

Notas de Aula

EE089 - Transmissão Digital

27 de março de 2008

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Analógico <i>versus</i> Digital	2
1.2	Objetivos	3
1.3	Pré-requisitos	4
1.3.1	Transformadas	4
1.3.2	Relações entre as Transformadas: Amostragem	6
2	Modulação em Banda Base	11
2.1	Princípios Básicos de Modulação	12
2.2	Modulação por Amplitude de Pulso	15
2.2.1	Um Primeiro Estudo Sobre Alfabetos	17
2.3	Critério de Nyquist	19
2.3.1	Exemplos e Aplicações	23
2.4	Diagrama de Olho	25
2.5	Exercícios	27
3	Receptores de Sinais em Banda Base	32
3.1	Receptores de Mínima Distância	33
3.1.1	Uma Intuição por Trás da Distância Mínima	34
3.1.2	Correladores e Distância Mínima	35
3.2	O Espaço de Sinais	36

3.3	Filtros de Recepção	39
3.3.1	Filtro Casado	39
3.3.2	Relação entre o Filtro Casado e o Correlador	41
3.4	Recepção de múltiplos pulsos	42
3.4.1	Raíz de Cosseno Levantado	43
3.4.2	Detectores de Distância Mínima	43
3.4.3	Ruído	46
3.4.4	Resumo: Um Receptor Prático	47
3.5	O porquê da distância mínima	47
3.6	Exercícios	50
4	Transmissão e Recepção em Banda Passante	52
4.1	Transmissão em Fase e em Quadratura	53
4.1.1	Recepção em Fase e Quadratura	55
4.1.2	Transmissão e Recepção de Múltiplos Símbolos	56
4.2	O Correlador em Banda Passante	59
4.2.1	Estatísticas do Ruído	60
4.3	Espaço de Sinais 2-D	62
4.4	Representação em Banda Base de um Sinal em Banda Passante	64
4.4.1	De Banda Passante para Banda Base	65
4.4.2	De Banda Base para Banda Passante	67
4.4.3	Filtragem em Banda Passante	68
4.5	Equivalente em Banda Base da Transmissão em Fase e em Quadratura	69
4.5.1	Equivalente em Banda Base do Receptor em Banda Passante	70
4.5.2	Equivalente em Banda Base do Sistema de Transmissão	72
4.6	Constelações Alternativas	74
4.7	Exercícios	75
5	Análise de Desempenho	80
5.1	A Função Q	81
5.2	Desempenho de N -PAM	82
5.2.1	Distância Mínima, Energia e Desempenho	85
5.3	Desempenho de N -QAM	86
5.4	Mapeamento de Gray	88
5.5	Exercícios	90

6	Equalização	91
6.1	Filtros de Recepção e Modelo Discreto do Canal	92
6.2	Equalizadores Lineares	95
6.2.1	Equalização de Quadrados Mínimos	98
6.2.2	Cálculo do Equalizador MMSE em Função do Canal	103
6.2.3	Conclusão	104
6.3	Exercícios	105
6.4	Equalizador com Realimentação de Decisão	106
6.4.1	Os Coeficientes do DFE	108
6.5	Equalizadores Adaptativos	110
6.5.1	O Algoritmo LMS	111
6.5.2	A Sequência de Treinamento	113
6.6	Exercícios	114
7	Sincronização	117
7.1	Caracterização do sincronismo	118
7.2	Modelo matemático para o sincronismo	119
7.3	Sincronismo de frequência e fase da portadora	120
7.3.1	Técnicas de malha aberta	121
7.3.2	Técnicas de malha fechada	124
7.4	Sincronismo do instante de amostragem	131
7.4.1	Correção do instante de amostragem	131
7.4.2	Estimação do instante de amostragem	132
7.4.3	Técnicas de malha fechada	132
7.4.4	Técnicas de malha aberta	136
7.5	Exercícios	137
7.6	Bibliografia	139
A	Revisão de Processos Estocásticos	141
A.1	Probabilidade de Eventos, Independência	143
A.2	Definição Axiomática de Probabilidade	144
A.2.1	Teorema da Probabilidade Total	146
A.3	Variáveis Aleatórias	147
A.4	Função Distribuição de Probabilidade	148
A.4.1	Propriedades da Distribuição	150

A.4.2	Distribuição Conjunta	151
A.5	Função Densidade de Probabilidade	151
A.6	Médias de Variáveis Aleatórias	153
A.6.1	Variáveis Aleatórias Discretas	153
A.6.2	Variáveis Aleatórias Contínuas	155
A.7	Variáveis Aleatórias Gaussianas	157
A.7.1	Várias Variáveis Conjuntamente Gaussianas	159
A.8	Processos Estocásticos	160
A.9	Médias de Processos Estocásticos	162
A.9.1	Processos Estacionários	163
A.9.2	Médias Temporais e Ergodicidade	163
A.10	Filtragem de um Processo Estocástico	165
A.11	Densidade Espectral de Potência	167
A.12	Ruído Aditivo Gaussiano Branco	168
A.13	Exercícios	170
B	Funções como Espaços Vetoriais	172
B.1	Norma, Distância e Ortogonalidade	173
B.2	Desigualdade de Cauchy-Schwarz	173
B.3	Subespaços e Bases Ortonormais	175
B.4	Projeções Ortogonais	176
	Referências	177

CAPÍTULO 1

Introdução

A matéria transmissão digital se preocupa com a transmissão de *bits* de um ponto a outro. Bits aparecem em várias formas nas aplicações. Eles podem ser representados por:

- Orientação do campo magnético em um dado ponto de um disco rígido. Por exemplo, uma orientação corresponde ao bit 1, e a orientação oposta corresponde a 0.
- Refletividade em um dado ponto na superfície de um CD ou DVD. Por exemplo, se um determinado ponto reflete o laser de leitura, ele representa um bit 1. Do contrário, ele representa 0.
- Voltagem na saída de um transistor. Por exemplo, 5V corresponde ao bit 1, 0V corresponde a 0.

Devido às várias formas que um bit pode assumir, nesse curso faremos uma abstração muito comum e falaremos da transmissão de uma seqüência de bits, sem nos preocuparmos com a representação física original desta seqüência. O interesse nessa abstração é que, com ela, podemos estabelecer uma teoria geral para o projeto de sistemas de transmissão digital, nos desligando da forma específica que o bit assume.

A transmissão desses bits se dá através de um canal. Este pode ser o par trançado que liga a sua casa à central telefônica no caso de um modem discado ou DSL; o

cabo coaxial da provedora de TV a cabo no caso de serviços de internet em banda larga via cabo; os elementos de gravação e leitura de memórias como o disco rígido, CDs e DVDs; o canal de rádio (ar), no caso de transmissão de celular digital, TV digital, rádio digital e satélite.

A entrada desses canais tem que ser um sinal elétrico contínuo no tempo, ao passo que a seqüência de bits é um sinal discreto. De fato, você não pode colocar um “bit”, que é uma abstração, em um cabo coaxial. O processo de transformar uma seqüência de bits em um sinal analógico adequado às exigências do canal, conhecido como *modulação*, é um dos principais tópicos desse curso.

Todos os canais introduzem distorções ao sinal transmitido. Cabe ao *receptor* a tarefa de recuperar os bits transmitidos, compensando essas distorções. Assim, o outro tópico principal desse curso é o estudo de técnicas para combater essas distorções, permitindo a recuperação dos bits transmitidos no receptor.

1.1 Analógico *versus* Digital

Em vários exemplos práticos, trabalhamos com grandezas inerentemente binárias, tais como os dados em uma memória. Entretanto, sistemas analógicos, como voz e imagens, são cada vez mais transmitidos digitalmente. Estes sinais são contínuos tanto no tempo quanto em amplitude. Para serem transmitidos digitalmente, os sinais analógicos devem ser amostrados e quantizados periodicamente por um conversor analógico/digital (A/D), de forma que agora eles assumem valores discretos, em instantes de tempo discretos. De acordo com o teorema da amostragem, o processo de amostrar o sinal analógico não acarreta perdas, desde que as amostras assumam um valor contínuo em amplitude, e que elas tenham uma freqüência mínima correspondente ao dobro da faixa de freqüências do sinal de interesse. Entretanto, o processo de quantização (a transformação do valor contínuo da amostra em um valor digital) inevitavelmente introduz uma perda. Mais ainda, a conversão de analógico para digital tem um custo, por necessitar de um conversor A/D. Assim, é natural que se pergunte porque usar transmissão digital nesses casos.

São muitas as respostas a essa pergunta. De um ponto de vista mais prático, os custos dos equipamentos extras necessários para a transmissão digital, tais como o conversor A/D e o sincronizador (que, como veremos, é essencial em transmissão digital), estão diminuindo rapidamente. De um ponto de vista teórico, a resposta foi

dada em 1948 por Claude Shannon, que, em um trabalho fundamental, inaugurou o campo da teoria da informação e possibilitou a emergência das comunicações digitais.

Em primeiro lugar, seqüências de bits podem ser comprimidas. Por exemplo, nem todas as letras são necessárias para que você entenda esse texto. De fato, Shannon estabeleceu os limites de quanto se pode comprimir uma seqüência de bits, quer se aceitem perdas, quer não. O formato zip é um exemplo de compressão sem perdas, enquanto que o MP3 é um exemplo de compressão com perdas. Esse processo de compressão é chamado de *codificação de fonte*.

Em segundo lugar, a transmissão digital é robusta a distorções. A intuição por trás deste resultado é simples. Se eu posso transmitir 0V ou 1V, mas eu recebo 1.5V, são grandes as chances de que eu tenha transmitido 1V. Assim, a distorção que levou o sinal de 1V para 1.5V pode ser corrigida. Mais ainda, é possível introduzir, de maneira inteligente, redundância ao sinal transmitido, de forma a aumentar essa robustez. Considere, por exemplo, os bits de paridade. Digamos que a cada 7 bits eu introduza um oitavo, de forma que esses 8 bits sempre tenham um número par de 1s. Se eu recebo um grupo de 8 bits com um número ímpar de 1s, eu sei que um erro foi cometido, e portanto eu posso pedir a retransmissão do grupo. Esse processo de introdução inteligente de redundância é chamado de *codificação de canal*.

Shannon foi muito além, e provou que cada canal tem uma capacidade C de transmitir informação. Se a razão entre o número de bits de informação e o número de bits transmitidos ($7/8$ no exemplo anterior) for menor que C , então existe um esquema de introdução de redundância (um código de canal) tal que, a medida que o número de bits de informação vai a infinito, a probabilidade de erro cai a zero. Em outras palavras, é possível recuperar tudo o que foi transmitido quase que sem erros! E mesmo que eu transmitisse um sinal analógico, eu não poderia transmitir mais informação do que a possibilitada pela transmissão digital.

Outra vantagem de comunicações digitais, que também foi estudada por Shannon, é que elas possibilitam o uso de estratégias de criptografia eficientes. Para um estudo dos trabalhos de Shannon, recomendamos o curso de teoria da informação.

1.2 Objetivos

O objetivo desse curso é tratar da transmissão de bits. Cobriremos os seguintes tópicos:

- Modulação em banda básica, para canais cuja resposta em frequência admite sinais de baixa frequência, tais como os pares trançados.
- Modulação em banda passante, para sistemas onde os sinais devem ter componentes de frequência elevada, tais como sistemas celulares.
- Análise do desempenho das técnicas de modulação estudadas.
- Efeitos das duas principais distorções introduzidas pelos canais de comunicações: o ruído aditivo e a interferência entre símbolos.
- Caso haja tempo, cobriremos outros tópicos, tais como sincronização, espalhamento espectral, e codificação.

Espera-se que, ao final do curso, o aluno saiba projetar e entender transmissores e receptores de sistemas de transmissão digital simples.

1.3 Pré-requisitos

Neste curso, serão usados alguns conceitos de processos estocásticos, que serão brevemente revisados. Basicamente, usaremos os conceitos de variáveis aleatórias discretas e contínuas, média e variância. Para processos estocásticos, usaremos os conceitos de funções de correlação e densidade espectral de potência. Finalmente, usaremos alguns conceitos de álgebra linear, como projeções ortogonais.

Serão também necessários alguns conhecimentos dos vários tipos de transformadas de Fourier, bem como a relação entre eles. Por sua importância, esses conceitos serão revistos a seguir.

1.3.1 Transformadas

Existem basicamente quatro tipos de transformadas de Fourier, uma para cada tipo de sinal temporal. Essas transformadas são resumidas a seguir:

- Série de Fourier (FS, do inglês *Fourier Series*). A FS é definida para sinais que são contínuos e periódicos no tempo, com período $T_0 = 1/f_0$. A transformada

resultante é discreta e aperiódica em frequência. As transformadas direta e inversa são dadas por

$$X[k] = f_0 \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \iff x(t) = \sum X[k] \exp(j2\pi k f_0 t). \quad (1.1)$$

- Transformada de Fourier (FT, do inglês *Fourier Transform*). A FT é definida para sinais que são contínuos e aperiódicos no tempo. A transformada resultante é contínua e aperiódica em frequência. As transformadas direta e inversa são dadas por

$$X(f) = \int x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \iff x(t) = \int X(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (1.2)$$

- Transformada de Fourier a tempo discreto (DTFT, do inglês *Discrete Time Fourier Transform*). A DTFT é definida para sinais que são discretos e aperiódicos no tempo. A transformada resultante é contínua e periódica em frequência, com período 1. As transformadas direta e inversa são dadas por

$$X(f) = \sum x[n] \exp(-j2\pi fn) \iff x[n] = \int_{\langle 1 \rangle} X(f) \exp(j2\pi fn) df. \quad (1.3)$$

Em vários cursos, vemos a transformada em função de ω , não em função de f . Nesse caso, a DTFT é periódica com período 2π .

- Transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *Discrete Fourier Transform*). A DFT é definida para sinais que são discretos e periódicos no tempo, com período N . A transformada resultante é discreta e periódica em frequência, também com período N . As transformadas direta e inversa são dadas por

$$X[k] = \sum_{\langle N \rangle} x[n] \exp(-jkn2\pi/N) \iff x[n] = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} X[k] \exp(jkn2\pi/N). \quad (1.4)$$

Nas definições de transformada, $\sum_{\langle N \rangle}$ indica soma em qualquer período de duração N . O período escolhido é irrelevante, pois as funções somadas possuem período N . Da mesma forma, $\int_{\langle 1 \rangle}$ indica a integral em qualquer período de duração 1. O período escolhido é também irrelevante, pois as funções integradas possuem período 1.

É interessante notar uma certa dualidade entre a FS e a DTFT. De fato, suas fórmulas são muito parecidas, mas invertendo-se os papéis dos sinais no tempo e na frequência. Ainda dentro dessa dualidade, é interessante notar que sinais periódicos no tempo levam a sinais discretos em frequência e vice-versa: sinais discretos no tempo levam a sinais periódicos em frequência.

1.3.2 Relações entre as Transformadas: Amostragem

Se uma seqüência discreta é obtida através da amostragem de um sinal contínuo, podemos relacionar suas transformadas de Fourier através dos teoremas da amostragem. O objetivo dessa seção é revisar essas relações.

Sinais de duração infinita

Suponha que o sinal a tempo discreto $x[n]$ seja obtido a partir da amostragem de $x(t)$, ou seja, $x[n] = x(nT_a)$, onde $T_a = 1/f_a$ é o período de amostragem. Como relacionar a DTFT de $x[n]$, $X_d(f)$, com a FT de $x(t)$, $X(f)$?

Para isso, usamos uma função auxiliar, obtida passando $x(t)$ por um amostrador consistindo de um trem de impulsos. O resultado é uma espécie de sinal amostrado mas a tempo contínuo,

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_a). \quad (1.5)$$

Esse sinal não existe na prática, e nenhum amostrador usa trens de impulsos. Entretanto, ele serve para encontrar a relação entre a FT e a DTFT de interesse, como segue.

O sinal $x_a(t)$, por ser a tempo contínuo, possui transformada de Fourier, $X_a(f)$. O teorema da amostragem diz que

$$X_a(f) = \frac{1}{T_a} \sum_k X\left(f - \frac{k}{T_a}\right). \quad (1.6)$$

Por outro lado, para um n qualquer, $x(t)\delta(t - nT_a) = x(nT_a)\delta(t - nT_a) = x[n]\delta(t - nT_a)$. Temos então que a FT de $x(t)\delta(t - nT_a)$ é $x[n] \exp(-j2\pi f n T_a)$. Finalmente, usando a linearidade da FT e a definição de $x_a(t)$ em (1.5), podemos escrever

$$X_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j2\pi f n T_a). \quad (1.7)$$

Note que (1.7) é muito semelhante à definição da DTFT de $x[n]$. De fato, podemos escrever que

$$X_d(f) = X_a\left(\frac{f}{T_a}\right). \quad (1.8)$$

Finalmente, usando esta observação e (1.6), obtemos a relação desejada entre a DTFT de $x[n]$ e a FT de $x(t)$:

$$\boxed{X_d(f) = \frac{1}{T_a} \sum_k X\left(\frac{f-k}{T_a}\right)}. \quad (1.9)$$

Notas:

- É interessante notar que se não houver *aliasing*, então temos que,

$$X_d(f) = \frac{1}{T_a} X\left(\frac{f}{T_a}\right), \quad \text{para } -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}. \quad (1.10)$$

Para isso, é necessário que $x(t)$ seja limitado em frequência, ou seja, que $X(f) = 0$ para $|f| > f_a/2$. A menor frequência de amostragem que garante a eliminação de *aliasing* é chamada de frequência de Nyquist.

- De (1.6), vemos que $X_a(f)$ é periódico com período $1/T_a$.
- De (1.9), vemos que a DTFT $X_d(f)$ é periódica com período 1, como é desejado para uma DTFT.

Sinais de duração finita

As relações obtidas acima são para sinais de duração infinita. Revisamos um fato muito importante da teoria de sinais: se um sinal for limitado em frequência, ele pode ser perfeitamente representado por amostras tomadas com uma frequência que seja maior ou igual à frequência de Nyquist do sinal. Entretanto, os sinais armazenados em um computador são de duração finita, o que causa algumas complicações. Nessa seção, revisaremos as relações entre transformadas de Fourier para esse caso.

Considere um sinal $x(t)$, e seja $x[n] = x(nT_a)$ um vetor de tamanho N representando N amostras do sinal $x(t)$, tomadas entre os instante 0 e T com período de amostragem T_a . Assim, $T_a = T/N$ ¹. O computador vai trabalhar em cima dessas N

¹Note que amostrar $x(t)$ com período T_a corresponde a assumir que as frequências em $X(f)$ variam entre $-f_a/2$ e $f_a/2$, onde $f_a = 1/T_a$.

amostras, mas para isso é necessário fazer algumas hipóteses sobre o que acontece com o sinal fora do intervalo $0 \leq n \leq N - 1$. Em particular, ele pode assumir que $x[n]$ é uma seqüência de duração infinita, mas que vale 0 para $n < 0$ ou $n \geq N$. Essa hipótese corresponde a assumir que o sinal $x(t)$ tem duração finita, sendo não nulo apenas no intervalo $0 \leq t \leq T$. Nesse caso, a seqüência $x[n]$ possuiria uma DTFT. Entretanto, a DTFT é contínua em freqüência, e portanto não pode ser manipulada muito convenientemente pelo computador.

Uma hipótese mais conveniente é assumirmos que $x[n]$ é uma seqüência periódica com período N , e que as N amostras representam um período de $x[n]$. Nesse caso, podemos calcular a DFT. Essa transformada, por ser discreta também em freqüência, pode ser facilmente manipulada pelo computador. Mais ainda, a DFT também é periódica com período N , e portanto pode ser representada por um número finito, N , de valores. Talvez mais importante, a DFT pode ser computada por um algoritmo de baixa complexidade computacional, a transformada de Fourier rápida (FFT, do inglês *Fast Fourier Transform*). Na seqüência, examinaremos a relação entre a DFT e outras transformadas.

Em primeiro lugar, vamos relacionar a DFT do sinal de duração finita $x[n]$ com a DTFT de um sinal também discreto no tempo, mas de duração infinita. Seja $y[n]$ esse sinal, com DTFT $Y(f)$. Considere que a DFT de $x[n]$, $X[k]$, seja obtida a partir de N amostras igualmente espaçadas em um período de $Y(f)$. Ou seja, $X[k] = Y(k/N)$, para $k = 0, \dots, N - 1$. Note que $Y(f)$ é periódico com período 1, e portanto $X[k]$ é periódico com período N , como desejado. Aplicando um raciocínio semelhante ao teorema da amostragem, é possível mostrar que a DFT inversa de $X[k]$ é dada por

$$x[n] = \sum_k y[n + kN]. \quad (1.11)$$

Ou seja, $x[n]$ é dado pela soma de versões $y[n]$ deslocadas no tempo de N . Algo semelhante ocorre no teorema da amostragem original, só que no domínio da freqüência: o espectro do sinal amostrado é dado pela soma de cópias do espectro original, deslocadas de f_a .

Uma consequência de (1.11) é que $x[n]$ é periódico com período N . Isso é esperado, pois $x[n]$ é uma DFT inversa. Entretanto, vemos outra analogia com o teorema da amostragem. No teorema original, uma amostragem no tempo leva a uma periodicidade na freqüência. Aqui, uma amostragem em freqüência leva a uma periodicidade no tempo. Outra consequência de (1.11) é que só é possível recuperar

$y[n]$ a partir de $x[n]$ se $y[n]$ valer zero para $n < 0$ e $n \geq N - 1$. Do contrário, haverá sobreposição entre as cópias deslocadas de $y[n]$ em (1.11), de forma semelhante ao problema de *aliasing* no teorema de amostragem clássico.

