.

2. O interesse maior neste curso é por sistemas realimentados **artificiais**, introduzidos pelo ser humano por razões econômicas, principalmente. A seguir apresenta-se um pequeno histórico do desenvolvimento tecnológico do princípio da realimentação. É interessante observar que os componentes básicos do controle em malha fechada estão presentes desde os mecanismos mais primitivos. A natureza intuitiva e a eficácia desses mecanismos na ausência de modelos matemáticos são evidências da potencialidade do **princípio da realimentação**.

Período primitivo: Até 1900

Século 3 AC. Registros mais antigos sobre o emprego tecnológico da realimentação. Obra de Vitruvius descreve relógios a água atribuídos a Ktesibios, nos quais válvulas flutuantes eram utilizadas para regular os níveis dos reservatórios d'água utilizados;

Século 1 DC. Na obra *Pneumatica*, Heron de Alexandria descreve uma série de sistemas mecânicos baseados em realimentação para regulação de nível (água, vinho, óleo). O conhecimento sobre realimentação no Período Helênico é preservado na Cultura Islâmica, redescoberta no Ocidente no final do Renascimento;

1634. O regulador de temperatura de C. Drebbel é o primeiro sistema realimentado inventado na Europa moderna independentemente de modelos da An-

tigüidade. A temperatura na câmara de Drebbel era regulada a partir das propriedades de expansão e contração de substâncias químicas (alcool e mercúrio);

1745. E. Lee patenteia um sistema baseado em realimentação chamado de pás-de-cauda (*fantails*) para moinhos movidos pelo vento. As pás-de-cauda eram montadas em ângulo reto com as pás principais do moinho, produzindo a regulação necessária para manter as pás principais orientadas na direção do vento;

1783. Bonnemain desenvolve sistemas de controle de temperatura a partir de sensores e atuadores baseados na expansão diferencial de diferentes metais. Durante o século 19, uma grande variedade de dispositivos termostáticos são desenvolvidos e comercializados;

1787. T. Mead patenteia um dispositivo que ligava um **regulador centrífugo** a um mecanismo que variava as áreas das pás principais de um moinho expostas ao vento de acordo com a velocidade desejada, compensando assim variações na velocidade do vento (distúrbios);

1789. J. Watt, que na mesma época havia desenvolvido uma máquina a vapor para produzir movimento de rotação, toma conhecimento do regulador centrífugo e o adapta para regular a velocidade de rotação da máquina.

3. Nos setenta anos seguintes à introdução do **regulador de Watt**, milhares de patentes sobre reguladores de velocidade são registradas. A maioria dos dispositivos propostos buscava eliminar problemas no funcionamento do regulador, como **erro de regime** (*offset*), devido a sua inerente **ação proporcional**, e problemas causados pela instabilidade do dispositivo, relatados desde a sua introdução. O regulador de Watt havia adquirido grande importância comercial e motivava grandes cientistas, como J. C. Maxwell.

1868. J. C. Maxwell publica *On Governors*, no qual descreve como obter as equações diferenciais lineares para vários tipos de reguladores existentes. Mostra ainda que para sistemas de segunda, terceira e quarta ordens, a análise dos coeficientes das equações diferenciais permitia determinar a estabilidade do sistema;

1877. E. J. Routh publica *Stability of Motion*, no qual expõe o que hoje se conhece como **critério de Routh-Hurwitz**. Naquele tempo se sabia que a estabilidade de um sistema dinâmico era determinada pela localização das raízes da sua equação característica. Routh introduziu um método simples para localizar as

raízes de um polinômio qualquer relativamente ao eixo imaginário do **plano complexo**.

4. A maioria das invenções e aplicações desse período envolvia atividades básicas como controle de temperatura, pressão, nível e velocidade de rotação de máquinas. Do desenvolvimento da indústria naval, motivado pela necessidade de navios e canhões cada vez maiores, e da introdução de novas armas como torpedos, resultaram aplicações de sistemas pneumáticos de potência para operar mecanismos de **controle de posição**. O termo **servomecanismo** deriva de *moteur asservi*, surgido na França no contexto dos sistemas de controle de posição.