Vamos agora relacionar a DFT de $x[n]$ com a FT de $x(t)$. Como vimos acima, $x[n]$ pode ser usado para representar um sinal de duração finita. Assumimos, assim, que $x(t)$ tem duração finita, valendo zero para $t < 0$ e $t > T$. Nesse caso, podemos escrever

$$X(f) = \int_0^T x(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (1.12)$$

Podemos também aproximar a integral acima como uma soma de Riemann dividindo o intervalo entre 0 e T em N segmentos de largura T_a :

$$X(f) \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a) \exp(-j2\pi fnT_a) T_a. \quad (1.13)$$

Considere agora o cálculo $X(f)$ para $f = kf_a/N$. De certa forma, é como se amostrássemos o sinal $X(f)$, tomando N amostras para f variando entre 0 e f_a . Como $f_a/N = 1/T$, temos que

$$X(k/T) \approx T_a \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a) \exp(-j2\pi kn/N). \quad (1.14)$$

Podemos então relacionar o lado direito da equação acima com a DFT de $x[n]$, $X[k]$:

$$\boxed{X(k/T) \approx T_a X[k]}. \quad (1.15)$$

Em resumo, se amostrarmos o sinal $x(t)$ em um período T , a DFT do sinal amostrado, $X[k]$, é aproximadamente igual à FT do sinal original, $X(f)$, calculada em $f = k/T$, vezes T_a .

A relação (1.15) é apenas uma aproximação, mas vale a pena considerar algumas das hipóteses feitas. Além do fato de aproximarmos uma integral por uma soma, a hipótese de duração finita pode levar a confusões. De fato, considere $N = 10$ amostras de $x(t) = \cos(\pi t)$ entre os instantes 0 e 1. Nesse caso, $T = 1$ e a DFT calcula $X(f)$ nas frequências 0, 1, 2, etc. Entretanto, sabemos que $X(f)$ deveria possuir apenas um delta em $f = 0.5$. Ou seja, nunca calculamos $X(f)$ na frequência mais importante.

Por outro lado, o fato de que $X(f) = 0$ para $f \neq 0.5$ não quer dizer que $X[k]$ seja sempre nulo, o que pode ser verificado em MATLAB. De fato, $X(f)$ seria um

delta se o sinal tivesse duração infinita. Na realidade, a DFT aproxima a FT do produto entre $\cos(\pi t)$ e uma janela retangular entre 0 e 1.

CAPÍTULO 2

Modulação em Banda Base

Conforme falamos na introdução, a entrada dos canais de comunicações tem que ser um sinal contínuo. Afinal de contas, um bit é, para nós, uma abstração, de forma que não podemos colocar um “bit” em um cabo telefônico. Neste capítulo, discutiremos o processo, chamado de *modulação*, de transformar bits em sinais contínuos adequados ao canal de transmissão.

Restringiremos aqui nossa atenção a canais em banda básica. A definição destes sistemas não é muito clara na literatura, sendo possível encontrar várias definições relativamente equivalentes. Em princípio, um canal em banda básica aceita frequências próximas ao zero. Uma definição equivalente é que um canal em banda básica aceita uma faixa de frequências que é da mesma ordem de grandeza da sua frequência central (a média entre a maior e a menor frequência que passam pelo canal). Assim, um modem discado, que transmite aproximadamente entre 100Hz e 3.400Hz, é um canal em banda básica. Por outro lado, o sistema celular, que transmite faixas de frequência de cerca de 30kHz a uma frequência de 900MHz, é conhecido como um canal em banda passante. Lidaremos com esse tipo de canal no próximo capítulo.

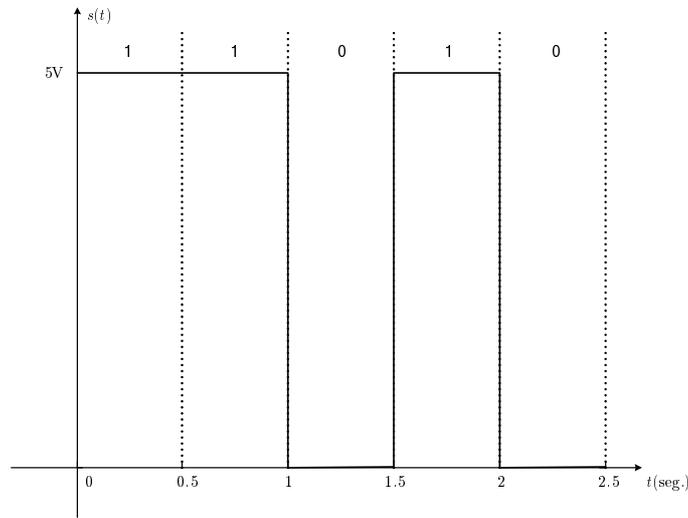


Figura 2.1: Exemplo de sinal na entrada do canal.

2.1 Princípios Básicos de Modulação

Imagine que queiramos transmitir a seqüência de bits 01101 por um canal. Inspirados em nosso laboratório de circuitos lógicos, podemos pensar em colocar uma tensão de 0V no canal se o bit a ser transmitido for 0, ou 5V se o bit a ser transmitido for 1. Assim, para a nossa seqüência, o sinal na entrada do canal seria como visto na figura 2.1. Note que, nessa figura, nós transmitimos um bit a cada 0.5s.

Obviamente, essa é uma solução que funciona. Entretanto, ela está longe de ser a única. Considere, por exemplo, as formas de onda mostradas na figura 2.2. Na figura 2.2(a), temos que a “distância” entre as formas de onda para 0 e 1 são iguais à figura 2.1. Entretanto, a energia transmitida é, na média, menor na figura 2.2(a) que na figura 2.1. Já o sinal na figura 2.2(b) tem a vantagem adicional de não possuir descontinuidades, e portanto ocupar uma faixa mais estreita do que o sinal na figura 2.1. Finalmente, considere o esquema mostrado na figura 2.2(c), onde nós transmitimos dois bits a cada 0,5s. Em outras palavras, usando o esquema na figura 2.2(c) podemos transmitir a uma taxa de bits maior que a possibilitada pelos esquemas anteriores.

O processo mostrado nas figuras 2.1 e 2.2, onde uma seqüência de bits é convertida em formas de onda, é chamado de modulação. Mais genericamente, podemos pensar em um modulador como um bloco que, a cada T_s segundos, recebe um grupo de M bits em sua entrada. Para cada possível combinação desses M bits (existem

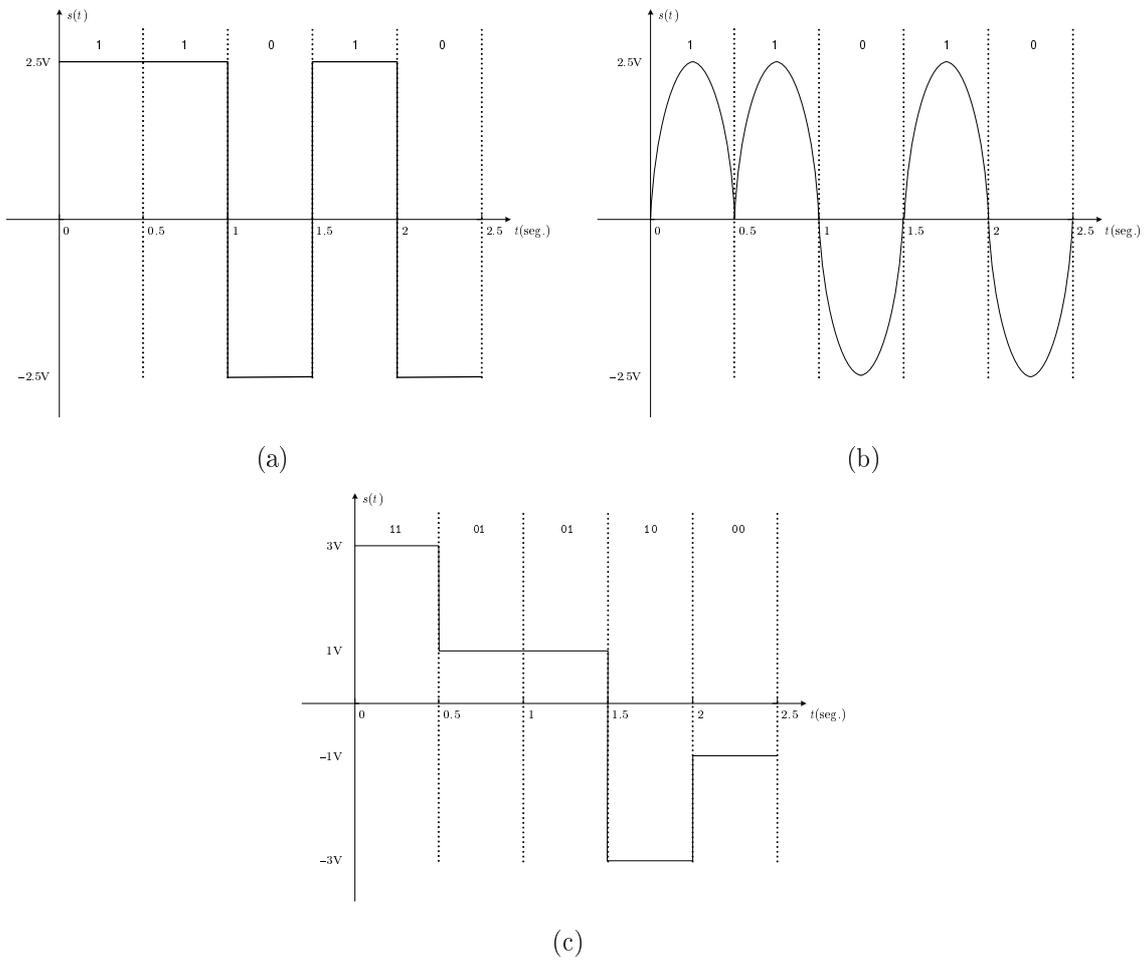


Figura 2.2: Exemplos alternativos de sinais na entrada do canal.

$N = 2^M$ possibilidades), o modulador produz uma forma de onda diferente. Assim, a cada T_s segundos o sistema transmite um dos sinais $\{s_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$.

Note que esse é um modulador sem memória, pois o sinal associado a um determinado grupo de M bits não depende de bits anteriores. Existem ainda moduladores com memória, mas esses fogem ao escopo deste curso.

As modulações mostradas nas figuras 2.1 e 2.2 são apenas alguns exemplos. As alternativas são, literalmente, infinitas. No restante desse curso, buscaremos estabelecer uma estratégia para análise e comparação entre os esquemas mostrados nas figuras anteriores, bem como qualquer outro esquema de modulação. Os parâmetros nos quais estaremos interessados são:

- Faixa de frequência ocupada pelo sinal transmitido (B), medido em Hz. Este parâmetro é de interesse pois nos permite determinar se o sinal transmitido está de acordo com as características do canal. Se um sinal possui frequências além das especificadas pelo canal, duas coisas podem ocorrer. Em primeiro lugar, podemos estar desperdiçando energia, tentando transmitir em frequências para as quais a resposta do canal é nula. Outra possibilidade é causar interferência com outros usuários, como pode ocorrer se uma estação de rádio tenta transmitir em frequências correspondentes a outras estações. Apesar de não haver exatamente um consenso na literatura, incluiremos na faixa de frequência apenas aquelas positivas com energia maior do que a metade da maior energia do sinal (também conhecida como faixa de frequência de 3dB).
- Desempenho do sistemas, medido pela taxa de erro de bits (BER, do inglês *bit error rate*), dado como uma probabilidade de erro. Este parâmetro mede a qualidade do sistema de transmissão.
- Energia usada para transmissão de um bit (E_b). Essa quantia é ligada, por exemplo, à vida útil da bateria de telefones celulares. Claramente, entre dois sistemas com as mesmas características, devemos escolher o que tem a menor energia de transmissão.
- Quantidade de informação que uma modulação pode transmitir (R_b), dada em bits por segundo. Por exemplo, a modulação da figura 2.1 transmite 1 bit a cada 0.5s, ao passo que na figura 2.2(c) temos a transmissão de dois bits a cada 0.5s.

- Eficiência espectral (ν). Como veremos, para uma dada modulação, podemos aumentar R_b simplesmente aumentando a faixa de frequência ocupada pelo sinal. Como isso nem sempre é interessante ou possível, gostaríamos de comparar modulações levando em conta R_b e B . Definimos assim a eficiência espectral $\nu = R_b/B$, dada em bits por segundo por Hz.

A comparação entre diferentes esquemas de modulação envolve o tratamento de grandezas aleatórias, tais como o ruído e a sequência de bits a ser transmitida. Assim, recomendamos que, nesse ponto, o aluno deve fazer uma revisão de alguns conceitos de variáveis aleatórias e processos estocásticos.

2.2 Modulação por Amplitude de Pulso

A técnica de modulação em banda básica mais comum, tanto na teoria quanto na prática, é chamada de modulação por amplitude de pulso (PAM, do inglês *pulse amplitude modulation*). Nessa técnica, a cada grupo de M bits associamos um número a_i , conhecido como um *símbolo*. A esta regra (ou função) que associa grupos de bits a símbolos damos o nome de *mapeamento*. Obviamente, os símbolos podem assumir $N = 2^M$ valores, número conhecido como a *ordem* da modulação. Ao conjunto de todos os símbolos damos o nome de *alfabeto* ou *constelação*, que denotaremos por \mathcal{A} . Ou seja, $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=0}^{N-1}$. Em geral, por motivos que ficarão claros adiante, para modulação em banda básica temos que $\mathcal{A} = \{-(N-1)d, -(N-3)d, \dots, (N-1)d\}$, onde d é um parâmetro que ajusta a energia transmitida. A esta modulação damos o nome de N -PAM.

Para gerar o sinal contínuo a ser transmitido, o modulador PAM simplesmente multiplica uma forma de onda $g(t)$, chamada de *pulso conformador* (shaping pulse, em inglês), pelo símbolo. Em outras palavras, o sinal transmitido em uma modulação PAM é dado por $s_i(t) = a_i g(t)$. Nesse caso, podemos pensar no modulador como consistindo de dois blocos: um que mapeia os M bits em um número, outro que gera um pulso $g(t)$ multiplicado por este número. A necessidade de gerar apenas uma forma de onda é um dos motivos por trás da popularidade de modulações PAM. Afinal de contas, isso pode ser feito com o uso de um único filtro linear, o que diminui o custo de PAM.

Note que transmitimos sempre o mesmo pulso, mas com amplitudes que estão ligadas aos bits que queremos transmitir. Ou seja, a informação de interesse (os bits)

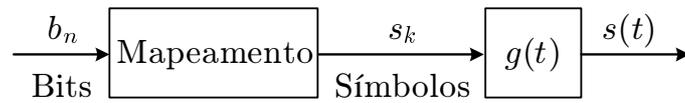


Figura 2.3: Diagrama de um modulador N-PAM.

está representada na amplitude dos pulsos, daí o nome de modulação por amplitude de pulso. Temos também que esse é um esquema de modulação bastante genérico, pois permite a “livre” escolha do pulso de modulação. (Em breve, veremos que essa escolha não é tão livre assim.)

Agora, assumamos que queiramos transmitir KM bits. A primeira etapa da modulação gera uma seqüência de números $\{s_k\}_{k=0}^{K-1}$, onde cada $s_k \in \mathcal{A}$ é o símbolo correspondente ao k -ésimo grupo de M bits. Na segunda etapa da modulação, vamos gerar uma forma de onda para cada um dos s_k . A forma de onda para os primeiros M bits será transmitida no instante 0. Teremos então a transmissão de $s_0g(t)$. A forma de onda para os M bits seguintes será transmitida no instante T_s , onde T_s é conhecido como o período de símbolo. Equivalentemente, $R_s = 1/T_s$ é conhecido como a taxa de símbolos, ou, no inglês, *baud rate*. De qualquer forma, teremos a transmissão de $s_1g(t - T_s)$. Procedendo desta maneira, vamos transmitir a superposição dessas formas de onda. Em outras palavras, o sinal transmitido será

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - kT_s). \quad (2.1)$$

O diagrama de blocos da modulação N-PAM está mostrado na figura 2.3. Nesta figura, vemos que o pulso conformador está implementado como um filtro. Esta é a configuração mais encontrada na prática, e o filtro é chamado *filtro conformador de pulso*, ou *filtro de transmissão*. Note, ainda, que o índice dos bits e dos símbolos não são os mesmos. Isto é feito para explicitar o fato de que a cada M bits temos um símbolo.

Por exemplo, nas figuras 2.1, 2.2(a) e 2.2(c), o pulso $g(t)$ é dado por um sinal retangular. Já na figura 2.2(b), o pulso é um seno, limitado ao intervalo de 0 a T_s . Por outro lado, na figura 2.1 temos que $a_0 = 0$ se o bit a ser transmitido for 0, e $a_0 = 5$ se o bit a ser transmitido for 1. Nas figuras 2.2(a) e 2.2(b), temos que $a_0 = -2.5$ se o bit a ser transmitido for 0, e $a_0 = 2.5$ se o bit a ser transmitido for 1. Já na figura 2.2(b), temos que $a_0 = -3$ se os bits a serem transmitidos forem 10, $a_1 = -1$ se os bits a serem transmitidos forem 00, $a_2 = 1$ se os bits a serem

transmitidos forem 01, e $a_3 = 3$ se os bits a serem transmitidos forem 11.

Neste ponto, já podemos estabelecer alguns parâmetros da modulação PAM. Assuma que os bits transmitidos são decorrelacionados. (Como veremos, essa é uma hipótese razoável.) Nesse caso, pode-se mostrar¹ que a densidade espectral de potência do sinal transmitido é dada por

$$S_S(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |G(\omega)|^2, \quad (2.2)$$

onde $G(\omega)$ é a transformada de Fourier de $g(t)$, e $\sigma_x^2 = E|s_k|^2$. Assim, a característica do sinal transmitido no domínio da frequência é completamente determinada pelo pulso conformador.

A taxa de transmissão pode ser calculada se notarmos que transmitimos R_s símbolos a cada segundo, e cada símbolo corresponde a M bits. Assim, $R_b = MR_s$ bits por segundo. A eficiência espectral é, portanto, $\nu = R_b/B$, onde B é a faixa de frequências ocupada por $g(t)$.

Finalmente, a energia necessária para a transmissão de um símbolo, denotada por E_s , é dada por

$$E_s = \frac{T_s}{2\pi} \int S_s(\omega) d\omega = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int |G(\omega)|^2 d\omega = \sigma_x^2 \int |g(t)|^2 dt, \quad (2.3)$$

onde a última igualdade segue da identidade de Parseval. Como cada símbolo equivale a M bits, temos que a energia necessária para a transmissão de um bit é dada por

$$E_b = \frac{E_s}{M}. \quad (2.4)$$

2.2.1 Um Primeiro Estudo Sobre Alfabetos

No começo desta seção, dissemos que normalmente o alfabeto usado para modulações N -PAM é dado por $\mathcal{A} = \{-(N-1)d, -(N-3)d, \dots, (N-1)d\}$. Agora, daremos um primeiro passo na direção de explicar o motivo da popularidade de tal alfabeto.

¹Para isso, devemos assumir que nós não tenhamos uma origem do tempo fixa. De fato, essa é uma hipótese razoável, já que não existe uma sincronização entre o transmissor e o receptor. Temos, então, que $s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t + \theta - kT_s)$, onde θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e T_s .

Para este fim, considere um alfabeto genérico $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=0}^{N-1}$. A energia gasta para a transmissão do símbolo a_i é dada por

$$E_i = a_i^2 \int |g(t)|^2 dt. \quad (2.5)$$

Assim, na média, a energia gasta para transmitir um símbolo é dada por

$$E_s = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i^2 \int |g(t)|^2 dt, \quad (2.6)$$

o que está de acordo com (2.3).

Imagine, agora, que todos os pontos do alfabeto sejam deslocados de um valor a . Nosso novo alfabeto será, então, $\mathcal{B} = \{a_i - a\}_{i=0}^{N-1}$. Intuitivamente, esperamos que os alfabetos \mathcal{B} tenham o mesmo desempenho, qualquer que seja o valor de a . Dessa forma, podemos nos perguntar qual o valor de a que minimiza a energia transmitida já que, para sistemas com o mesmo desempenho, devemos escolher aquele que usa a menor energia para transmissão.

Ora, para o alfabeto deslocado, temos que a energia transmitida é proporcional a

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (a_i - a)^2. \quad (2.7)$$

Diferenciando em relação a a e igualando a zero, temos que o valor de a que minimiza a energia deve satisfazer

$$-2 \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (a_i - a) = 0. \quad (2.8)$$

Em outras palavras, devemos ter que

$$a = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i, \quad (2.9)$$

ou seja, a deve ser igual à média dos a_i .

Finalmente, observe que $\mathcal{A} = \{-(N-1)d, -(N-3)d, \dots, (N-1)d\}$ possui média nula. Assim, o “deslocamento” que minimiza sua energia é zero. Ou seja, ele já é um alfabeto de mínima energia, o que é um dos aspectos que justificam sua popularidade.