Período pré-clássico: 1900-1935

5. Do aumento da compreensão sobre eletricidade e seus usos surgiram novas aplicações para o controle por realimentação. Nas duas primeiras décadas do século XX, surgiram controladores para regular tensão, corrente e frequência. Outras aplicações incluíam: controle de caldeiras para geração de vapor, controle de velocidade de motores elétricos, controle de sistemas de guiagem de navios e aviões, e controle de temperatura, pressão e vazão em indústrias químicas. À medida que sistemas de controle eram cada vez mais utilizados, alguns problemas importantes tornaram-se evidentes: falta de conhecimento teórico sobre o funcionamento dos controladores, dificuldades na abordagem de problemas devido a falta de padronização, inexistência de métodos simples de análise e projeto.

1922. N. Minorsky apresenta uma análise clara do controle envolvido em sistemas de controle de posição e formula a lei de controle hoje conhecida como **PID** (**P**roportional, **I**ntegral, **D**erivativa), na qual teria chegado observando a maneira como timoneiros pilotam navios. O trabalho de Minorsky teve pouco impacto, à época, devido a inexistência de amplificadores adequados para converter sinais de baixa potência, correspondentes aos sinais medidos, em sinais de potência suficiente para fins de atuação;

1927. A transmissão de sinais telefônicos a longas distâncias exigia amplificações eletrônicas, mas a distorção introduzida pelos amplificadores limitava o número de repetidores que poderiam ser colocados em série, e portanto a distância atingida. H. S. Black percebe que a distorção poderia ser eliminada se se pudesse amplificar sinais com ganhos precisos, o que obtém através da realimentação negativa da saída do amplificador. Ganhos precisos numa faixa de frequência maior - maior **largura de banda** - tornaram possível a expansão do tráfego nas linha de transmissão;

1930. C. E. Mason desenvolve o equivalente pneumático do amplificador de Black, realimentando negativamente parte do movimento da saída de um **amplificador pneumático**. A realimentação linearizava o funcionamento da válvula de atuação conectada ao amplificador. Além da ação proporcional viabilizada pela realimentação negativa da saída, o esquema proposto por Mason permitia a incorporação de ação integral no sistema;

1932. H. Nyquist publica *Regeneration Theory*, no qual desenvolve uma teoria de estabilidade que considera ganhos e defasamentos dependentes da frequência, levando ao que hoje se conhece como **critério de Nyquist** para estabilidade, e dando origem a um método para análise e projeto de sistemas de controle baseado na combinação de dados computáveis e dados experimentais, a **resposta em frequência** do sistema.

Período clássico: 1935-1950

6. Um dos principais problemas práticos no começo deste período era ampliar a largura de banda dos sistemas de comunicações e ainda assim obter boas características de resposta em frequência. Idealmente buscava-se um amplificador com ganho constante numa grande faixa de frequências, rápida atenuação fora da faixa e pequeno atraso de fase. Numa linha mais teórica, H. L. Hazen e G. S. Brown, que utilizavam métodos baseados no **domínio do tempo** (equações diferenciais), começaram a desenvolver o uso de **diagramas de blocos** e a empregar um analisador diferencial (pequeno computador analógico, mecânico) para simular sistemas de controle.

1940. H. Bode evidencia a relação entre uma dada característica de atenuação e o defasamento mínimo associado. Adota o ponto $(-1, 0)$ como **ponto crítico** para análise de estabilidade - Nyquist utilizava $(+1, 0)$ - e introduz os conceitos de **margem de fase**, **margem de ganho** e de **limitação de largura de banda**;

1942. Avanços na área de controladores pneumáticos tornavam agora possível construir controladores PID's com ganhos ajustáveis. J. G. Ziegler e N. B. Nichols publicam artigos descrevendo como obter ajustes *ótimos* para controladores PI e PID, as chamadas **regras de sintonia** de Ziegler-Nichols.