2.3 Critério de Nyquist

O pulso retangular mostrado na figura 2.1 tem uma desvantagem séria. Apesar de ser completamente limitado no tempo, permitindo a perfeita separação temporal entre os símbolos transmitidos, esse pulso decai muito lentamente em frequência, causando forte interferência com canais adjacentes (aqueles que transmitem em frequências contíguas às do pulso). Este problema inviabiliza o seu uso em canais limitados em frequência, e na realidade afeta todas as formas de onda limitadas abruptamente no tempo, como também é o caso do pulso usado na figura 2.2(b). Nesta seção, veremos algumas alternativas para solucionar este problema.

Assim, considere o uso de um pulso $g(t)$ com duração maior do que o período de símbolo T_s . Neste caso, é fácil encontrar um pulso com melhor limitação em frequência. O pulso perfeitamente limitado em frequência, por exemplo, é dado por $\text{sinc}(t)$ e tem uma duração temporal infinita.

Infelizmente, neste caso, a transmissão de um símbolo dura obviamente mais do que um período de símbolo. Com isso, durante o segundo intervalo de transmissão, o sinal correspondente ao primeiro símbolo ainda está sendo transmitido, e assim sucessivamente. Desta forma, há uma sobreposição temporal dos sinais correspondentes a símbolos adjacentes. Este tipo de distorção é conhecido como interferência intersimbólica (IIS), e obviamente um bom projeto de um sistema de comunicações deveria limitá-lo.

Para um melhor estudo dos efeitos da IIS, consideremos um canal ideal, que não introduza nenhuma distorção. Assim, o sinal recebido é igual ao transmitido:

$$r(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - kT_s). \quad (2.10)$$

Como os símbolos são transmitidos a cada T_s segundos, gostaríamos que a cada T_s segundos o canal produzisse uma saída que represente, o mais perfeitamente possível, o símbolo transmitido. Seja, então, $r_k = r(kT_s)$ o sinal amostrado na saída do canal, obtido a cada T_s segundos. Temos que

$$r_k = \sum_{n=0}^{K-1} s_n g(kT_s - nT_s) = \sum_{n=0}^{K-1} s_n g((k-n)T_s) = \sum_{n=0}^{K-1} s_n g_{k-n}, \quad (2.11)$$

onde $g_k = g(kT_s)$ é a seqüência obtida através da amostragem do pulso conformador a uma taxa R_s . Em outras palavras, r_k é a convolução dos símbolos transmitidos, s_k , com as amostras do pulso conformador, g_k .

Gostaríamos que, no instante k , r_k fosse igual a s_k . Assim, vamos reescrever r_k de forma a explicitar o símbolo de interesse:

$$r_k = g_0 s_k + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{K-1} s_n g_{k-n}. \quad (2.12)$$

O segundo termo em (2.12) é o impacto que os outros símbolos transmitidos têm sobre a recepção de s_k . Ou seja, este termo é a IIS. De (2.12), fica claro que, para que $r_k = a_k$, devemos ter que

$$g_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Esta função é conhecida como o delta de Kronecker, e em geral é denotada por δ_k . É interessante notar que (2.13) especifica o comportamento do pulso apenas nos instantes de amostragem: para não gerar IIS, o pulso deve obedecer (2.13), não importando seu comportamento entre os instantes de amostragem.

Em resumo, para que não tenhamos IIS quando transmitimos por um canal ideal, devemos usar um pulso conformador $g(t)$ tal que $g_k = \delta_k$. É fácil obter um pulso com essas características. Por exemplo, se $g(t) = \text{sinc}(t/T_s)$, então $g_k = \delta_k$. Ou seja, o uso da função sinc como um pulso conformador leva, em um canal ideal, a um sistema de transmissão sem IIS.

Ora, o pulso sinc é idealmente limitado em frequência e não introduz IIS, então porque não usá-lo? São dois os principais motivos. Em primeiro lugar, sua implementação prática é impossível, devido à descontinuidade de sua resposta em frequência. Boas aproximações são possíveis, mas caras. Em segundo lugar, este pulso não é muito robusto a erros no instante de amostragem, conforme veremos adiante.

Para entendermos como obter outros pulsos satisfazendo (2.13), vejamos o significado desta equação no domínio da frequência. Lembre-se que o sinal g_k é a amostragem de $g(t)$, com frequência de amostragem R_s . Assim, pelo teorema da amostragem, a transformada de Fourier de g_k , $G_d(f)$ é proporcional à soma das versões deslocadas da transformada de $g(t)$. Mais especificamente, temos que

$$G_d(f) = R_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nR_s). \quad (2.14)$$

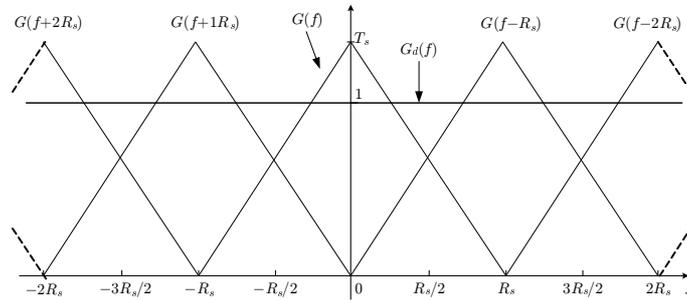


Figura 2.4: Uma função que satisfaz o critério de Nyquist, bem como uma visualização gráfica deste fato.

Por outro lado, de (2.13) temos que $G_d(f) = 1$. Juntado estes dois resultados, chegamos ao *critério de Nyquist*: para transmissão sem IIS, devemos usar um pulso conformador cuja resposta em frequência satisfaça

$$\boxed{R_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nR_s) = 1}. \quad (2.15)$$

Este critério é ilustrado na figura 2.4 para um pulso com resposta em frequência triangular.

Podemos ver, do critério de Nyquist, que $g(t) = \text{sinc}(t/T_s)$, que ocupa frequências de $-R_s/2$ a $R_s/2$, é o pulso de menor faixa de frequências que possibilita a transmissão sem IIS. Afinal de contas, um pulso com uma faixa de frequências inferior a $R_s/2$ não pode satisfazer o critério, conforme mostrado na figura 2.5. Nessa figura, vemos que a transformada $G_d(f)$ sempre será nula em uma faixa em torno de $R_s/2$ se $G(f)$ ocupar uma faixa inferior a $R_s/2$. Visto de outra forma, para que possamos transmitir a uma taxa T_s sem IIS, devemos usar um pulso conformador com uma faixa de frequências de no mínimo $R_s/2$. Neste caso, o único pulso que satisfaz o critério de Nyquist é o sinc.

Por outro lado, se permitimos que $G(f)$ se estenda além de $R_s/2$, é possível obter infinitos pulsos que possibilitam a transmissão sem IIS. Possivelmente, o pulso de transmissão mais encontrado na prática é o *coseno levantado*. Ele ocupa uma faixa de frequência de $(1 + \alpha)R_s/2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$. O parâmetro α é chamado de *fator de roll-off*, e determina o excesso de faixa, ou seja, o quanto a faixa do pulso excede o mínimo de $R_s/2$. Mais especificamente, a transformada de Fourier do coseno

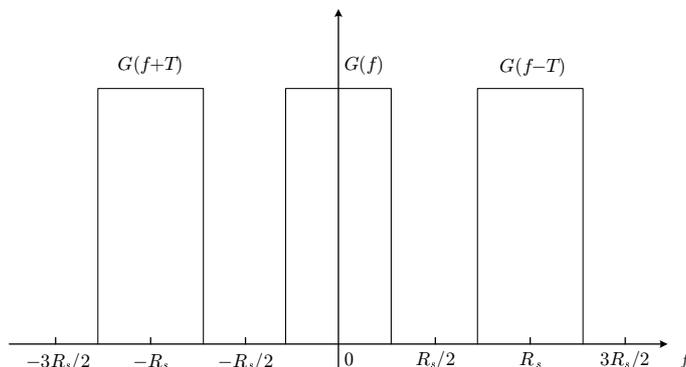


Figura 2.5: Uma função que não pode satisfazer o critério de Nyquist.

levantado é dada por

$$G(f) = \begin{cases} T_s, & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi T_s}{\alpha} \left(f - \frac{1}{2T_s} \right) \right) \right], & \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0, & |f| \geq \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases}, \quad (2.16)$$

e está ilustrada na figura 2.6. Invertendo esta transformada, chegamos (não muito facilmente, é verdade) a

$$g(t) = \text{sinc} \left(\frac{t}{T_s} \right) \frac{\cos(\alpha\pi t/T_s)}{1 - (2\alpha t/T_s)^2}, \quad (2.17)$$

que também está mostrado na figura 2.6. Note que, quando $\alpha = 0$, o cosseno levantado é igual a um filtro passa-baixas ideal, cuja resposta ao impulso é um sinc.

Um exemplo de um sinal modulado em 2-PAM usando um cosseno levantado com $\alpha = 0,5$ é mostrado na figura 2.7. A seqüência de *símbolos* transmitidos é $-1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1, +1$. Note que nos instantes de amostragem, $t = 0, T_s, 2T_s, \dots$, o sinal recebido é idêntico ao símbolo transmitido.

É importante ressaltar as diferenças entre o teorema de Nyquist para amostragem e o critério de Nyquist para transmissão sem IIS. De fato, para recuperarmos um sinal a partir de suas amostras, o teorema de Nyquist diz que as amostras devem ser tomadas com uma freqüência que seja pelo menos o dobro da maior freqüência do sinal amostrado. No critério de Nyquist para transmissão sem IIS, não assumimos nada a respeito da maior freqüência de $g(t)$, e a amostragem é feita com a freqüência dos símbolos, que de certa forma é um dado do problema. De fato, observe que um cosseno levantado amostrado com o dobro de sua maior freqüência leva a um pulso

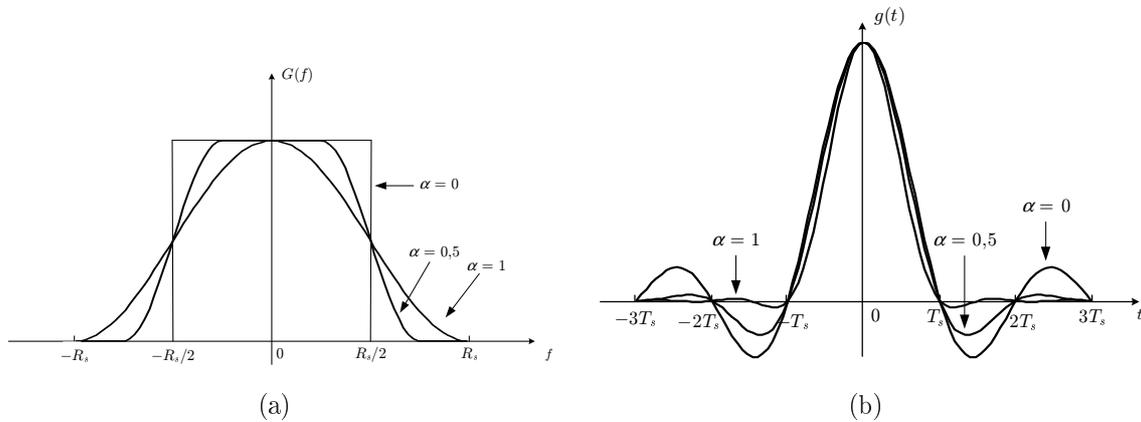


Figura 2.6: Resposta em frequência (a) e temporal (b) de um cosseno levantado com *roll-off* de 0, 0,5 e 1.

que não satisfaz o critério de Nyquist. De certa forma, podemos dizer que o critério de Nyquist explora a ocorrência de *aliasing* para obter um sinal amostrado que não gera IIS. Em resumo, na amostragem queremos evitar *aliasing*, mas para transmissão sem IIS queremos explorar *aliasing*.

Nota: Nesta seção, bem como na seqüência do curso, consideraremos alguns pulsos, como $\text{sinc}(t)$, de duração infinita e que não são causais. Obviamente, uma implementação prática de sistemas envolvendo esses pulsos seria obrigada a gerar pulsos causais de duração finita, o que pode ser obtido através da introdução de atrasos no sistema e da truncagem do pulso. Assim, ao invés de usarmos $g(t)$, na prática poderíamos usar o pulso $\tilde{g}(t)$ dado por

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t - 10T_s), & 0 \leq t \leq 20T_s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.18)$$

Como o uso de pulsos não causais de duração infinita facilita tremendamente a notação e as derivações matemáticas, e como eles podem ser bem aproximados na prática, usaremos esses pulsos na seqüência do curso.

2.3.1 Exemplos e Aplicações

Consideraremos agora algumas conseqüências do critério de Nyquist e da modulação PAM. Assumiremos sempre um canal passa-baixas ideal, limitado a $|f| < F$, e analisaremos os efeitos de alguns parâmetros: a ordem da modulação N , a taxa de símbolos $R_s = 1/T_s$, e o fator de roll-off α .

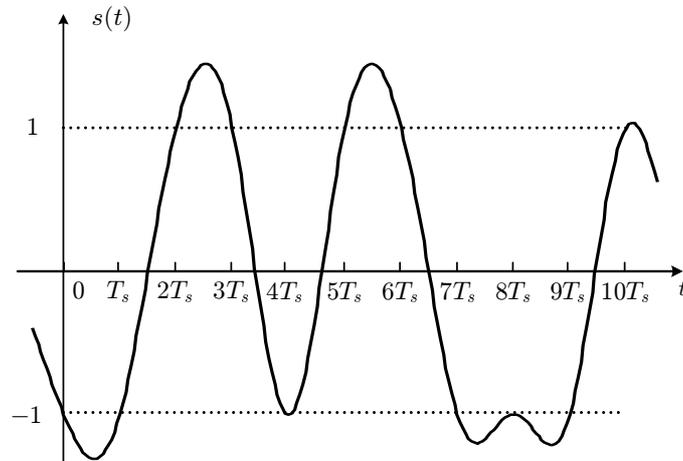


Figura 2.7: Exemplo de um sinal modulado com um cosseno levantado com *roll-off* de 0,5.

EXEMPLO 2.1:

Assuma a transmissão digital por um modem discado, onde o canal está limitado a $|f| < 3\text{kHz}$. Para transmitirmos a uma taxa de 16kbps usando um cosseno levantado com $\alpha = 0,5$, qual deve ser a ordem da modulação?

Resposta: O cosseno levantado está limitado a $|f| < (1 + \alpha)R_s/2$. Assim, o maior valor que R_s pode assumir é aquele que satisfaz $(1 + \alpha)R_s/2 = 3000$, ou seja, $R_s = 4000$ símbolos por segundo. Para uma taxa de 16kbps usando essa taxa de símbolos, devemos transmitir 4 bits por símbolo, o que implica no uso de uma modulação 16-PAM.

EXEMPLO 2.2:

Assuma a transmissão de uma modulação 32-PAM por um modem discado, onde o canal está limitado a $|f| < 3\text{kHz}$. Qual a maior taxa de bits possível para transmissão sem IIS?

Resposta: Neste caso, devemos primeiramente determinar a taxa de símbolos máxima. Ora, da figura 2.5, sabemos que para transmitir a uma taxa de símbolos R_s sem IIS, necessitamos de um pulso com faixa de freqüências de no mínimo $R_s/2$.

No caso do modem discado, a maior faixa de que podemos dispor é $R_s/2 = 3000$, o que leva a uma taxa de símbolos máxima de $R_s = 6000$ símbolos por segundo. Considerando que numa modulação 32-PAM temos 5 bits por símbolo, podemos transmitir no máximo a 30kbps sem IIS.

EXEMPLO 2.3:

Qual a maior eficiência espectral possível para um sinal N -PAM?

Resposta: Como no exemplo 2.2, devemos primeiramente determinar a taxa de símbolos máxima. Usando novamente a figura 2.5, vemos que para transmitir a uma taxa de símbolos R_s sem IIS, necessitamos de um pulso com faixa de frequências de no mínimo $R_s/2$. Ora, para uma modulação N -PAM, transmitimos M bits por símbolo. Assim, para transmitir a MR_s bits por segundo, precisamos ocupar no mínimo $R_s/2$ Hz. Assim, para um sinal N -PAM, a maior eficiência espectral é dada por $\nu = 2M$ bits/s/Hz.

2.4 Diagrama de Olho

O diagrama de olho, a ser descrito nessa seção, consiste em uma ferramenta simples e rápida para observação do desempenho de um sistema de transmissão digital. Em particular, ele mostra a robustez de um sistema a ruído e a erros no instante de amostragem. Para obtê-lo, considere que você coloque um osciloscópio na saída de um canal, ajustado de forma que a tela do osciloscópio corresponda a um período de símbolo. Também considere que o osciloscópio esteja ajustado de forma que as formas de onda que ele mostre não se apaguem. Finalmente, considere que você ligue o osciloscópio no instante $-T_s/2$. Assim, na tela do osciloscópio aparecerá a forma de onda recebida entre $-T_s/2$ e $T_s/2$. A esta será sobreposto o sinal recebido entre $T_s/2$ e $3T_s/2$, e assim sucessivamente. Seguindo este procedimento, poderíamos obter na tela do osciloscópio um sinal como o mostrado na figura 2.8 para um cosseno levantado com $\alpha = 0.5$ e uma modulação 4-PAM, transmitido pelo canal ideal descrito em (2.10).

Idealmente, gostaríamos de amostrar a saída do canal nos instantes $t = kT_s$. Afinal de contas, o pulso conformador é projetado para não introduzir IIS apenas

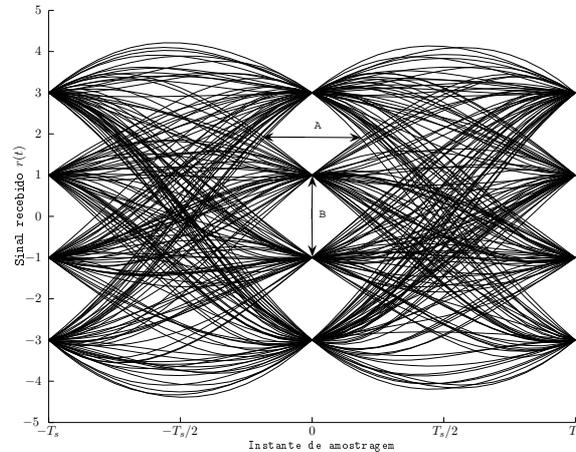


Figura 2.8: Diagrama de olho de um coseno levantado com *roll-off* de 0,5. O ponto central corresponde a um instante de amostragem $t = 0$, quando não há IIS. A distância indicada por A é a imunidade do pulso conformador a erros no instante de amostragem. A distância indicada por B é a imunidade do pulso conformador a ruídos.

quando o sinal transmitido é amostrado nesses instantes. Entretanto, os instantes de amostragem não são conhecidos no receptor, e portanto devem ser estimados. Essa estimacão está sujeita a erros, de forma que o sinal recebido acaba sendo amostrado nos instantes $t = t_0 + kT_s$, para $-T_s/2 < t_0 < T_s/2$. Neste caso, o pulso conformador vai fatalmente introduzir IIS, o que pode levar a uma degradao no desempenho do sistema. Ora, por construo, os pontos que possuem a mesma coordenada t_0 no diagrama de olho correspondem  saída do canal nos instantes $t = t_0 + kT_s$. Ou seja, para um erro de t_0 no instante de amostragem, o sinal r_k assumir os valores marcados no diagrama de olho no instante t_0 .

Assim, o diagrama de olho nos d duas informaoes importantes sobre o desempenho do sistema. Em primeiro lugar, a largura da abertura central, indicada por A na figura 2.8, nos d a imunidade do sistema a erros no instante de amostragem. De fato, se amostrarmos em qualquer lugar dentro desta abertura central, seremos capazes de distinguir entre um -1 e um $+1$. Por outro lado, a altura da abertura, indicada por B na figura 2.8, nos d a imunidade do sistema ao ruído. De fato, a presença de ruído poderá mover o sinal amostrado na saída do canal levemente para cima ou para baixo. Se a abertura do olho for pequena, um pequeno ruído

será suficiente para que o sistema não seja mais capaz de determinar se o símbolo transmitido foi -1 ou $+1$.

Neste ponto, é instrutivo comparar o diagrama de olho de um cosseno levantado com $\alpha = 0,5$, mostrado na figura 2.8, com o de um sinc, mostrado na figura 2.9. Claramente, o sinc é muito mais sensível a erros no instante de amostragem do que o pulso com $\alpha = 0,5$, conforme evidenciado pela sua pequena abertura horizontal.

Para entendermos o porquê da maior sensibilidade do sinc a erros no instante de amostragem, considere, por exemplo, que começamos a amostrar no instante $t_0 = T_s/10$. Nesse caso, $g_k = g(kT_s + t_0) \neq 0$ para todo k , e portanto teremos IIS. Este fato é comum à maioria (se não a todos) os pulsos conformadores, mas o sinc tem um agravante. Ocorre que, quando $g(t) = \text{sinc}(t/T_s)$, então

$$g_k = g(kT_s + t_0) = \text{sinc}\left(\frac{kT_s + t_0}{T_s}\right) = \frac{\sin(k\pi + \pi t_0/T_s)}{k\pi + \pi t_0/T_s} = \frac{(-1)^k \sin(\pi t_0/T_s)}{k\pi + \pi t_0/T_s}. \quad (2.19)$$

Lembre-se, agora, que $1/k$ é uma série divergente, ou seja, sua soma é infinita. Ora, de (2.19), temos que $|g_k| = a/(k + b)$, onde $a = \sin(t_0/T_s)/\pi$ e $b = t_0/T_s$, de forma que o termo corresponde à IIS em (2.12) também é uma série divergente. Ou seja, a IIS pode ir a infinito. Assim, teremos uma taxa de erro muito grande se não amostrarmos o sinal recebido no instante $t_0 = 0$. Este fato não é *tão* grave quanto parece, pois a série diverge muito lentamente, e isto só ocorre para uma seqüência específica de símbolos, com baixa probabilidade de ocorrência. Ainda assim, o diagrama de olho da figura 2.9 deixa claro que o instante de amostragem tem que ser melhor estimado em um sistema com α pequeno.