7. O início da Segunda Guerra Mundial desviou os esforços na área de sistemas de controle para problemas específicos. O mais importante era o de posicionamento de armas antiaéreas, que envolvia detetar a posição de uma aeronave, calcular sua

posição futura e controlar precisamente o movimento da arma. Para resolver eficientemente o problema - as aeronaves de combate tornavam-se cada vez mais rápidas - um sistema automático de rastreamento via radar foi diretamente conectado ao controle de tiro. A solução envolvia diferentes sistemas, mecânicos e eletro-eletrônicos, e explorava as melhores características dos enfoques centrados nos domínios do tempo (sistemas mecânicos) e da frequência (sistemas eletro-eletrônicos).

1943. A. C. Hall mostra que adotando-se uma abordagem por **transformada de Laplace**, sistemas mecânicos e elétricos representados em diagramas de blocos podem ser substituídos por **funções de transferência**. Hall introduz ainda o uso dos **círculos M e N**, que permitem estimar a constante de tempo dominante do sistema;

1947. N. B. Nichols introduz uma técnica gráfica para obter o ganho e a fase de um sistema em malha fechada a partir do gráfico ganho logarítmico versus fase do sistema em malha aberta parametrizado pela frequência. A técnica é hoje conhecida como **carta de Nichols**;

1948. W. R. Evans introduz um método gráfico para a análise de sistemas de controle, através do qual é possível investigar o comportamento das raízes da equação característica do sistema quando um determinado parâmetro presente na equação varia. O chamado **lugar das raízes** (*root locus*) de Evans permite relacionar a variação do parâmetro à variação do comportamento temporal do sistema.

Período moderno: Após 1950

8. No começo da década de 1950, as inovações do período clássico estavam consolidadas. As técnicas clássicas permitiam tratar sistemas dinâmicos lineares, invariantes no tempo, e monovariáveis, isto é, sistemas representados por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e apenas uma entrada e uma saída. Técnicas baseadas em resposta em frequência (Nyquist, Bode, Nichols) traduziam o comportamento desejado em termos de largura de banda, ressonância e margens de ganho e de fase, sendo essencialmente gráficas. Técnicas baseadas em resposta temporal (solução de equações diferenciais via transformada de Laplace) expressavam desempenho em termos de **tempo de subida, sobre-elevação, erro de regime e amortecimento**.

9. As inovações introduzidas após 1950 visam eliminar restrições das técnicas

do período clássico. Sistemas reais são geralmente multivariáveis, variantes no tempo, não-lineares e estão sujeitos a ruídos e incertezas. Além disso, motivado por algumas aplicações do pós-guerra na área da pesquisa aeroespacial, o enfoque passou de apenas obter um controle estabilizante para obter um **controle ótimo**, no sentido da **otimização** de um **índice de desempenho**. Uma aplicação típica era a interceptação de mísseis em **tempo mínimo** (índice de desempenho). As técnicas de controle ótimo utilizam a chamada abordagem no **espaço de estados**, segundo a qual uma equação diferencial de ordem n é reescrita como um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem, cada uma delas representando a evolução de um **estado** do sistema. O computador analógico, no qual cada estado podia ser representado por um integrador, e a introdução do **computador digital** em meados da década de 1950, foram decisivos para o desenvolvimento dos métodos baseados em controle ótimo.

1956. L. S. Pontryagin estabelece as bases da teoria matemática do controle ótimo ao formular um conjunto de condições algébricas e diferenciais, conhecido como **Princípio do Máximo**, a serem satisfeitas por leis de controle ótimas em problemas nos quais as variáveis de controle encontram-se limitadas;

1957. R. Bellman formula o **Princípio da Otimalidade** e chega a uma técnica de resolução de problemas de controle ótimo denominada **Programação Dinâmica**, através da qual problemas de controle ótimo bastante gerais podem ser subdivididos e resolvidos em estágios;

1960. R. E. Kalman evidencia a relação de dualidade existente entre controle e filtragem - a obtenção do estado real da planta através de medidas ruidosas - multivariáveis e introduz o **índice de desempenho quadrático**, através do qual obtém um procedimento de síntese de controladores para sistemas lineares multivariáveis baseado na **realimentação linear** das variáveis de estado da planta. O regulador proposto por Kalman foi mais tarde denominado (por M. Athans) de **LQR - Regulador Linear-Quadrático**.

10. Kalman também introduziu os conceitos de **controlabilidade** e **observabilidade**, que combinados à idéia de **controle modal** proposta por H. H. Rosenbrock, deram origem a inúmeros trabalhos na linha de **controle por alocação de pólos**. O chamado **filtro de Kalman-Bucy** (em referência à cooperação com R. Bucy) é uma extensão (para sistemas variantes no tempo) do trabalho sobre filtragem ótima realizado por N. Wiener na década de 1940. Os ganhos do **LQE - Estimador Linear-Quadrático**, como também viria ser conhecido, são obtidos de forma si-

milar a utilizada no LQR. Mais tarde mostrou-se que se os distúrbios nos estados e nas medidas fossem do tipo **ruído branco Gaussiano**, a realimentação dos **estados estimados** pelo LQE com os ganhos fornecidos pelo LQR levava à minimização do **valor esperado** do índice de desempenho quadrático, um *princípio de separação* entre controle e filtragem que simplifica enormemente a síntese dos controladores ótimos do tipo **LQG - Linear Quadrático Gaussiano**, como ficaram conhecidos. Navegação e guiagem de veículos espaciais (as missões Apollo, em particular) estiveram entre as primeiras aplicações de controladores LQG's.

11. Até aproximadamente o começo da década de 1980, as abordagens baseadas em espaço de estados foram predominantes em relação às baseadas em métodos freqüenciais, mas não satisfizeram plenamente as expectativas criadas em torno da sua capacidade de lidar com incertezas, que é a razão central para se utilizar sistemas realimentados. A abordagem por espaço de estados pressupõe modelos matemáticos precisos da planta e dos demais elementos presentes na malha de controle, nem sempre disponíveis ou mesmo passíveis de obtenção em aplicações industriais importantes. A revalorização da abordagem freqüencial havida nas duas últimas décadas do Século XX deriva da constatação de que incertezas parecem ser melhor tratadas no domínio da freqüência e de avanços na aplicação de técnicas como análise funcional em teoria de controle.

12. O enorme progresso da área de sistemas de controle não seria possível sem a introdução do computador digital. Computadores digitais passaram a fazer parte do controle de processos em indústrias químicas, siderúrgicas e de geração de energia no final da década de 1950. No começo tinham funções apenas de **supervisão e monitoramento**, auxiliando na obtenção de condições ótimas de operação, emissão de relatórios de produção e consumo de matéria-prima. O descompasso entre a teoria e a prática envolvidas em controle de processos estimulou o desenvolvimento de áreas como **identificação de sistemas**, **controle adaptativo** e projeto de **reguladores auto-ajustáveis**.

13. A partir de 1962 os computadores digitais passaram a responder pelo **controle digital direto** de processos, substituindo instrumentações analógicas de controle. Baixo custo por malha de controle, simplicidade e flexibilidade tornaram os computadores digitais atrativos, especialmente para indústrias de grande porte que podiam arcar com os elevados custos iniciais de aquisição de computadores. Com o aparecimento do **microcomputador** em 1972, o custo da computação digital passa a cair continuamente e novas aplicações são exploradas. Equipamentos como o **controlador de malha (single-loop)** passam a fazer parte da maioria das instalações industriais. Sistemas para seqüenciamento de operações (partida, che-

gada e intertravamento) baseados em **lógica de relé** são progressivamente substituídos por **controladores lógicos programáveis** (*programmable logic controllers*, PLC's).

14. Hoje em dia, praticamente todos os sistemas de controle são baseados em controle digital. Aplicações vão desde geração e distribuição de energia elétrica, controle de processos, manufatura e transporte, até produtos de consumo de massa, como eletrônica automotiva e aparelhos de som e vídeo.