Neste ponto, você já é capaz de projetar o transmissor de um modem básico. Programas como MATLAB são capazes de gerar um cosseno levantado e, por exemplo, jogar a forma de onda obtida no alto falante do computador, criando assim um modem acústico. Agora que já sabemos alguns princípios sobre a transmissão de símbolos, vamos estudar um pouco sobre a sua recepção.

2.5 Exercícios

EXERCÍCIO 2.1:

Nesse exercício, você vai usar o MATLAB para gerar um sinal digital. Para isso, converta os 4 últimos dígitos do seu RA para binário, usando para isso 14 bits.

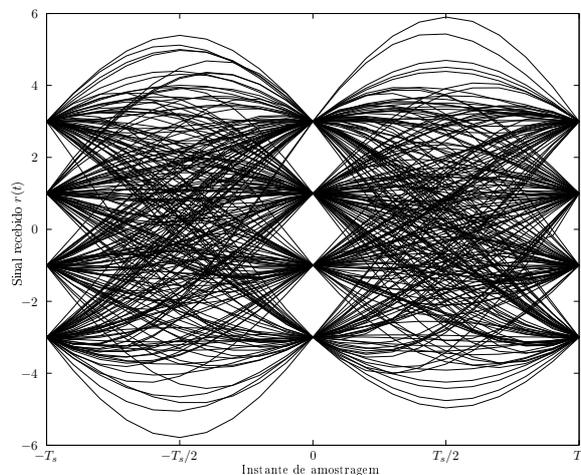


Figura 2.9: Diagrama de olho de um coseno levantado com *roll-off* de 0.

Depois, usando uma constelação 4-PAM e um cosseno levantado com $\alpha = 0,25$, gere o seu sinal modulado. Por exemplo, se seu RA é 001093, você vai converter 1093 para binário, obtendo 00010001000101. Em seguida, você vai gerar os símbolos 4-PAM, e usá-los para modular um cosseno levantado com $\alpha = 0,25$.

Obviamente, o cosseno levantado tem duração infinita, e portanto deve ser truncado. Para isso, use apenas 6 períodos de símbolo, entre $-3T_s$ e $3T_s$. Para dar uma aparência “suave” ao gráfico, use dez amostras do pulso conformador por período de símbolo. Você deve entregar um gráfico com o sinal modulado e o mapeamento usado, ou seja, quais grupos de bits você associou a quais símbolos. O gráfico será semelhante ao da figura 2.7 das notas, com a diferença que nas notas usamos uma modulação 2-PAM.

EXERCÍCIO 2.2:

Agora, use o comando `soundsc` do MATLAB para transmitir o sinal obtido no exercício 1 pelo alto-falante do seu micro, usando o valor *default* de $R_a = 8192$ Hz. A que taxa de *símbolos* você está transmitindo? Note que, a cada segundo, `soundsc` envia 8192 amostras do seu sinal para o alto-falante, interpolando-as com um filtro passa-baixas (que você pode assumir como ideal) com frequência de corte 4096 Hz. Ou seja, `soundsc` assume que o sinal que você quer transmitir foi amostrado a uma frequência que é o dobro da maior frequência do sinal. Também é importante notar

que existem duas taxas distintas: a taxa de símbolos propriamente dita, T_s , e a taxa $T_a = 1/8192\text{s}$ com que as amostras do pulso são enviadas para o alto falante.

EXERCÍCIO 2.3:

Qual a maior taxa de símbolos possível usando o comando `sound` com $R_a = 8192\text{Hz}$ e $\alpha = 0,25$? (Dica: pense na resposta em frequência do pulso conformador contínuo, que consiste na cascata do pulso conformador discreto obtido no exercício 1 com o filtro passa-baixas contínuo e ideal implementado pelo comando `soundsc`.) Como você modificaria o pulso no problema 1 para obter essa taxa?

EXERCÍCIO 2.4:

O objetivo desta questão é projetar modems discados. Assuma, para isso, que temos um canal passa-baixas ideal com frequências até 3 kHz, e que você vai usar uma modulação PAM. Você vai precisar da probabilidade de erro de modulações PAM, mostrada na figura 2.10.

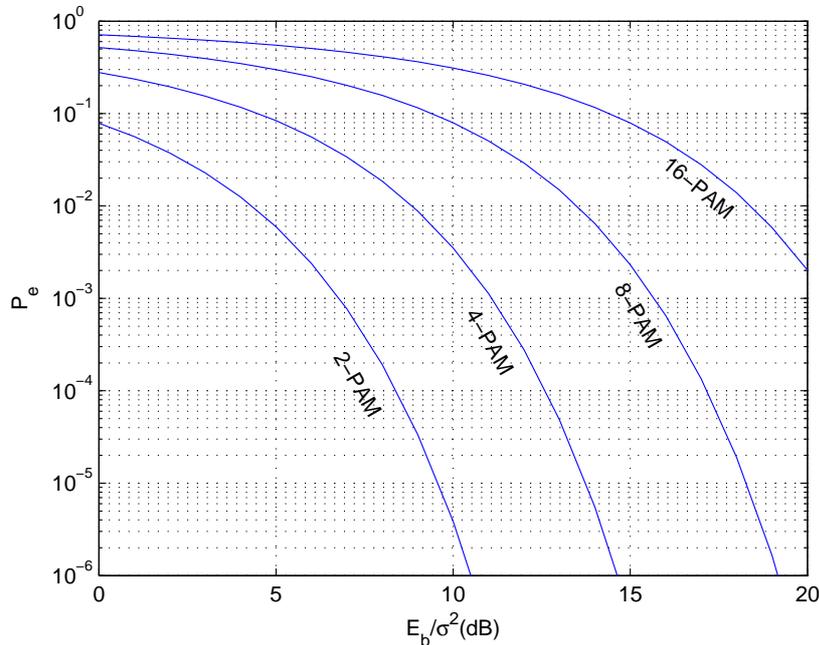


Figura 2.10: Probabilidade de erro de símbolo para várias modulações N -PAM.

- a. Você dispõe de uma energia tal que, na recepção, $E_b/\sigma^2 = 10\text{dB}$, e você deseja

- uma probabilidade de erro menor que 0,004. Que constelação você usaria para maximizar a taxa de bits dadas estas restrições?
- Qual a maior taxa de bits que pode ser transmitida neste canal usando esta constelação, em termos de bits por segundo?
 - Qual pulso conformador atinge esta taxa, eliminando a IIS?
 - Agora, você precisa transmitir 18kbps a uma probabilidade de erro menor que 10^{-5} . Qual valor de E_b/σ^2 é necessário?
 - Supondo agora uma $E_b/\sigma^2 = 15$ dB e uma probabilidade de erro inferior a 10^{-6} , qual é a maior taxa de bits que podemos atingir se usarmos um cosseno levantado com roll-off de 0,25?

EXERCÍCIO 2.5:

O objetivo deste exercício é chamar a atenção para a diferença entre dois “critérios de Nyquist”, um para amostragem e outro para transmissão sem IIS. Para fins de telefonia, consideramos que o sinal de voz ocupa uma faixa de 4 kHz. Suponha que desejamos amostrar esse sinal à menor taxa possível e quantizá-lo usando um quantizador de 8 bits. Determine a taxa de amostragem f_a e a frequência de bits resultante. Suponha agora que esse sinal será transmitido por um canal com faixa de 16 kHz usando modulação M -PAM. Suponha também que usaremos o pulso que permita a transmissão à mais alta taxa de símbolos, mas evitando IIS. Determine o valor de M .

EXERCÍCIO 2.6:

Efeito do roll-off na abertura do olho:

Neste exercício, você usará o MATLAB para traçar o diagrama de olho para diferentes valores de roll-off. Para traçar o diagrama de olho, use o seguinte algoritmo:

```

Ns=1000;           % Ns define o numero de símbolos.
s=gera_pam(N,Ns); % Gera Ns símbolos N-PAM, igualmente prováveis
Rs=16;            % Rs define a taxa de super-amostragem
s_interp=zeros(1,Ns*Rs); % Gera vetor para interpolação
s_interp(1:Rs:end)=s; % Atribui os símbolos nas posições corretas

```

```

h=rcos(Rs,rolloff);           % Gera um cosseno levantado super-amostrado
                               % de Rs com roll-off e janelamento de [-8T,8T]
r=conv(h,s_interp);          % Convolui vetor de símbolos interpolados
                               % com filtro cosseno levantado
r=r((Rs*8+1):(end-Rs*8));     % Elimina regime transitório na convolução
neye=5;                       % Define o numero de olhos por plot
c=floor(length(r)/(neye*Rs)); %
rplot= r(end-neye*Rs*c+1:end);
plot(reshape(rplot,neye*Rs,c))% Traça diagrama de olho

```

Pede-se:

- a. Gere as funções `gera_pam(N,Ns)` e `rcos(Rs,rolloff)` com janelamento de 16 períodos de símbolos, i.e, $[-8T_s, 8T_s]$;
- b. Trace o diagrama de olho para $N=4$ e os seguintes valores de roll-off: 0, 0.25, 0.5 e 1;
- c. Comente os resultados!

Dicas:

- 1) Para a função `gera_pam`, use a função `rand` que gera uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 1. Particione este intervalo em N intervalos, associando cada um a um diferente símbolo PAM. Selecione o símbolo correspondente toda vez que a variável aleatória "cair" neste intervalo. Na construção da modulação, assumo $d = 1$ para simplificar o problema e a visualização;
- 2) Para a função `rcos` use a função `sinc` do próprio MATLAB.

CAPÍTULO 3

Receptores de Sinais em Banda Base

No capítulo anterior, estudamos os primeiros conceitos de um transmissor, um dispositivo que transforma uma seqüência de bits em um sinal contínuo que pode ser transmitido por um canal em banda básica. Neste capítulo, estudaremos alguns princípios básicos do projeto de um receptor, ou seja, do dispositivo responsável pela recuperação dos bits transmitidos a partir da saída do canal.

A função do receptor em um sistema de transmissão digital é observar a saída do canal e decidir, de acordo com algum critério, quais bits foram transmitidos. Para uma modulação PAM podemos, equivalentemente, decidir quais símbolos foram transmitidos. Assim, considere um sinal transmitido como descrito em (2.1), repetido aqui por conveniência:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - kT_s). \quad (3.1)$$

Ao observar o sinal recebido $r(t)$, o receptor deve disponibilizar, em sua saída, a seqüência de estimativas \hat{x}_k , onde \hat{x}_k deve ser uma “boa” estimativa do k -ésimo símbolo transmitido, s_k .

Obviamente, o melhor critério para a escolha dos bits transmitidos é o que minimiza a probabilidade de erro. Neste capítulo, veremos como este critério pode ser implementado na prática.

3.1 Receptores de Mínima Distância

De agora em diante, assumiremos que o canal introduza ruído aditivo branco e Gaussiano¹. Além disso, para facilitar as deduções, assumiremos inicialmente que apenas um símbolo PAM isolado seja transmitido. Desta forma, o sinal recebido é dado por

$$r(t) = s_0g(t) + n(t), \quad (3.2)$$

onde $s_0g(t)$ é o pulso transmitido e $n(t)$ é um ruído Gaussiano de média zero e função de autocorrelação $\sigma^2\delta(t)$.

Um critério intuitivo para um receptor é o de distância mínima. Receptores de distância mínima escolhem os bits que geram o sinal transmitido que mais se aproxima do sinal recebido, usando o conceito de distância entre dois sinais que é definido no apêndice B. Ou seja, para cada possível seqüência de bits, medimos a distância entre $r(t)$ e o que seria recebido se esta seqüência tivesse sido transmitida. Decidimos então pela seqüência que minimiza esta distância. Note que o ruído está fora de nosso controle. Assim, quando falamos do sinal que seria recebido se uma determinada seqüência fosse transmitida, não levamos em conta o ruído.

Vamos pensar sobre esse conceito com mais detalhe. Imagine que o símbolo transmitido seja a_0 , ou seja, o sinal recebido é $r(t) = a_0g(t) + n(t)$. Este é o valor observado pelo receptor. De posse da observação do sinal recebido, o receptor passa agora para a fase de testes. Em primeiro lugar, ele gera os N sinais $a_i g(t)$, para $i = 0, \dots, N - 1$, onde cada um desses sinais corresponde a uma das N possíveis seqüências de M bits. (Lembre-se que existem $N = 2^M$ valores possíveis para cada grupo de M bits.)

Em seguida, o receptor mede a distância entre $a_0g(t)$ e $r(t)$. Conforme visto no apêndice B, essa distância é dada por

$$d_0^2 = \int |r(t) - a_0g(t)|^2 dt. \quad (3.3)$$

As outras N distâncias d_i entre $a_i g(t)$ e $r(t)$, para $i = 0, \dots, N - 1$, são também computadas. Finalmente, o receptor verifica qual é a menor distância. Sua saída é, então, a seqüência de bits que gera esta distância mínima. Neste caso, esperamos que, se o ruído for pequeno, d_0 será a menor distância, e o receptor decidirá assim que a_0 foi o símbolo transmitido.

¹Esta não é uma hipótese muito restritiva. Canais de comunicações via satélite, por exemplo, podem ser modelados desta forma.

Ainda que a descrição do procedimento seja relativamente simples, sua implementação pode ser extremamente complexa. Afinal, o valor de N pode ser bastante alto. Nesses casos, gerar todos os possíveis sinais recebidos e calcular todas as distâncias pode ser extremamente complexo. Mais ainda, é preciso se perguntar se o critério de distância mínima tem alguma razão de ser. Projetar um sistema baseado apenas em observações intuitivas nem sempre é o melhor. Assim, na seqüência, mostraremos uma implementação de baixa complexidade do receptor de mínima distância para sistemas PAM. Buscaremos, também, mostrar que o receptor de mínima distância minimiza a probabilidade de erro.

3.1.1 Uma Intuição por Trás da Distância Mínima

Para uma explicação intuitiva da validade do critério de distância mínima, imagine que o receptor queira decidir que o sinal transmitido foi $a_i g(t)$, para um dado i . Esta decisão é equivalente a dizer que o sinal recebido é dado por $r(t) = a_i g(t) + n(t)$ ou, ainda, que o ruído que afetou a saída do canal é dado por $n(t) = r(t) - a_i g(t)$. Ora, nesse caso estamos dizendo que a energia do ruído que afeta a saída do canal é dada por $\|n(t)\|^2 = \|r(t) - a_i g(t)\|^2$, ou seja, ela é igual à distância entre $r(t)$ e $a_i g(t)$.

Assim, considere que o detector tenha que escolher entre as hipóteses de que $a_i g(t)$ ou $a_j g(t)$ foi transmitido. Se escolhermos que $a_i g(t)$ foi transmitido, estaremos dizendo que o ruído tem energia d_i^2 . Se escolhermos que $a_j g(t)$ foi transmitido, estaremos dizendo que o ruído tem energia d_j^2 . Entretanto, é mais provável que o ruído tenha uma energia pequena do que uma energia grande, da mesma forma que é mais provável que uma variável aleatória Gaussiana de média nula assumam um valor 1 do que um valor 10. Assim, se $d_i^2 < d_j^2$, é mais provável que o ruído seja dado por $r(t) - a_i g(t)$ do que por $r(t) - a_j g(t)$. Por isso, é mais provável que $a_i g(t)$ tenha sido transmitido, e portanto essa deve ser a decisão.

Nota: O uso da palavra provável no parágrafo anterior não é muito preciso, ainda que esteja mais de acordo com o que se pensa em geral a respeito de probabilidade. De fato, a probabilidade de uma variável aleatória Gaussiana de média nula assumir um valor 1 ou 10 é a mesma: zero. O conceito com que trabalhamos aqui é chamado na literatura de *verossimilhança*. De fato, é mais verossímil dizer que nossa variável aleatória assumiu um valor 1 do que um valor 10, ainda que ambos eventos sejam igualmente prováveis.

3.1.2 Correladores e Distância Mínima

Nesta seção, mostraremos uma implementação de um detector de distância mínima para sistemas PAM baseado no uso de correladores. Esta é uma implementação relativamente simples que é de fato usada em sistemas práticos. Uma primeira observação a fazer é que minimizar a distância é equivalente a minimizar o quadrado da distância. Assim, deste ponto em diante, buscaremos minimizar o quadrado da distância, e não a distância em si. Esta abordagem evita o uso desnecessário da raiz quadrada em alguns pontos do processamento e das derivações.

Para um sistema PAM, o sinal transmitido é dado por $s(t) = s_0 g(t)$, onde s_0 é um dos N possíveis símbolos do alfabeto \mathcal{A} . Conforme vimos, o receptor decide que o símbolo transmitido foi \hat{a} , onde $\hat{a}g(t)$ é, entre todos os símbolos possíveis, o sinal mais próximo do recebido. Matematicamente, temos que

$$\hat{a} = \arg \min_{a \in \mathcal{A}} \int |r(t) - ag(t)|^2 dt. \quad (3.4)$$

Assim, considere a distância entre o sinal recebido e o sinal $a_i g(t)$, que corresponde a um determinado símbolo transmitido. Conforme vimos, esta distância é dada por

$$d_i^2 = \int |a_i g(t) - r(t)|^2 dt. \quad (3.5)$$

Expandindo, obtemos que

$$d_i^2 = \int |a_i g(t)|^2 dt - 2 \int a_i g(t) r(t) dt + \int |r(t)|^2 dt. \quad (3.6)$$

Observe que o primeiro termo de (3.6) corresponde à energia necessária para a transmissão do i -ésimo símbolo. Este termo não depende do sinal recebido, e portanto pode ser computado de antemão. Chamemos este termo de E_i . O segundo termo de (3.6) corresponde ao produto interno entre $r(t)$ e $a_i g(t)$, de acordo com a definição do apêndice B. Já o último termo de (3.6) corresponde à energia do sinal recebido. Este termo não depende do sinal que estamos considerando, e portanto pode ser ignorado. Em outras palavras, qualquer que seja a nossa escolha de $a_i g(t)$, esse termo não muda. Desta forma, o valor de $a_i g(t)$ que minimiza d_i é o mesmo que minimiza

$$E_i - 2 \langle r(t), a_i g(t) \rangle. \quad (3.7)$$

Agora, note que podemos dividir (3.7) por 2 sem alterar a minimização. Também, como a_i é um escalar, obtemos que o receptor de mínima distância deve escolher o

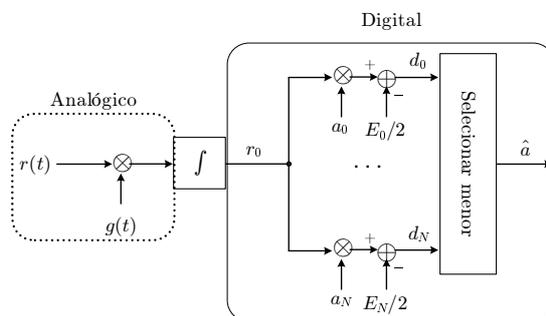


Figura 3.1: Implementação de um receptor de distância mínima com um correlador.

símbolo que minimiza

$$E_i/2 - a_i \langle r(t), g(t) \rangle. \quad (3.8)$$

Seja, então, $r_0 = \langle r(t), g(t) \rangle$. Este valor pode ser computado com o uso de um único filtro analógico, chamado *correlador*. Temos, então, que o receptor de mínima distância pode ser implementado com um único filtro analógico, seguido de uma camada de processamento digital, conforme mostrado na figura 3.1.

Antes de tentarmos explicar o bom desempenho de receptores de distância mínima, discutiremos mais alguns aspectos de sua implementação, e veremos com um pouco mais de detalhe algumas propriedades do correlador. Em particular, na próxima seção veremos uma interpretação geométrica do critério de distância mínima que leva a uma implementação mais simples da parte digital do detector da figura 3.1. Na seção seguinte, veremos como o correlador em si pode ser implementado de uma forma mais conveniente.

3.2 O Espaço de Sinais

Conforme vimos, o conceito da distância entre o sinal recebido e os possíveis sinais transmitidos é de importância em sistemas de comunicações. Receptores são baseados neste conceito e, como veremos, a distância entre dois possíveis sinais transmitidos determina o desempenho do sistema. Ainda que seja possível definir o conceito de distância entre duas funções, nossa intuição funciona melhor com vetores. Assim, nesta seção, veremos como representar o sinal recebido, bem como os possíveis sinais transmitidos, como vetores de um espaço Euclidiano tradicional. Para sistemas de comunicações, este espaço é chamado de *espaço de sinais*. Veremos

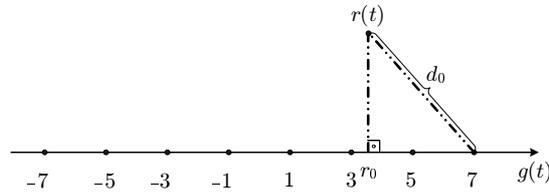


Figura 3.2: Representação do detector de distância mínima no espaço de sinais.

também uma interpretação do detector de distância mínima que é, em princípio, mais intuitiva do que a abordagem anterior.

A maior dificuldade aqui, assim como no apêndice B, é pensar em funções como “vetores”. Elas são vetores no sentido de que todas as propriedades de um espaço vetorial são satisfeitas pelo conjunto das funções. Ou seja, o conjunto das funções formam um espaço vetorial. O maior interesse em nosso caso é que isso possibilita a definição de subespaços do espaço de funções.

De fato, considere o “vetor” $g(t)$. Este vetor gera um subespaço de dimensão 1, dado por $V = \{ag(t) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Ou seja, V é formado pelos múltiplos de $g(t)$. Note, assim, que todos os pulsos transmitidos de uma modulação PAM pertencem a V . Como V é um subespaço de dimensão 1, ele pode ser representado como uma reta. Em outras palavras, os sinais transmitidos podem ser representados geometricamente como na reta mostrada na figura 3.2 para uma modulação 8-PAM. Por exemplo, o ponto marcado 3 na figura representa o sinal transmitido $3g(t)$. Como todos os sinais de interesse podem ser representados em um mesmo espaço V , chamamos este espaço de espaço de sinais.

O sinal $r(t)$ também está mostrado na figura 3.2. Observe que, devido ao ruído, $r(t)$ dificilmente é um múltiplo de $g(t)$ e, portanto, ele em geral não está no subespaço V . Por isso, na figura, $r(t)$ não está representado sobre a reta gerada por $g(t)$.

Finalmente, mostramos na figura 3.2 a projeção ortogonal de $r(t)$ no subespaço V , dada pelo ponto r_0 . Note que o ponto r_0 em V corresponde ao sinal $r_0g(t)$. Do curso de álgebra linear, temos que a projeção ortogonal possui algumas propriedades importantes. Em primeiro lugar, ela é o ponto de V mais próximo de $r(t)$.

Além disso, a projeção ortogonal é dada por $r_0 = \langle r(t), g(t) \rangle$, ou seja, ela é dada pela saída do correlador. Cabe aqui uma observação. Para que o produto interno $\langle r(t), g(t) \rangle$ represente a projeção ortogonal, é necessário que $g(t)$ seja um vetor de norma unitária. Em outras palavras, devemos assumir que o pulso conformador

satisfaça $\langle g(t), g(t) \rangle = 1$. Ou seja, $g(t)$ deve ser um sinal de energia unitária. Esta hipótese facilita tremendamente a notação, e será usada deste ponto em diante.

A última propriedade importante da projeção ortogonal é que ela é, justamente, ortogonal. Isso está representado pelo ângulo reto na figura 3.2 e, matematicamente, quer dizer que o vetor $r(t) - r_0g(t)$ é ortogonal a qualquer vetor de V . Ou seja, $\langle r(t) - r_0g(t), ag(t) \rangle = 0$ para qualquer valor de a .

Considere, agora, o cálculo de d_i no espaço de sinais, onde d_i corresponde à distância entre $r(t)$ e um sinal dos possíveis sinais transmitidos, dado por $a_i g(t)$. Na figura 3.2, representamos este cálculo para o sinal $7g(t)$. Devido à ortogonalidade e ao teorema de Pitágoras, temos que $d_i^2 = \|r_0g(t) - a_i g(t)\|^2 + \|r(t) - r_0g(t)\|^2$. Note que o segundo termo desta equação não depende de a_i . Em outras palavras, o detector de distância mínima pode, equivalentemente, tentar minimizar a distância entre $r_0g(t)$ e $a_i g(t)$. Entretanto, $\|r_0g(t) - a_i g(t)\|^2 = |r_0 - a_i|^2 \|g(t)\|^2 = |r_0 - a_i|^2$, pois assumimos que o pulso conformador tem energia unitária.

E assim chegamos, finalmente, à maior vantagem da representação no espaço de sinais: $r_0g(t)$ e $a_i g(t)$ são sinais no mesmo espaço V de dimensão 1. Podemos, então, pensar no detector de distância mínima como a busca do valor de a_i mais próximo de r_0 , onde a_i e r_0 são pontos em uma reta. Sob essa perspectiva, fica claro que, para a configuração da figura 3.2, o detector de distância mínima deve decidir que o símbolo transmitido foi 3. Claramente, temos assim uma interpretação mais intuitiva do critério de distância mínima.

Esta interpretação permite também uma implementação interessante do detector de distância mínima. Ele deve, inicialmente, calcular r_0 . O estágio seguinte depende da modulação em questão. Para o sistema mostrado na figura 3.2, temos que, se $r_0 < -6$, o receptor deve dizer que o símbolo transmitido foi -7 . Se $-6 \leq r_0 < -4$, o receptor deve dizer que o símbolo transmitido foi -5 , e assim sucessivamente. Em outras palavras, o receptor é implementado como um correlador seguido de um *quantizador*. Esta implementação pode ser consideravelmente mais simples do que a mostrada na figura 3.1.

Terminamos essa seção com uma última definição. Conforme vimos, tudo que o detector precisa saber a respeito de $r(t)$ para fazer a sua decisão de distância mínima é o valor de r_0 . Assim, r_0 é chamado de *estatística suficiente* para o processamento de $r(t)$. Falaremos um pouco mais sobre isso no final desse capítulo.

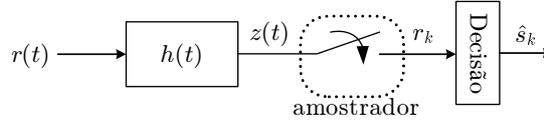


Figura 3.3: Filtro de recepção e o amostrador.

3.3 Filtros de Recepção

Nas seções anteriores, vimos que a primeira etapa de um receptor de distância mínima consiste em um correlador. Nesta seção, obteremos uma implementação alternativa do correlador como um filtro linear, a partir de uma abordagem alternativa à da seção anterior. Obteremos também uma propriedade importante do filtro resultante.

Começaremos com um cenário genérico. No capítulo anterior, assumimos que o sinal $s(t)$ era amostrado diretamente. Entretanto, a presença de ruído foi ignorada. Se o sinal recebido $r(t)$ for corrompido por ruído, ele não deve ser amostrado diretamente. Isso porque o ruído está presente em todas as frequências (por se tratar de um ruído branco), ao passo que o sinal de interesse está limitado a frequências entre $-W$ e W . Assim, se passarmos $r(t)$ por um filtro passa baixas, podemos eliminar muito do ruído sem afetar em nada o sinal de interesse.

Um filtro como o descrito acima, colocado antes do amostrador, é chamado de *filtro de recepção*, e está mostrado na figura 3.3. Nesta figura, temos que

$$z(t) = r(t) * h(t) = s_0(g(t) * h(t)) + n(t) * h(t), \quad (3.9)$$

onde $h(t)$ é a resposta ao impulso do filtro e $*$ indica convolução. Ainda que o filtro passa baixas seja uma opção viável e intuitiva para um filtro de recepção, ele não é o único nem o melhor, como veremos na seqüência.

3.3.1 Filtro Casado

Nesta seção, proporemos um critério para o projeto de um filtro de recepção, e estabeleceremos algumas propriedades do filtro resultante. Para isso, considere que o sinal em (3.9) seja amostrado no instante 0. Teremos, então, que a saída do filtro de recepção é dada por

$$r_0 = p(0)s_0 + v(0), \quad (3.10)$$

onde $p(t) = g(t) * h(t)$ e $v(t) = n(t) * h(t)$. Vemos, assim, que existem dois componentes na saída do filtro: um que traz informação sobre o sinal de interesse, dado por $p(0)s_0$, e outro que corresponde ao ruído, dado por $v(0)$.

Podemos, então, pensar no seguinte critério para o projeto do filtro de recepção: gostaríamos que, no instante de amostragem, a relação entre a potência do sinal de interesse e a do componente de ruído seja a maior possível. Esta relação entre as potências é conhecida como relação sinal-ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*), e pode ser escrita como

$$SNR = \frac{E[|p(0)s_0|^2]}{E[|v(0)|^2]} = \frac{|p(0)|^2 E[|s_0|^2]}{E[|v(0)|^2]}, \quad (3.11)$$

onde a última igualdade segue do fato que $p(0)$ é uma constante determinística.

Buscaremos agora uma forma de escrever a expressão em (3.11) em termos das formas de onda $g(t)$ e $h(t)$. Para isto, note que podemos escrever

$$p(0) = \int h(t)g(\tau - t) dt \Big|_{\tau=0} = \int h(t)g(-t) dt. \quad (3.12)$$

Mais ainda, podemos escrever

$$\begin{aligned} E[|v(0)|^2] &= E[v(0)v(0)] \\ &= E[(n(t) * h(t))|_{t=0}(n(t) * h(t))|_{t=0}]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Usando diferentes variáveis para descrever as convoluções em (3.13), obtemos que

$$\begin{aligned} E[|v(0)|^2] &= E \left[\int h(t)n(-t)dt \int h(\tau)n(-\tau)d\tau \right] \\ &= \iint E[n(-t)n(-\tau)] h(t)h(\tau)dt d\tau. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Finalmente, lembrando que o ruído é branco e portanto $E[n(-t)n(-\tau)] = \sigma^2\delta(t-\tau)$, temos que

$$\begin{aligned} E[|v(0)|^2] &= \sigma^2 \iint \delta(t-\tau)h(t)h(\tau) dt d\tau \\ &= \sigma^2 \int |h(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, substituindo (3.12) e (3.15) em (3.11), temos que

$$SNR = \frac{E[|s_0|^2] \left| \int g(-t)h(t) dt \right|^2}{\sigma^2 \int |h(t)|^2 dt}. \quad (3.16)$$

De posse desta expressão para a SNR em termos de $g(t)$ e $h(t)$, podemos agora passar para a obtenção de um filtro de recepção que maximize a SNR . Para isso, usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz que, conforme mostrado no apêndice B, implica que

$$\left| \int g(-t)h(t) dt \right|^2 \leq \int |g(-t)|^2 dt \int |h(t)|^2 dt, \quad (3.17)$$

com igualdade se e somente se $h(t)$ é um múltiplo de $g(-t)$. Substituindo essa desigualdade em (3.16), temos que

$$SNR \leq \frac{E[|s_0|^2] \int |g(-t)|^2 dt}{\sigma^2}, \quad (3.18)$$

com igualdade se e somente se $h(t)$ é um múltiplo de $g(-t)$. Ou seja, o maior valor que a SNR pode assumir é dado pelo lado direito de (3.18), o que ocorre quando $h(t)$ é um múltiplo de $g(-t)$. Por simplicidade, escolhemos $h(t) = g(-t)$. Neste caso, dizemos que o filtro $h(t)$ está *casado* ao pulso $g(t)$, e o filtro resultante é chamado de filtro casado.

A expressão do filtro casado no domínio da frequência é também bastante simples. De fato, usando propriedades da transformada de Fourier, pode-se mostrar que se $h(t) = g(-t)$, então $H(f) = G^*(f)$. Em outras palavras, a magnitude da resposta em frequência do filtro casado é igual à do pulso conformador, ao passo que suas fases possuem sinais invertidos.

3.3.2 Relação entre o Filtro Casado e o Correlador

Nesta seção, mostraremos como o detector de distância mínima pode ser implementado com um filtro casado. Isso é de interesse, pois a implementação de um filtro linear como o filtro casado é bastante simples.

Para estabelecer esta relação, note que a saída do filtro casado no instante $t = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} r_0 &= r(t) * h(t)|_{t=0} \\ &= \int r(t)h(-t) dt \\ &= \int r(t)g(t) dt \\ &= \langle r(t), g(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde usamos o fato que $h(t) = g(-t)$. Vemos, então, que no instante $t = 0$, a saída do filtro casado é igual à saída do correlador. Esta observação pode ser generalizada. De fato, a saída do filtro casado no instante $t = kT_s$ é dada por

$$\begin{aligned}
 r_k &= r(t) * h(t)|_{t=kT_s} \\
 &= \int r(t)h(kT_s - t) dt \\
 &= \int r(t)g(t - kT_s) dt \\
 &= \langle r(t), g(t - kT_s) \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Em outras palavras, a saída do filtro casado no instante $t = kT_s$ é igual à correlação entre o sinal recebido, $r(t)$, e uma versão deslocada do pulso de transmissão, $g(t - kT_s)$. Este resultado terá conseqüências importantes na implementação de um receptor de distância mínima para a detecção de múltiplos pulsos.

3.4 Recepção de múltiplos pulsos

Considere agora a transmissão de múltiplos pulsos, de forma que o sinal transmitido é dado por $s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - kT_s)$. Para a discussão nesta seção assumiremos inicialmente um sistema sem ruído, de forma que o sinal recebido é $r(t) = s(t)$. Assumiremos também o uso de um filtro de recepção, com resposta ao impulso $h(t)$. Neste caso, a saída do filtro de recepção, expressa em (3.9), é dada por

$$z(t) = h(t) * r(t) = h(t) * \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - kT_s) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k p(t - kT_s), \tag{3.21}$$

onde $p(t) = h(t) * g(t)$, e onde usamos o fato de que a convolução é linear e invariante no tempo. Podemos agora seguir um raciocínio semelhante ao da seção 2.3, que levou ao critério de Nyquist. De fato, na seção 2.3 tentamos decidir qual foi o símbolo transmitido amostrando o sinal recebido $r(t)$ a cada T_s segundos, onde T_s é o período de símbolo. Aqui, podemos tentar fazer a mesma decisão baseado na saída do filtro de recepção, ou seja, amostramos $z(t)$ a cada T_s segundos e tentamos com isso decidir qual foi o símbolo transmitido. Observe que $z(t)$ é muito semelhante ao sinal $r(t)$ da seção 2.3, mas com $p(t)$ ocupando o lugar de $g(t)$. De certa forma, é como se a presença do filtro de recepção transformasse o pulso de transmissão em $p(t)$.

Seja então $z[k] = z(kT_s)$. Gostaríamos que $z[k]$ fosse igual a s_k , ou seja, que não houvesse interferência entre os símbolos. Seguindo os passos da seção 2.3, é possível ver que, para que isso seja verdade, é necessário que $p[k] = \delta[k]$, onde $p[k] = p(kT_s)$. Ou seja, devido à presença do filtro de recepção, é necessário que $p(t)$, e não $g(t)$, satisfaça o critério de Nyquist. Como $p(t) = g(t) * h(t)$, então $P(f) = G(f)H(f)$. Finalmente, temos que o critério de Nyquist para sistemas com filtro de recepção é dado por

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T_s}\right) H\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = 1. \quad (3.22)$$

Caso o sistema empregue um filtro casado, temos que $H(f) = G^*(f)$. Portanto, de (3.22), para que não tenhamos IIS nas amostras da saída do filtro casado, o pulso conformador deve satisfazer

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| G\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right|^2 = 1. \quad (3.23)$$

Em outras palavras, o quadrado da resposta em frequência do pulso conformador é que deve satisfazer o critério de Nyquist. Dizemos que um pulso com esta característica é um pulso de *raiz de Nyquist*.

3.4.1 Raiz de Cosseno Levantado

Um pulso raiz de Nyquist muito usado na prática é o *raiz de cosseno levantado*, cuja resposta em frequência é a raiz quadrada de (2.16), equação que define a resposta em frequência do cosseno levantado. Aplicando a transformada de Fourier inversa, obtemos que a raiz de cosseno levantado é dada por

$$g(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T_s}} \frac{\cos\left((1+\alpha)\frac{\pi t}{T_s}\right) + \frac{T_s}{4\alpha t} \sin\left((1-\alpha)\frac{\pi t}{T_s}\right)}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T_s}\right)^2}. \quad (3.24)$$

3.4.2 Detectores de Distância Mínima

Nesta seção, veremos como podemos projetar um detector de distância mínima para a detecção de múltiplos pulsos. Assuma inicialmente a transmissão de dois pulsos, s_0 e s_1 , de forma que $r(t) = s_0g(t) + s_1g(t - T_s) + n(t)$. Assuma também o uso de 2-PAM, de forma que os pulsos podem assumir valores $+1$ ou -1 . Neste caso, existem quatro possíveis pulsos transmitidos:

- $g(t) + g(t - T_s)$,
- $g(t) - g(t - T_s)$,
- $-g(t) + g(t - T_s)$,
- $-g(t) - g(t - T_s)$.

Teoricamente, deveríamos calcular a distância entre $r(t)$ e cada uma dessas quatro possibilidades, fazendo a decisão pelos símbolos que levam à menor distância². Obviamente a complexidade deste detector é grande. Pior ainda, se houvésemos transmitido 1000 símbolos, deveríamos comparar $r(t)$ com 2^{1000} possíveis sinais transmitidos. Este número excede a estimativa atual para o número de átomos no universo, indicando que a complexidade deste detector é inviável.

A simplificação do detector de distância mínima neste caso passa por uma hipótese importante: assumiremos que o pulso $g(t)$ seja um pulso raiz de Nyquist, satisfazendo (3.23). Estes pulsos possuem a importante propriedade de que $g(t)$ e $g(t - kT_s)$ são ortogonais³. De fato, como $h(t) = g(-t)$,

$$\begin{aligned}
 \langle g(t), g(t - kT_s) \rangle &= \int g(t)g(t - kT_s) dt \\
 &= \int g(t)h(kT_s - t) dt \\
 &= (g(t) * h(t))|_{t=kT_s}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ora, de (3.22) e (3.23) vemos que o pulso $g(t) * h(t)$ satisfaz o critério de Nyquist, de forma que

$$\langle g(t), g(t - kT_s) \rangle = \delta_k. \tag{3.26}$$

Como consequência desta ortogonalidade, podemos representar o sistema com dois pulsos como na figura 3.4. Como os dois triângulos retângulos desta figura

²Lembre-se que a idéia de distância mínima é comparar $r(t)$ com todos os possíveis sinais transmitidos. Uma dessas comparações será com o sinal que foi de fato transmitido, e nesse caso estaremos medindo apenas a energia do ruído. Nos outros casos, medimos a energia do ruído mais um outro termo. Espera-se que a energia nesses outros casos seja maior do que no caso com ruído apenas. É por isso que selecionamos a hipótese com menor energia, ou de distância mínima

³Esta propriedade também é importante para o projeto de constelações, conforme veremos adiante.

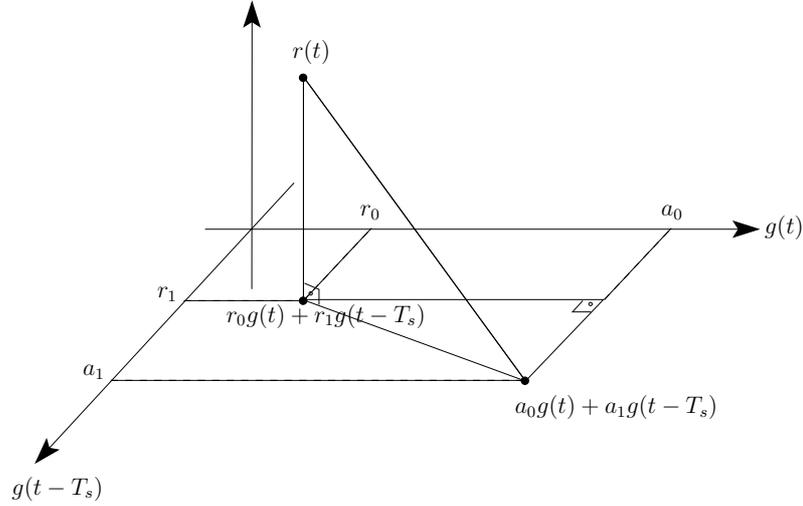


Figura 3.4: Espaço de sinais com a transmissão de dois símbolos.

deixam claro,

$$\begin{aligned}
 \|r(t) - (a_0g(t) + a_1g(t - T_s))\|^2 &= \|r(t) - (r_0g(t) + r_1g(t - T_s))\|^2 + \\
 &\quad \|(r_0g(t) + r_1g(t - T_s)) - (a_0g(t) + a_1g(t - T_s))\|^2 \\
 &= \|r(t) - (r_0g(t) + r_1g(t - T_s))\|^2 + \\
 &\quad \|(r_0g(t) - a_0g(t))\|^2 + \|r_1g(t - T_s) - a_1g(t - T_s)\|^2 \\
 &= \|r(t) - (r_0g(t) + r_1g(t - T_s))\|^2 + \\
 &\quad + |r_0 - a_0|^2 \|g(t)\|^2 + |r_1 - a_1|^2 \|g(t)\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Claramente, o termo a_0 aparece em apenas um lugar na equação acima, no termo $|r_0 - a_0|^2$. Da mesma maneira, o termo a_1 aparece em apenas um lugar na equação acima, no termo $|r_1 - a_1|^2$. O problema de determinar o sinal transmitido mais próximo ao recebido foi então desacoplado em dois problemas. Basta determinar o símbolo a_0 mais próximo de r_0 e o símbolo a_1 mais próximo de r_1 . Em cada uma destas hipóteses, é necessário fazer duas comparações para cada símbolo. No caso de 1000 símbolos transmitidos, isto resulta em 2000 comparações, valor muito menor do que as 2^{1000} comparações do método no início desta seção.

3.4.3 Ruído

Considere novamente o sinal na saída do amostrador da figura 3.3. Para podermos analisar o desempenho deste sistema, é necessário conhecer as estatísticas do ruído. Assim, nesta seção, estudaremos as estatísticas da seqüência aleatória n_k , que representa o componente de ruído de r_k . De (3.9), temos que $n_k = (n(t) * h(t))|_{t=kT_s}$. Obviamente, n_k é o resultado da filtragem linear de um processo Gaussiano, e portanto é Gaussiano. Mais ainda, como $E[n(t)] = 0$, $E[n_k] = 0$.

Falta determinar a função de autocorrelação de n_k . Assim, considere

$$E[n_k n_l] = E\left[\int n(t)h(kT_s - t) dt \int n(\tau)h(lT_s - \tau) d\tau\right], \quad (3.28)$$

onde usamos duas variáveis de integração distintas para representar n_k e n_l . Trocando a ordem das integrais com a esperança, e reconhecendo que $n(t)$ é a única grandeza aleatória, temos que

$$\begin{aligned} E[n_k n_l] &= \int \int E[n(t)n(\tau)]h(kT_s - t) dt h(lT_s - \tau) d\tau \\ &= \int \int N_0/2\delta(t - \tau)h(kT_s - t) dt h(lT_s - \tau) d\tau \\ &= \int N_0/2h(kT_s - \tau)h(lT_s - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ora, se $h(t)$ é um filtro casado, então $h(t) = g(-t)$. Portanto,

$$\begin{aligned} E[n_k n_l] &= \int N_0/2g(\tau - kT_s)h(lT_s - \tau) d\tau \\ &= N_0/2(g(t) * h(t))|_{t=(l-k)T_s}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Se, além disso, os pulsos satisfizerem (3.23), então a convolução acima dá zero, a não ser que $k = l$. Assim, concluímos que se usarmos um filtro de recepção casado que satisfaz (3.23), então

$$E[n_k n_l] = N_0/2\delta_{k-l}, \quad (3.31)$$

ou seja, os ruídos têm variância $N_0/2$ e são decorrelacionados. Como eles são Gaussianos, isto significa que eles são independentes.

A independência entre amostras consecutivas de ruído é de suma importância para o esquema de detecção da figura 3.3. De fato, ela indica que o sinal n_l não traz nenhuma informação sobre o sinal n_k . Como assumimos que os símbolos transmitidos também são independentes, isso implica que o sinal r_l também não traz nenhuma

informação sobre r_k . Em outras palavras, usar apenas o sinal r_k para decidir sobre o k -ésimo símbolo transmitido não acarreta nenhuma perda de desempenho. Ou seja, para canais que introduzem apenas ruído aditivo, um receptor símbolo-a-símbolo é ótimo se o filtro de recepção satisfizer (3.23).

Se, por outro lado, os ruídos fossem correlacionados, nós seríamos capazes de extrair alguma informação sobre n_k a partir de r_l . Em outras palavras, poderíamos usar r_l para melhorar a nossa decisão sobre o k -ésimo símbolo transmitido. Infelizmente, esta informação não é óbvia, e sua demonstração não é simples.

3.4.4 Resumo: Um Receptor Prático

Nesta seção, estudamos um receptor como o mostrado na figura 3.3. Principalmente, mostramos as vantagens de usar um filtro casado como filtro de recepção. Este filtro maximiza a relação sinal ruído em sua saída. Além disso, se amostrarmos sua saída nos instantes $t = kT_s$, obteremos um sinal r_k igual à correlação entre $r(t)$ e $g(t - kT_s)$.

Vimos também que se o pulso conformador satisfaz (3.23), então o sinal r_k não apresenta IIS, ou seja, podemos escrever

$$r_k = s_k + n_k. \quad (3.32)$$

Neste caso, vimos também que duas amostras diferentes do ruído n_k são sempre independentes. Em resumo, podemos determinar nossa decisão de distância mínima para o k -ésimo símbolo transmitido simplesmente passando r_k por um quantizador, como visto na seção 3.2.

3.5 O porquê da distância mínima

Esta seção é um pouco mais teórica, e tenta explicar o porquê de detectores de distância mínima. Para isso, tentaremos estabelecer qual detector minimiza a probabilidade de erro, e em seguida estabeleceremos a equivalência entre este detector e o de distância mínima. Lembrando que r_0 contém toda a informação relevante de $r(t)$ a respeito do símbolo transmitido, basearemos nosso detector no valor de r_0 . Além disso, suporemos, como sempre, que o canal introduza apenas ruído aditivo Gaussiano branco e que apenas um símbolo seja transmitido. Ou seja, $r_0 = s_0 + n_0$, onde s_0 é o símbolo transmitido e n_0 é um ruído Gaussiano.

Considere, então um receptor genérico que, para cada r_0 , decide por um símbolo $\hat{a}(r_0)$. Seja, então, Z_0 o conjunto dos valores de r_0 que levam a uma decisão $\hat{a}(r_0) = a_0$. Ou seja, se $r_0 \in Z_0$, então a decisão será que o símbolo transmitido foi a_0 . No exemplo da figura 3.2, a partir do critério de distância mínima temos que, se $a_0 = -7$, então $Z_0 = \{r_0 < -6\}$. De forma equivalente, podemos definir Z_i , para $i = 0, \dots, N$ como a região que leva a uma decisão a_i . Os conjuntos Z_i são chamados de *regiões de decisão*.

O problema de determinar o detector pode então ser visto como um problema de especificar as regiões Z_i , ou seja, para que valores de r_0 eu devo decidir pelo símbolo a_i . Vamos pensar na probabilidade de uma decisão correta, P_c , para regiões de decisão genéricas. Em particular, dado que o símbolo transmitido foi a_i , a probabilidade de uma decisão correta é igual à probabilidade do sinal recebido cair na região de decisão correspondente ao símbolo a_i , ou seja, $r_0 \in Z_i$. Assim, usando o teorema da probabilidade total, temos que

$$\begin{aligned} P_c &= \sum_{a \in \mathcal{A}} P[\text{acerto} | a \text{ foi transmitido}] P[a] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} P[r_0 \in Z_i | a_i] P[a_i] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{Z_i} f_{R_0}(r_0 | a_i) P[a_i] dr_0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde $f_{R_0}(r | a_i)$ é a densidade de probabilidade de r_0 dado a_i .

Considere, agora, um ponto específico r_0 . Devemos determinar a que região este ponto pertence, de forma a minimizar a probabilidade de erro ou, equivalentemente, maximizar P_c . Para isso, considere o argumento da integral em 3.33. Imagine que $f_{R_0}(r_0 | a_i) P[a_i] > f_{R_0}(r_0 | a_j) P[a_j]$, para $i \neq j$. Assim, se dissermos que $r_0 \in Z_i$, teremos que a contribuição do ponto r_0 para P_c é maior do que se disséssemos que $r_0 \in Z_j$. Pensando da mesma forma para todos os valores de i e j , chegamos à conclusão que r_0 deve pertencer ao conjunto que apresenta o maior valor de $f_{R_0}(r_0 | a_i) P[a_i]$. Em outras palavras, a decisão que maximiza a probabilidade de acerto é dada por

$$\hat{a}(r_0) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} f_{R_0}(r_0 | a) P[a]. \quad (3.34)$$

Duas observações podem ser feitas a partir de 3.34. Em primeiro lugar, o valor de $f_{R_0}(r_0)$ não depende de a . Assim, podemos dividir $f_{R_0}(r_0 | a) P[a]$ por $f_{R_0}(r_0)$ sem

afetar a maximização em 3.34. Isto leva a

$$\hat{a}(r_0) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \frac{f_{R_0}(r_0|a) P[a]}{f_{R_0}(r_0)}. \quad (3.35)$$

Ora, o termo sendo maximizado acima é exatamente $P[a|r_0]$. Este é o valor da probabilidade de a depois que observamos a saída do canal, e é conhecido como a probabilidade a posteriori. Concluimos, assim, que a decisão

$$\hat{a}(r_0) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} P[a|r_0] \quad (3.36)$$

minimiza a probabilidade de erro. Ou seja, o critério de máximo a posteriori em 3.36 é equivalente à minimização da probabilidade de erro.

Um outro critério importante pode ser obtido quando todos os símbolos são igualmente prováveis, ou seja, $P[a] = 1/N, \forall a \in \mathcal{A}$. Neste caso, o termo $P[a]$ não influi na maximização em 3.34, e portanto pode ser ignorado. Isto leva ao critério de *máxima verossimilhança* (MV):

$$\hat{a}(r_0) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} f_{R_0}(r_0|a), \quad (3.37)$$

que, quando os símbolos são igualmente prováveis, também é equivalente à minimização da probabilidade de erro.

É o critério de MV que leva ao elo entre distância mínima e mínima probabilidade de erro. De fato, como $r_0 = s_0 + n_0$, temos que, dado $s_0 = a$, $r_0 \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Em outras palavras, devemos buscar o valor de a que maximiza

$$f_{R_0}(r_0|a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r_0 - a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.38)$$

o que é equivalente a maximizar o logaritmo de $f_{R_0}(r_0|a)$, já que o logaritmo é uma função estritamente crescente. Assim,

$$\begin{aligned} \hat{a}(r_0) &= \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \log(f_{R_0}(r_0|a)) \\ &= \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \log\left(\exp\left(-\frac{(r_0 - a)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\ &= \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(r_0 - a)^2}{2\sigma^2} \\ &= \arg \max_{a \in \mathcal{A}} -\frac{(r_0 - a)^2}{2\sigma^2}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde, na última igualdade, ignoramos os termos que não dependem de a . Agora, note que maximizar o negativo de uma função é igual a minimizar esta função. Note também que o termo $2\sigma^2$ não influi na maximização acima. Finalmente, chegamos a

$$\hat{a}(r_0) = \arg \min_{a \in \mathcal{A}} (r_0 - a)^2, \quad (3.40)$$

que é justamente o critério de distância mínima!

3.6 Exercícios

EXERCÍCIO 3.1:

No lado esquerdo da figura 3.5, temos a resposta ao impulso de alguns filtros de transmissão, marcados a, b, e c. No lado direito, temos a resposta combinada destes filtros com o filtro casado correspondente. Associe as formas de onda do lado direito com as do lado esquerdo.

1. Quais sinais resultam em um sistema sem IIS após o filtro casado se o período de símbolos é $T_s = 0.5$?
2. Quais sinais resultam em um sistema sem IIS após o filtro casado se o período de símbolos é $T_s = 1$?
3. Quais sinais resultam em um sistema sem IIS após o filtro casado se o período de símbolos é $T_s = 2$?

EXERCÍCIO 3.2:

Considere um sistema em banda base onde o ruído é branco, e onde o pulso conformador é $\text{sinc}(2000t)$. Ou seja, o filtro de transmissão é passa-baixas, com frequência de corte de 1kHz. Assuma o uso de um filtro casado na recepção. Qual é a densidade espectral de potência do ruído, dado que a variância do ruído na saída do amostrador é 0.01? Dica: calcule a variância do ruído na saída do amostrador usando o domínio da frequência.

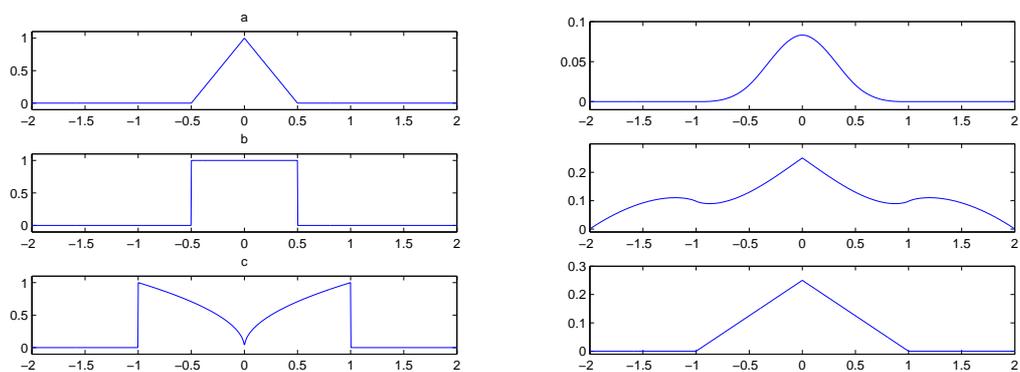


Figura 3.5: Resposta ao impulso de filtros de transmissão e de suas cascatas com os respectivos filtros casados.

Transmissão e Recepção em Banda Passante

Neste capítulo, discutiremos a transmissão de sinais através de canais em banda passante. Ao contrário dos canais em banda base, os canais em banda passante não transmitem em baixas frequências. Entretanto, todas as técnicas vistas até agora assumem transmissão de frequências ao redor de zero. Assim, o tema deste capítulo é como adequar as técnicas para transmissão em banda base à transmissão por canais em banda passante.

Como pré-requisito, usaremos nesta seção algumas propriedades importantes da exponencial complexa. Em primeiro lugar, temos que

$$\exp(j2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t). \quad (4.1)$$

Isto implica, por exemplo, que

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_c t) &= \Re[\exp(j2\pi f_c t)] = \frac{1}{2}(\exp(j2\pi f_c t) + \exp(-j2\pi f_c t)) \\ \sin(2\pi f_c t) &= \Im[\exp(j2\pi f_c t)] = \frac{j}{2}(\exp(-j2\pi f_c t) - \exp(j2\pi f_c t)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\Re[x]$ e $\Im[x]$ denotam, respectivamente, as partes real e imaginária do número complexo x . Outra propriedade importante da exponencial complexa é que, se um sinal $s(t)$ tem transformada $S(f)$, então

$$\mathcal{F}\{\exp(j2\pi f_c t)s(t)\} = S(f - f_c), \quad (4.3)$$

onde $\mathcal{F}\{s(t)\}$ denota a transformada de Fourier de $s(t)$.

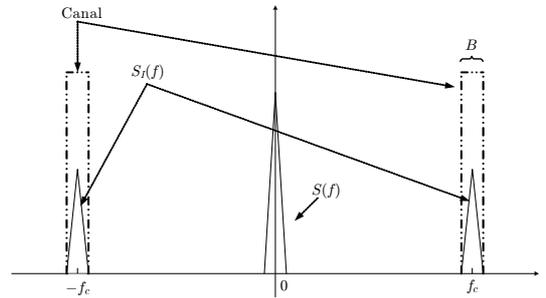


Figura 4.1: Exemplo de um canal em banda passante, bem como da modulação de um sinal em banda base.

4.1 Transmissão em Fase e em Quadratura

Iniciaremos nossa discussão mostrando como sinais em banda passante são produzidos na prática. Nas próximas seções, desenvolveremos uma representação matemática mais conveniente para esses sinais. Como sempre, para facilitar a notação e o entendimento, assumiremos inicialmente a transmissão de apenas um símbolo.

Assim, considere que você queira transmitir M bits por um canal com largura de faixa B , centrado na frequência f_c . Um exemplo de um tal canal está mostrado na figura 4.1. Assim como fizemos em banda base, o objetivo é associar a cada possível grupo de M bits um sinal em banda passante, $s_p(t)$, cuja densidade espectral de potência ocupa a mesma faixa de frequências que o canal.

Dos capítulos anteriores, sabemos produzir um sinal N-PAM em banda base $s(t)$ para transmitir estes M bits:

$$s(t) = s_0 g(t), \quad (4.4)$$

onde $g(t)$ é o pulso conformador. Assumiremos aqui que $g(t)$ tem energia unitária, ou seja, $\langle g(t), g(t) \rangle = 1$. Ora, se $G(f) = 0$ para $|f| > B/2$, a resposta em frequência de $s(t)$, $S(f)$, será como mostrado na figura 4.1. A idéia, então, é obter um sinal em banda passante a partir deste sinal em banda base.

A propriedade da modulação da transformada de Fourier nos dá uma forma óbvia de obter um sinal em banda passante a partir de $s(t)$. De fato, para dois símbolos x_0 e y_0 podemos criar os sinais

$$\begin{aligned} s_I(t) &= \sqrt{2}x_0 g(t) \cos(2\pi f_c t) \\ s_Q(t) &= \sqrt{2}y_0 g(t) \sin(2\pi f_c t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

(A multiplicação de ambos os sinais por $\sqrt{2}$ será explicada adiante.) A resposta em frequência destes sinais é dada por

$$\begin{aligned} S_I(f) &= \frac{x_0}{\sqrt{2}}(G(f - f_c) + G(f + f_c)) \\ S_Q(f) &= \frac{jy_0}{\sqrt{2}}(G(f + f_c) - G(f - f_c)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Observe que $s_I(t)$ e $s_Q(t)$ são obtidos multiplicando $s(t)$ por uma senóide de frequência f_c . Esta senóide é chamada de *portadora*, e f_c é chamado de frequência da portadora. Isto explica o índice em f_c : c vem do inglês *carrier*, que quer dizer portadora.

Na figura 4.1, mostramos $S_I(f)$, que claramente ocupa a mesma faixa de frequências do canal. Portanto, $s_I(t)$ é um sinal adequado para transmissão. O mesmo pode ser dito de $s_Q(t)$, já que ele difere de $s_I(t)$ apenas em fase, e não em amplitude. De fato, $S_I(f)$ e $S_Q(f)$ possuem a mesma resposta em magnitude, ao passo que suas fases diferem de $\pi/2$. Quando isto ocorre, dizemos que os sinais estão em quadratura, de forma que chamamos $x_0g(t)$ e $y_0g(t)$ de sinais em fase e em quadratura, respectivamente. Isto explica a escolha dos índices: I vem do inglês *in phase*, e Q vem de quadratura.

Infelizmente, o uso de $s_I(t)$ ou $s_Q(t)$ para a transmissão não é eficiente. De fato, do exemplo 2.3, na página 25, vemos que a eficiência espectral de $s(t)$ pode chegar a $\nu = 2\text{Mbits/s/Hz}$. Os sinais $s_I(t)$ e $s_Q(t)$ transmitem à mesma taxa de bits por segundo que $s(t)$, assumindo que s_0 , x_0 e y_0 venham todos do mesmo alfabeto N -PAM. Entretanto, mas $s_I(t)$ e $s_Q(t)$ ocupam uma faixa de $B\text{Hz}$, o dobro da de $s(t)$. Em outras palavras, a eficiência espectral destes sinais é apenas metade da de $s(t)$.

Uma possível solução para este problema é transmitir $s_I(t)$ ou $s_Q(t)$ usando faixa lateral única (SSB, do inglês *single sideband*). Entretanto, a modulação SSB envolve filtros com descontinuidades em frequência, que portanto são difíceis de implementar na prática. Daí o interesse na busca por soluções alternativas.

Assim, considere a transmissão de

$$s_p(t) = s_I(t) - s_Q(t). \quad (4.7)$$

(A razão para subtrair $s_Q(t)$, ao invés de somá-lo, também será explicada adiante). Obviamente, $S_p(f) = S_I(f) - S_Q(f)$, de forma que $s_p(t)$ também tem uma resposta em frequência adequada ao canal. Mais ainda, $s_p(t)$ transmite à mesma taxa de símbolos de $s_I(t)$ e $s_Q(t)$. Entretanto, cada “símbolo” de $s_p(t)$ carrega informação

sobre *dois* símbolos, x_0 e y_0 , de forma que sua eficiência espectral é o dobro da de $s_I(t)$ e $s_Q(t)$. Ou seja, com $s_p(t)$ podemos resolver o problema da eficiência espectral. A questão é se é possível e conveniente projetar um receptor para recuperar x_0 e y_0 quando $s_p(t)$ é transmitido.

4.1.1 Recepção em Fase e Quadratura

Vamos agora tentar projetar um receptor de distância mínima para recuperar x_0 a partir da transmissão de $s_p(t)$. Assim, considere o sinal recebido

$$r_p(t) = s_p(t) + n_p(t), \quad (4.8)$$

onde, como anteriormente, $n_p(t)$ é um ruído Gaussiano de média zero e função de autocorrelação $N_0/2\delta(t)$.

Como vimos no capítulo 3, um receptor de distância mínima diz que o símbolo transmitido foi \hat{x}_0 , onde

$$\hat{x}_0 = \arg \min_{x \in \mathcal{A}} \|r_p(t) - \sqrt{2}x_0g(t) \cos(2\pi f_c t)\|^2, \quad (4.9)$$

onde \mathcal{A} é o alfabeto usado para transmissão, ou seja, o conjunto de valores que o símbolo x_0 pode assumir. Em outras palavras, \hat{x}_0 é o símbolo que, se transmitido por um canal sem ruído, geraria o sinal recebido mais próximo de $r_p(t)$. Observe que em (4.9) adotamos uma abordagem em princípio ingênua e ignoramos o fato de que um sinal em quadratura também foi transmitido. Conforme veremos, isso não acarreta nenhuma perda de desempenho.

Também vimos no capítulo 3 que podemos implementar este detector de distância mínima passando $r_p(t)$ por um correlador que calcula $r_I = \langle r_p(t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle$. Ora,

$$\begin{aligned} r_I = & x_0 \langle \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle - \\ & y_0 \langle \sqrt{2}g(t) \sin(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle + \\ & \langle n_p(t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para não interromper o raciocínio, assumiremos agora como verdadeiros alguns resultados que provaremos na próxima seção. Em particular, o primeiro produto interno em (4.10) dá um, o segundo dá zero, e o terceiro resulta em uma variável aleatória Gaussiana n_I de média zero e variância $N_0/2$. Assim, temos que

$$r_I = x_0 + n_I, \quad (4.11)$$

ou seja, o sinal $s_Q(t)$ não tem nenhuma influência sobre a saída do correlador. Em outras palavras, para a recuperação de x_0 , a transmissão ou não de $s_Q(t)$ não faz a menor diferença! Podemos simplesmente dizer que o símbolo transmitido é aquele mais próximo de r_I , como fizemos na seção 3.2.

Obviamente, podemos chegar à mesma conclusão se tentarmos recuperar y_0 calculando

$$r_Q = \langle r_p(t), -\sqrt{2}g(t) \sin(2\pi f_c t) \rangle. \quad (4.12)$$

Ou seja,

$$r_Q = y_0 + n_Q, \quad (4.13)$$

de forma que a transmissão de x_0 não tem influência sobre a recepção de y_0 .

Igualmente importante é o fato de que n_I e n_Q são independentes, conforme mostraremos na próxima seção. Intuitivamente, isto significa que n_Q não traz nenhuma informação sobre n_I , e, portanto, que r_Q não traz nenhuma informação sobre r_I . Em outras palavras, não temos nada a ganhar em usar r_Q para auxiliar na estimação de x_0 .

A conclusão importante desta seção é que podemos transmitir $s_I(t)$ e $s_Q(t)$ ao mesmo tempo, e de forma que podemos recuperar x_0 e y_0 como se o outro símbolo não tivesse sido transmitido. Em outras palavras, o sinal $s_p(t)$ é adequado para transmissão, não resultando em nenhuma perda de taxa ou desempenho.

4.1.2 Transmissão e Recepção de Múltiplos Símbolos

Obviamente, se quisermos transmitir $2KM$ bits, podemos fazer como nos sistemas em banda base e transmitir

$$s_p(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \left[x_k \sqrt{2}g(t - kT_s) \cos(2\pi f_c t) - y_k \sqrt{2}g(t - kT_s) \sin(2\pi f_c t) \right], \quad (4.14)$$

onde x_k e y_k são símbolos de uma constelação N -PAM, com $n = 2^M$. O esquema de transmissão resultante está mostrado na figura 4.2.

Chamamos a atenção para o fato de que a geração e multiplicação de um sinal por uma portadora pode ser facilmente implementado na prática. Em outras palavras, as multiplicações mostrada na figura 4.2, bem como em várias que se seguirão, não representam nenhuma dificuldade prática.

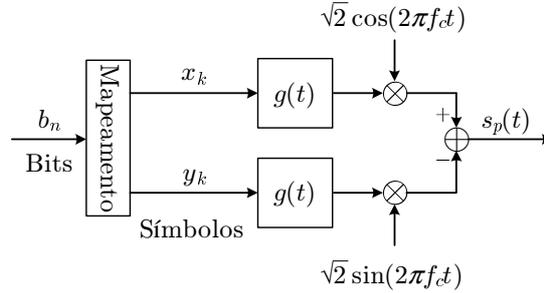


Figura 4.2: Transmissor de um sistema em banda passante.

Na figura 4.3, mostramos um exemplo de um sinal modulado em fase e quadratura. Na figura 4.3(a) mostramos apenas o componente em fase. Obviamente, o componente em quadratura tem uma aparência semelhante. Nesta figura, mostramos também o sinal em banda base que gerou $s_I(t)$, bem como seu negativo. Na figura 4.3(b), mostramos o sinal em fase e quadratura propriamente ditos.

Entretanto, temos aqui um problema igual ao encontrado em sistemas em banda base e discutido na seção 3.3.2: a implementação de um correlador quando vários pulsos são transmitidos não é conveniente. Entretanto, note que

$$\begin{aligned}
 r_I &= \langle r_p(t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle \\
 &= \int \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) r_p(t) dt \\
 &= \langle \sqrt{2}r_p(t) \cos(2\pi f_c t), g(t) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ora, como vimos na seção 3.3.2, a correlação acima pode ser obtida passando o sinal $\sqrt{2}r_p(t) \cos(2\pi f_c t)$ por um filtro casado com $g(t)$, e amostrando sua saída no instante $t = 0$. Da mesma forma, vimos que podemos calcular $\langle r_p(t), \sqrt{2}g(t - T) \cos(2\pi f_c t) \rangle$ amostrando a saída deste filtro casado no instante $t = T_s$, etc. As mesmas observações podem ser feitas para o correlador em quadratura. Assim, o receptor de um sistema em banda passante pode ser implementado como na figura 4.4.

Na próxima seção, buscaremos entender melhor os produtos internos em (4.10). Em seguida, discutiremos uma representação equivalente de sistemas em banda passante que nos permite ignorar a presença de uma portadora, facilitando assim a análise e simulação destes sistemas.

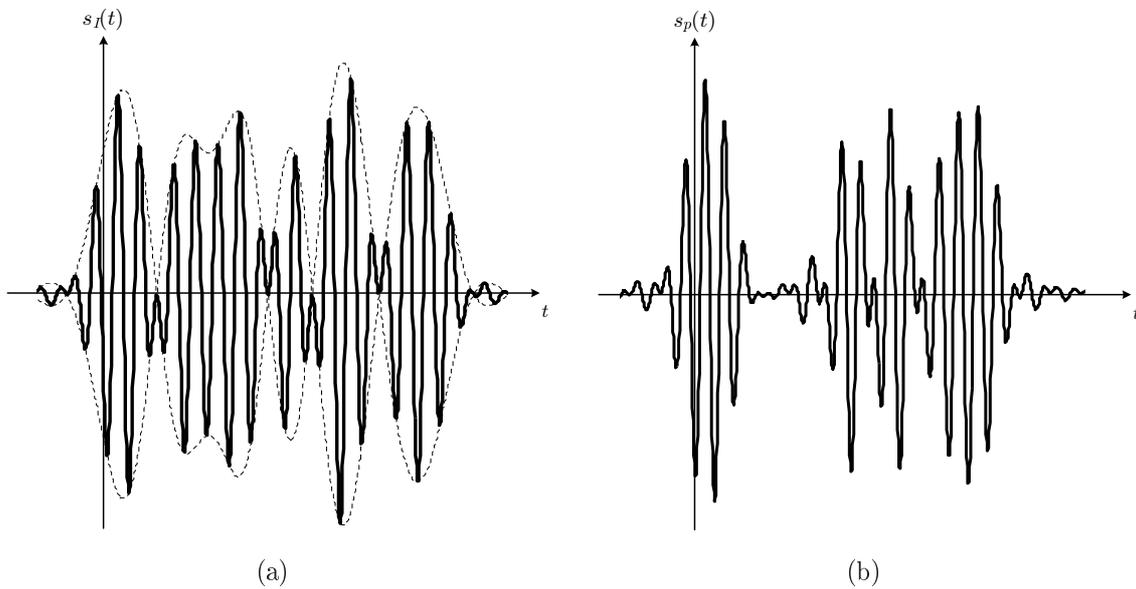


Figura 4.3: Exemplos de um sinal em fase $s_I(t)$ (a) e de um sinal em fase e quadratura $s_p(t)$ (b). Em (a), as linhas tracejadas representam o sinal em banda base equivalente a $s_I(t)$ e seu negativo. O sinal em quadratura tem aparência semelhante a $s_I(t)$.

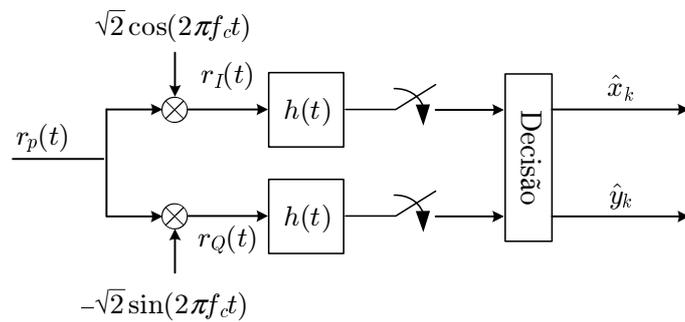


Figura 4.4: Receptor de um sistema em banda passante.

4.2 O Correlador em Banda Passante

Esta seção, onde estudamos com mais detalhes os produtos internos em (4.10), é bem mais matemática. O objetivo é demonstrar as propriedades que levam de (4.10) a (4.11) a (4.12). Estudaremos também as propriedades estatísticas dos ruídos n_I e n_Q .

Para começar, definimos $f(t) = g^2(t)$, de forma que $F(f) = G(f) * G(f)$, onde $*$ denota convolução. Note que $g(t)$ é o pulso conformador em banda base, de forma que $G(f) = 0$ para $|f| > B/2$. Assim, fazendo graficamente a convolução, não é difícil ver que $F(f) = 0$ para $|f| > B$. Além disso, recordamos uma propriedade de transformadas de Fourier que usaremos muito nesta seção: se $X(f)$ é a transformada de um sinal $x(t)$, então

$$\int x(t) dt = X(0). \quad (4.16)$$

Assim, considere o primeiro produto interno de (4.10),

$$\langle \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle = 2 \int g^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt. \quad (4.17)$$

Ora, de igualdades trigonométricas, temos que

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a), \\ \cos^2(a) + \sin^2(a) &= 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle &= 2 \int g^2(t) \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi f_c t)) \right) dt \\ &= \int g^2(t) dt + \int g^2(t) \cos(4\pi f_c t) dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ora, a transformada de Fourier de $y(t) = g^2(t) \cos(4\pi f_c t)$ é $Y(f) = (F(f - 2f_c) + F(f + 2f_c))/2$, onde, lembramos, $f(t) = g^2(t)$. Vamos assumir que $f_c > B$, de forma que os termos $F(f - 2f_c)$ e $F(f + 2f_c)$ não “encavalem”. Por isto entendemos que o espectro de $y(t)$ possa ser desenhado da mesma forma que $S_I(f)$ na figura 4.1, com os espectros $F(f - 2f_c)$ e $F(f + 2f_c)$ ocupando regiões distintas de frequências, agrupadas respectivamente em torno de $2f_c$ e $-2f_c$. Obviamente, $F(f)$ nunca é idealmente limitado em frequência, de forma que esta hipótese é apenas uma aproximação, que aumenta em precisão a medida que f_c se torna maior.

De posse dessa aproximação, temos que $Y(0) = 0$. Portanto,

$$\int g^2(t) \cos(4\pi f_c t) dt = Y(0) = 0. \quad (4.20)$$

Finalmente, concluímos que

$$\langle \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle = \int g^2(t) dt = 1, \quad (4.21)$$

conforme dito na seção anterior. Esta última igualdade segue da hipótese de que o pulso tem energia unitária. A demonstração que

$$\langle \sqrt{2}g(t) \sin(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \sin(2\pi f_c t) \rangle = 1 \quad (4.22)$$

segue as mesmas linhas.

Podemos agora justificar o uso de $\sqrt{2}$ na definição de $s_I(t)$ e $s_Q(t)$. Este é um fator dito *normalizante*, por fazer com que os produtos internos considerados no parágrafo anterior sejam iguais a 1, e não 1/2. Caso este fator não fosse utilizado, teríamos por exemplo que $r_I = x_0/2 + n_I/2$, o que não é exatamente conveniente.

Vamos considerar agora a segunda correlação de (4.10). Podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{2}g(t) \sin(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle &= 2 \int g^2(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) dt \\ &= \int g^2(t) \sin(4\pi f_c t) dt, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde usamos a igualdade $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$. Assim, se $f(t) = g^2(t)$ e $x(t) \triangleq g^2(t) \sin(4\pi f_c t)$, temos que $X(f) = j(F(f + 2f_c) - F(f - 2f_c))/2$. Assuma, como sempre, que $F(f) = 0$ para $|f| > B$, e que $f_c > B$, de forma que $(F(f + 2f_c) e F(f - 2f_c))$ não encavalam. Temos então que $X(0) = 0$, e portanto

$$\langle \sqrt{2}g(t) \sin(2\pi f_c t), \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) \rangle = 0, \quad (4.24)$$

como desejávamos. Em resumo, vemos que os componentes em fase e em quadratura são ortogonais.

4.2.1 Estatísticas do Ruído

Vamos analisar agora as estatísticas dos componentes de ruído n_I e n_Q na saída do correlador. Em primeiro lugar, observe que o correlador é um filtro linear. Assim,

como $n_p(t)$ é um ruído Gaussiano, n_I também é Gaussiano. Mais ainda,

$$\begin{aligned} E[n_I] &= E \left[\int n_p(t) \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \right] \\ &= \int E[n_p(t)] \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Falta, assim, caracterizar a variância de n_I . Para isso, note que

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 &= E[n_I^2] \\ &= E \left[\int n_p(t) \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \int n_p(\tau) \sqrt{2}g(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) d\tau \right] \\ &= \iint \left[E[n_p(t)n_p(\tau)] \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \right] \sqrt{2}g(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde, na primeira passagem, usamos duas variáveis de integração distintas para escrever n_I e, na segunda, agrupamos os termos de acordo com o nosso interesse, lembrando que a esperança é um operador linear. Como $E[n_p(t)n_p(\tau)] = N_0/2\delta(t - \tau)$, temos que

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 &= \iint \left[\frac{N_0}{2} \delta(t - \tau) \sqrt{2}g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \right] \sqrt{2}g(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int 2g^2(\tau) \cos^2(2\pi f_c \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ora, no começo desta seção mostramos que a integral acima dá um, o que nos leva a

$$\sigma_I^2 = \frac{N_0}{2}. \quad (4.28)$$

Evidentemente, os cálculos da média e variância de n_Q são semelhantes e produzem os mesmos resultados. Assim, temos que $n_I \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$ e $n_Q \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$.

Finalmente, falta mostrar que os componentes de ruído na saída dos dois correladores, n_I e n_Q , são independentes. Para isto, devemos apenas mostrar que eles

são descorrelacionados, já que ambos são Gaussianos. Assim,

$$\begin{aligned}
 E[n_I n_Q] &= E \left[\int n_p(t) \sqrt{2} g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \int n_p(\tau) \sqrt{2} g(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) d\tau \right] \\
 &= \iint \left[E[n_p(t) n_p(\tau)] \sqrt{2} g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \right] \sqrt{2} g(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) d\tau \\
 &= \iint \left[\frac{N_0}{2} \delta(t - \tau) \sqrt{2} g(t) \cos(2\pi f_c t) dt \right] \sqrt{2} g(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) d\tau \quad (4.29) \\
 &= \frac{N_0}{2} \int 2g^2(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \sin(2\pi f_c \tau) d\tau \\
 &= \frac{N_0}{2} \int g^2(\tau) \sin(4\pi f_c \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Ora, mostramos anteriormente nesta seção que a integral acima é nula, estabelecendo que de fato n_I e n_Q são descorrelacionados.

4.3 Espaço de Sinais 2-D

Assim como fizemos no capítulo 3, vamos agora resumir as conclusões das seções anteriores e determinar como deve ser o dispositivo de decisão mostrado na figura 4.4. Para isso, assumiremos novamente a transmissão de um único pulso, e usaremos o conceito de espaço de sinais, introduzido na seção 3.2.

A primeira observação que fazemos aqui é que, de acordo com os resultados da seção anterior, as funções $g_I(t) = g(t) \cos(2\pi f_c t)$ e $g_Q(t) = -g(t) \sin(2\pi f_c t)$ são ortogonais e têm módulo 1. Ou seja, podemos definir um espaço bidimensional de funções

$$V = \{a_I g_I(t) + b_Q g_Q(t), \text{ para } a_I, b_I \in \mathbb{R}\}, \quad (4.30)$$

cuja base ortonormal é dada por $g_I(t)$ e $g_Q(t)$. Assim, o sinal transmitido, dado por

$$s_p(t) = x_0 g_I(t) + y_0 g_Q(t), \quad (4.31)$$

é um ponto em V . Na figura 4.5, mostramos os possíveis valores de $s_p(t)$ quando x_0 e y_0 são escolhido a partir de uma constelação 4-PAM.

Por outro lado, vimos na seção 4.1 que os valores de $r_I = \langle r_p(t), g_I(t) \rangle$ e $r_Q = \langle r_p(t), g_Q(t) \rangle$ são a única informação necessária para estimarmos os símbolos transmitidos de acordo com o critério de mínima distância. Assim, defina o vetor

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} r_I \\ r_Q \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

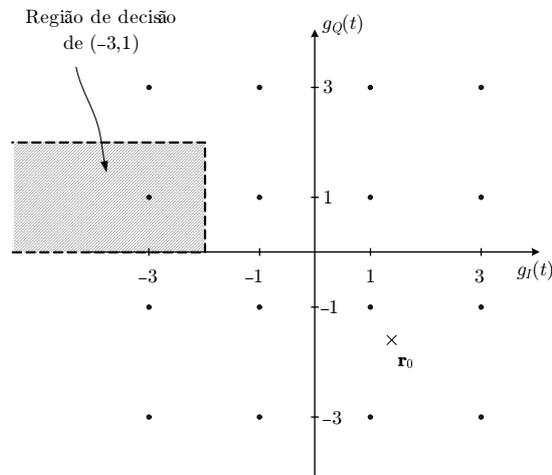


Figura 4.5: Espaço de sinais bidimensional para modulação em fase e em quadratura. Os pontos correspondem aos possíveis valores de $s_p(t)$ quando os símbolos em fase e em quadratura vêm de um alfabeto 4-PAM. O \times corresponde à projeção ortogonal do sinal recebido no espaço de sinais. A região de decisão de $x_0 = -3$ e $y_0 = 1$ também é mostrada.

Como $g_I(t)$ e $g_Q(t)$ são uma base ortonormal de V , temos do apêndice B que \mathbf{r}_0 é a projeção ortogonal de $r(t)$ em V .

Lembre-se que o sinal recebido em geral não pertence a V . Por isso não representamos $r_p(t)$ na figura 4.5: seria difícil representar um ponto que não pertence ao plano. Entretanto, \mathbf{r}_0 é a projeção ortogonal de $r_p(t)$ no plano V . Assim, da mesma forma que na seção 4.1, temos que o símbolo que minimiza a distância até $r_p(t)$ é o mesmo que minimiza a distância até \mathbf{r}_0 . Esta observação facilita muito a implementação do algoritmo de decisão. Por exemplo, é evidente que para o valor de \mathbf{r}_0 mostrado na figura 4.5, devemos decidir que o símbolo transmitido foi $x_0 = 1$ e $y_0 = -1$.

Em outras palavras, o dispositivo de decisão divide o espaço de sinais em regiões de decisão. Se o vetor \mathbf{r}_0 pertence à região de decisão de um determinado símbolo, este será o símbolo estimado. Evidentemente, a região de decisão de um determinado símbolo é o conjunto de pontos \mathbf{r}_0 que estão mais próximos deste símbolo do que de qualquer outro símbolo. Na figura 4.5, mostramos a região de decisão de $x_0 = -3$ e $y_0 = 1$.

As observações desta seção nos levam a crer que tudo o que precisamos saber

sobre o sistema de transmissão pode ser representado por pontos em um plano. Na seqüência, mostraremos que isto de fato é verdade. Antes de prosseguirmos, lembramos que um ponto em um plano também pode ser usado para representar uma variável complexa: o eixo x representa sua parte real, ao passo que o eixo y representa sua parte imaginária.

4.4 Representação em Banda Base de um Sinal em Banda Passante

De certa forma, a principal conclusão a que chegaremos neste capítulo é que um sistema em banda passante pode ser representado por um sistema equivalente em banda base. Este sistema equivalente assume valores complexos, onde sua parte real corresponde ao sinal em fase e sua parte imaginária corresponde ao sinal em quadratura. Quando dizemos que os sistemas são equivalentes, queremos dizer que dado um é possível determinar o outro, e vice-versa. Nesta seção, estabeleceremos esta equivalência de uma forma mais específica.

Uma vantagem desta equivalência é que, com ela, podemos lidar apenas com o sinal em banda base. Com isso, podemos ignorar a presença de portadoras, facilitando a simulação e a análise de desempenho destes sistemas. De fato, imagine que você queira simular um sistema que transmite um símbolo por segundo usando uma portadora a 1GHz (valor próximo ao usado em sistemas celulares, por exemplo). Neste caso, para gerar digitalmente a portadora, deveríamos amostrá-la a 2GHZ. Ou seja, deveríamos produzir 2 bilhões de amostras do sinal transmitido para cada símbolo que desejamos transmitir, o que é evidentemente inviável.

Esta seção poderia ser resumida em apenas uma frase: toda a informação relevante a respeito de um sinal em banda passante, como o mostrado na figura 4.6(a), está contida em um sinal equivalente em banda base, como o mostrado na figura 4.6(b), e no valor de f_c . De fato, esta informação parece óbvia: com algumas operações simples de descrever em palavras é possível obter $S_p(f)$ a partir de $S(f)$ e vice-versa. No restante desta seção, trataremos desta equivalência entre um sinal em banda passante e seu equivalente em banda base de forma mais sistemática. Especificamente, veremos como obter um equivalente em banda base de um sinal em banda passante no domínio do tempo e da frequência. Para mostrar que os sinais são de fato equivalentes, mostraremos também que dado um sinal em banda

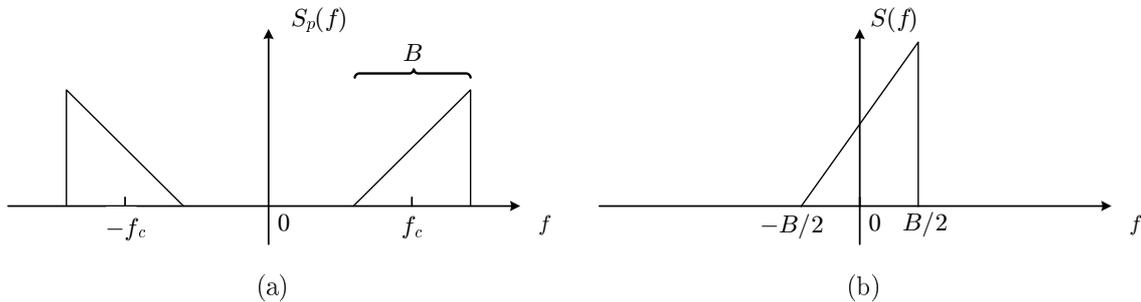


Figura 4.6: Um sinal em banda passante (a) e seu equivalente em banda base (b).

base, é possível “desfazer” essas operações, recuperando o sinal em banda passante correspondente.

Uma primeira observação importante: $S_p(f)$ na figura 4.6(a) é uma função par. Isto ocorre porque $s_p(t)$ é um sinal real, pois representa uma corrente ou voltagem que de fato existe. Ora, a transformada de Fourier de um sinal real possui duas simetrias: sua magnitude é par, e sua fase é ímpar. Em outras palavras, para um sinal real,

$$S_p(f) = S_p^*(-f). \quad (4.33)$$

Note também que estas simetrias não podem ser observadas na figura 4.6(b). Isto indica que $s(t)$ assume valores complexos. Entretanto, não existe uma corrente complexa, ou um canal complexo. Assim, $s(t)$ é usado apenas por trazer um representação equivalente e conveniente de $s_p(t)$. De fato, as grandezas complexas que encontraremos deste ponto em diante são apenas uma *representação* das grandezas reais de fato presentes em sistemas de comunicações.

4.4.1 De Banda Passante para Banda Base

Descreveremos agora um procedimento que nos permite obter $s(t)$ a partir de $s_p(t)$. Para começar, assuma que nós tenhamos acesso a um sinal que contenha apenas as frequências positivas de $s_p(t)$. Este sinal é conhecido como o *sinal analítico*, e é denotado por $\tilde{s}_p(t)$. Por exemplo, na figura 4.7 mostramos a resposta em frequência do sinal analítico correspondente ao sinal da figura 4.6(a). Para obter $S(f)$, devemos apenas deslocar $\tilde{S}_p(f)$ para a esquerda de f_c . Temos, então que $s(f) = \tilde{S}_p(f + f_c)\sqrt{2}$, onde a razão para o aparecimento de $\sqrt{2}$ ficará clara adiante. Assim, usando a pro-

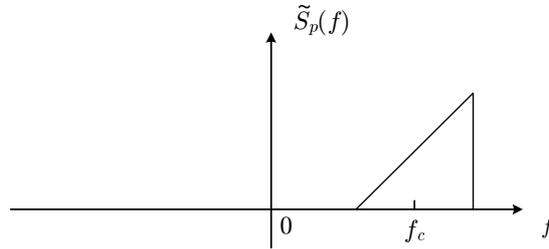


Figura 4.7: Resposta em frequência do sinal analítico.

priedade de modulação de transformadas de Fourier, concluímos que

$$s(t) = \sqrt{2} \exp(-j2\pi f_c t) \tilde{s}_p(t). \quad (4.34)$$

Agora só precisamos estabelecer um procedimento para a obtenção de $\tilde{s}_p(t)$ a partir de $s_p(t)$. Ora, isto pode ser facilmente realizado por um filtro chamado de *divisor de fase*, cuja resposta ao impulso é dada por

$$\Phi(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } f \geq 0 \\ 0 & \text{se } f < 0 \end{cases}. \quad (4.35)$$

Infelizmente, a resposta ao impulso deste filtro não é real, o que é óbvio devido à ausência de simetria de sua resposta em frequência.

Muito mais fácil de implementar é a chamada *transformada de Hilbert*, que pode ser implementada com um filtro linear cuja resposta ao impulso é dada por

$$H(f) = \begin{cases} -j & \text{se } f > 0 \\ 0 & \text{se } f = 0 \\ j & \text{se } f < 0 \end{cases}. \quad (4.36)$$

Obviamente,

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}(1 + jH(f)). \quad (4.37)$$

Entretanto, note que $H(f) = H^*(-f)$, de forma que a resposta ao impulso do filtro da transformação de Hilbert é real. De fato, pode-se mostrar que

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}. \quad (4.38)$$

A transformada de Hilbert de $x(t)$ é denotada $\check{x}(t)$. É evidente que se $x(t)$ é um sinal real, $\check{x}(t)$ também o é.

Em resumo, de (4.37) podemos escrever que

$$\begin{aligned}\tilde{S}_p(f) &= \Phi(f)S_p(f) \\ &= \frac{1}{2}(1 + jH(f))S_p(f) \\ &= \frac{1}{2}(S_p(f) + jH(f)S_p(f)).\end{aligned}\tag{4.39}$$

Em outras palavras,

$$\tilde{s}_p(t) = \frac{1}{2}(s_p(t) + j\check{s}_p(t)).\tag{4.40}$$

Ou seja, as partes real e imaginária do sinal analítico podem ser facilmente calculadas com filtros reais.

Em resumo, podemos representar $\tilde{s}_p(t)$ usando dois circuitos: um, contendo $s_p(t)$, corresponde à parte real de $\tilde{s}_p(t)$; outro, contendo $\check{s}_p(t)$, corresponde à parte sua imaginária. Note, entretanto, que $\tilde{s}_p(t)$ possui apenas metade dos componentes em frequência de $s_p(t)$. Assim, a energia de $\tilde{s}_p(t)$ é metade da de $s_p(t)$.

Para finalizar o cálculo de $s(t)$ a partir de $s_p(t)$, devemos deslocar o espectro de $\tilde{s}_p(t)$ para a esquerda de f_c . Além disso, como $s(t)$ deve ser equivalente a $s_p(t)$, gostaríamos que ambos tivessem a mesma energia. Para isso, devemos multiplicar $\tilde{s}_p(t)$ por $\sqrt{2}$, já que a energia de $\tilde{s}_p(t)$ é metade da de $s_p(t)$. Desta forma, fazemos

$$\begin{aligned}s(t) &= \sqrt{2} \exp(-j2\pi f_c t) \tilde{s}_p(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-j2\pi f_c t) (s_p(t) + j\check{s}_p(t)).\end{aligned}\tag{4.41}$$

Assim, o sinal $s(t)$ é o equivalente em banda base de $s_p(t)$, e é também chamado de *envelope complexo*.

É interessante notar que $H(f)$ tem uma descontinuidade em 0, o que pode levar você a pensar que ele é de difícil implementação. Entretanto, note que o sinal a ser filtrado, $s_p(t)$ não tem componentes em frequência ao redor de 0. Em outras palavras, o comportamento de $H(f)$ ao redor de 0 é irrelevante, o que certamente facilita sua implementação.

4.4.2 De Banda Base para Banda Passante

O procedimento na direção reversa, ou seja, o cálculo de $s_p(t)$ a partir de $s(t)$, é também bastante simples. De fato, de (4.41), temos que

$$s_p(t) + j\check{s}_p(t) = \sqrt{2} \exp(j2\pi f_c t) s(t).\tag{4.42}$$

Entretanto, tanto $s_p(t)$ quanto $\check{s}(t)$ são sinais reais (uma conveniência possibilitada pelo uso da transformada de Hilbert). Ou seja, a parte real do lado esquerdo de (4.42) é igual a $s_p(t)$. Assim, considerando apenas a parte real de ambos os lados de (4.42), temos que

$$s_p(t) = \sqrt{2}\Re[\exp(j2\pi f_c t)s(t)]. \quad (4.43)$$

Podemos também obter esta relação em frequência. De fato, o sinal $s_p(t)$ é real, de forma que $S_p(f) = S_p^*(-f)$. Ora, por definição, $S_p(f) = \tilde{S}_p(f)$ para $f > 0$. A relação para $f < 0$ pode ser obtida levando em conta a simetria de $S_p(f)$. De fato, se $f < 0$, temos que $S_p(f) = S_p^*(-f) = \tilde{S}_p^*(-f)$. Em outras palavras,

$$S_p(f) = \begin{cases} \tilde{S}_p(f) & \text{se } f > 0 \\ \tilde{S}_p^*(-f) & \text{se } f < 0 \end{cases}. \quad (4.44)$$

Como $\tilde{S}_p(f) = 0$ para $f < 0$, concluímos então que

$$S_p(f) = \tilde{S}_p(f) + \tilde{S}_p^*(-f). \quad (4.45)$$

Finalmente, lembrando que $\tilde{S}_p(f) = S(f - f_c)/\sqrt{2}$, chegamos à relação desejada:

$$S_p(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(S(f - f_c) + S^*(-f - f_c)). \quad (4.46)$$

Uma relação equivalente e igualmente útil pode ser obtida se escrevermos $s(t) = x(t) + jy(t)$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, as partes real e imaginária de $s(t)$. Substituindo esta definição em (4.42) temos, então, que $s(t)$ é o equivalente em banda passante de

$$\begin{aligned} s_p(t) &= \sqrt{2}\Re[\exp(j2\pi f_c t)s(t)] \\ &= \sqrt{2}x(t) \cos(j2\pi f_c t) - \sqrt{2}y(t) \sin(j2\pi f_c t). \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.4.3 Filtragem em Banda Passante

Conforme veremos, muitas vezes o canal de comunicações normalmente introduz mais do que apenas ruído. Estas outras distorções introduzidas canais de comunicações são normalmente modeladas como um filtro linear. Veremos mais consequências deste modelamento, bem como formas de combater estas distorções, nos próximos capítulos.

Assim, para que possamos tratar de um sistema completo em banda passante considerando apenas os equivalentes em banda base, devemos então estabelecer o que ocorre com a filtragem linear de sinais em banda passante. Para isso, considere que o sinal em banda passante $s_p(t)$ passa por um filtro linear com resposta ao impulso $h_p(t)$. Obviamente, o sinal $z_p(t)$ na saída do filtro também é em banda passante, já que $Z_p(f) = S_p(f)H_p(f)$ e $S_p(f)$ é em banda passante. Nesta seção, determinaremos o filtro linear que leva do equivalente em banda base de $s_p(t)$, $s(t)$, ao equivalente em banda base de $z_p(t)$, $z(t)$.

Ora, conforme vimos na seção 4.4.1, $Z(f) = \sqrt{2}\tilde{Z}_p(f + f_c)$. Recordando, $\tilde{Z}_p(f)$ é o sinal analítico de $Z_p(f)$, ou seja, $\tilde{Z}_p(f)$ contém apenas as frequências positivas de $Z_p(f)$. Assim, como $Z_p(f) = S_p(f)H_p(f)$, temos que $\tilde{Z}_p(f) = \tilde{H}_p(f)\tilde{S}_p(f)$. Portanto $Z(f) = \sqrt{2}\tilde{H}_p(f + f_c)\tilde{S}_p(f + f_c)$. Finalmente, como $S(f)$ é por definição dado por $S(f) = \sqrt{2}\tilde{S}_p(f + f_c)$, chegamos a

$$Z(f) = H(f)S(f), \quad (4.48)$$

onde

$$H(f) = \tilde{H}_p(f + f_c) \quad (4.49)$$

é o equivalente em banda base da resposta em frequência do canal. Note que, o equivalente em banda base de um filtro linear *não* envolve a divisão por $\sqrt{2}$.

4.5 Equivalente em Banda Base da Transmissão em Fase e em Quadratura

Depois de todo este desvio matemático, onde determinamos equivalentes em banda base de sinais em banda passante, podemos passar à aplicação prática destes conceitos. Veremos, nesta seção, como todo o sistema de modulação e demodulação podem ser representados em banda base.

Em primeiro lugar, seja $s_p(t)$ o sinal modulado em banda passante obtido em (4.14) e repetido aqui por conveniência:

$$s_p(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \left[x_k \sqrt{2}g(t - kT_s) \cos(2\pi f_c t) - y_k \sqrt{2}g(t - kT_s) \sin(2\pi f_c t) \right]. \quad (4.50)$$

Comparando (4.47) com (4.50), fica claro que

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} x_k g(t - kT_s) \\ y(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} y_k g(t - kT_s). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Em outras palavras, o equivalente em banda base do sinal modulado em banda passante $s_p(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} s(t) &= x(t) + jy(t) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} (x_k + jy_k) g(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - kT_s), \end{aligned} \tag{4.52}$$

onde $s_k = x_k + jy_k$. Desta discussão, podemos ver porque o componente em quadratura do sinal em (4.50) é multiplicado por -1 : isto simplifica a comparação entre (4.47) e (4.50).

Mais ainda, considere que x_k e y_k tragam informação sobre M_1 e M_2 bits, respectivamente. Ou seja, x_k e y_k pertencem, respectivamente, a uma modulação N_1 -PAM e N_2 -PAM, com $N_1 = 2^{M_1}$ e $N_2 = 2^{M_2}$. Vemos em (4.52) que $s(t)$ traz informação sobre $M = M_1 + M_2$ bits. Além disto, $s(t)$ pode ser visto como um sinal PAM, onde agora os símbolos assumem valores complexos $s_k = x_k + jy_k$, de forma que x_k modula o componente em fase do sinal transmitido e y_k modula seu componente em quadratura. Por isto, este tipo de modulação é chamado de N -QAM, do inglês *quadrature amplitude modulation*, onde $N = 2^M$.

Finalmente, note que o símbolo complexo s_k também pode ser representado como na figura 4.5. Para isso, devemos apenas lembrar que as variáveis complexas podem ser representadas em um plano, onde o eixo x corresponde à parte real da variável e o eixo y corresponde à sua parte imaginária.

4.5.1 Equivalente em Banda Base do Receptor em Banda Passante

Falta agora apenas estabelecer um equivalente em banda base para o detector. Para isso, vamos considerar novamente a transmissão de um único pulso. Retomando

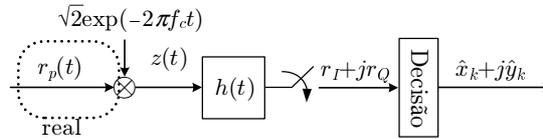


Figura 4.8: Equivalente complexo ao filtro de recepção da figura 4.4.

a figura 4.4, defina a variável complexa

$$z(t) = r_I(t) + jr_Q(t). \quad (4.53)$$

Da figura 4.4 fica claro que $z(t) = \sqrt{2}\exp(-2\pi f_c t)r(t)$. Além disto, esta variável contém toda a informação necessária para a recepção. De fato,

$$z(t) * h(t) = r_I(t) * h(t) + jr_Q(t) * h(t). \quad (4.54)$$

Amostrando este sinal em $t = 0$, obtemos $r_I + jr_Q$. Como vimos na seção 4.1, a partir real deste sinal tem as informações necessárias para a recuperação de x_0 , ao passo que sua parte imaginária tem as informações necessárias para a recuperação de y_0 .

Este resultado pode obviamente ser estendido para o caso em que vários pulsos são transmitidos. Em outras palavras, o receptor da figura 4.4 é equivalente ao da figura 4.8. A única diferença é que o ramo superior do receptor da 4.4 é representado na parte real das variáveis da figura 4.8, ao passo que a parte imaginária destas variáveis traz a informação do ramo inferior. Note que o sinal $r_p(t)$ é o único sinal real na figura 4.8, conforme explicitado pela caixa tracejada.

A comparação entre as figura 4.4 e 4.8 é interessante por mais um motivo. Temos aqui um exemplo de como sistemas com variáveis complexas são de fato implementados: temos sempre dois circuitos, um que representa a parte real das variáveis, outro que representa a parte imaginária.

Voltando ao receptor, vamos estudar com mais detalhes o que acontece com o sinal $z(t)$. Para isso, assumo, temporariamente, que transmitimos o sinal mostrado na figura 4.6(a), e que $r_p(t) = s_p(t)$, ou seja, o canal não introduz nenhuma distorção. Como $z(t) = \sqrt{2}\exp(-2\pi f_c t)r_p(t)$, temos que $Z(f) = \sqrt{2}R_p(f + f_c)$, e seu espectro está mostrado na figura 4.9. Obviamente, $z(t)$ não é o equivalente em banda base de $r_p(t)$, pois ele possui componentes em frequências centradas ao redor de $-2f_c$.

Lembre-se, entretanto, que a resposta em frequência do filtro de recepção está limitada a $|f| < B/2$, ou seja, este é um filtro passa-baixas. Na figura 4.9 mostramos

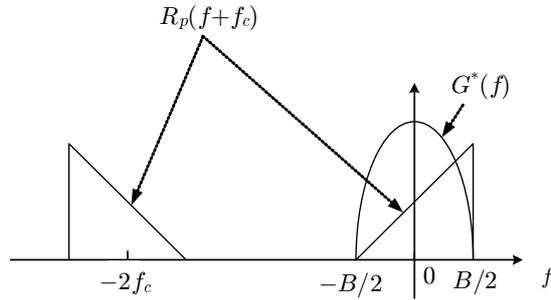


Figura 4.9: Resposta em frequência de $r_p(t) \exp(-2\pi f_c t)$ para o sinal em banda passante da figura 4.4. A resposta de um filtro casado também é mostrada.

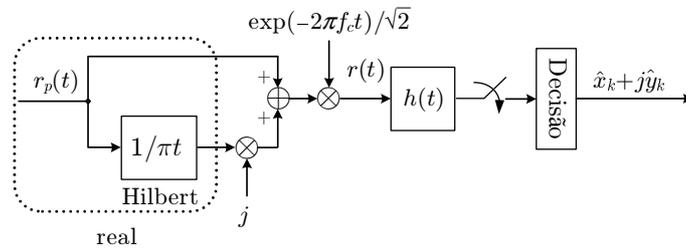


Figura 4.10: Obtenção do equivalente em banda base ao filtro de recepção da figura 4.4.

também a resposta em frequência de um filtro de recepção genérico. Claramente, a resposta do filtro casado ao sinal $z(t)$ é igual à sua resposta ao equivalente em banda básica de $r_p(t)$, cuja resposta em frequência está mostrada na figura 4.6(b).

Em resumo, o receptor mostrado na figura 4.8 pode ser equivalentemente implementado se primeiro determinarmos o equivalente em banda base do sinal transmitido e em seguida passarmos este sinal pelo filtro de recepção. Esta configuração alternativa está mostrada na figura 4.10. Note que o equivalente em banda base do sinal recebido é implementado nesta figura de acordo com (4.41). Ainda que a implementação na figura 4.10 seja mais complexa do que o receptor da figura 4.8, o uso do filtro de Hilbert tem algumas vantagens práticas, principalmente em termos de sincronização, e portanto não deve ser descartado.

4.5.2 Equivalente em Banda Base do Sistema de Transmissão

A observação essencial de toda essa discussão é que, como já dissemos, o equivalente em banda base $r(t)$ traz toda a informação necessária sobre o sinal em banda

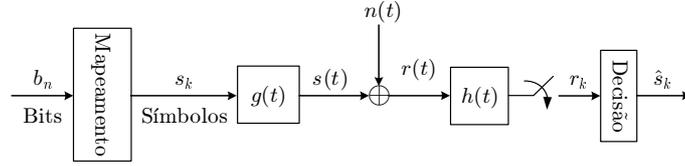


Figura 4.11: Equivalente em banda base de um sistema de transmissão de dados em banda passante. Fora os bits, os outros sinais são complexos.

passante $r_p(t)$. Em outras palavras, podemos trabalhar diretamente com $r(t)$ no receptor para recuperar os símbolos transmitidos. Assim, se for possível determinar $r(t)$ a partir de $s(t)$, para fins de simulação e análise teremos conseguido eliminar todo o processamento em banda passante, sobrando assim apenas o sistema equivalente em banda base.

Ora, sabemos que $r_p(t) = s_p(t) + n_p(t)$. Observe, também, que todo o procedimento que leva do sinal em banda passante a seu equivalente em banda base, conforme descrito na seção 4.4 é linear. Ou seja, $r(t) = s(t) + n(t)$, onde $s(t)$, dado por (4.52), é o equivalente em banda base do sinal transmitido.

A determinação das características estatísticas de $n(t)$ não é muito simples, e o tratamento que daremos aqui é simplesmente intuitivo. Para isso, lembre-se que, como vimos na seção anterior, a resposta do filtro casado a $r(t)$ ou $z(t)$ é a mesma. Assim, podemos dizer que $n(t)$ é o componente de ruído de $z(t)$, ao invés de lidar com o equivalente em banda base de $n_p(t)$. Ora, como vimos na seção 4.1, este ruído pode ser escrito como

$$n(t) = n_I(t) + jn_Q(t), \quad (4.55)$$

onde $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ são dois processos estocásticos Gaussianos brancos de média nula. Além disso, eles são decorrelacionados, e é fácil mostrar que, como $E[n(t)n(\tau)] = 0$ se $t \neq \tau$, então $E[n_I(t)n_I(\tau)] = E[n_Q(t)n_Q(\tau)] = 0$ se $t \neq \tau$. Em outras palavras, temos que

$$\begin{aligned} E[n_I(t)n_I(\tau)] &= E[n_Q(t)n_Q(\tau)] = \frac{N_0}{2}\delta(t - \tau) \\ E[n_I(t)n_Q(\tau)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Em resumo, para fins de simulação e análise de desempenho, podemos representar todo o esquema de modulação e recepção em banda passante de acordo com o equivalente em banda base mostrado na figura 4.11. Observe que nesta figura todos os sinais (a menos dos bits) são complexos.

Finalmente, notamos que o sinal $r(t)$, ao passar pelo filtro casado e o amostrador, resulta em $r_I + jr_Q$. Isto porque a resposta do filtro casado a $r(t)$ e $z(t)$ é a mesma. Como para o transmissor, se pensarmos no plano da figura 4.5 como o plano complexo, o vetor \mathbf{r}_0 nesta figura se torna a representação gráfica do valor $r_I + jr_Q$. Em outras palavras, o espaço de sinais mostrado na figura 4.5 também pode ser usado para representar o equivalente em banda base do sistema de transmissão. Mais ainda, assumindo que o filtro de transmissão seja raiz de Nyquist e o filtro de recepção seja casado, concluímos que o sinal na saída do amostrador na figura 4.11

$$r_k = s_k + n_k, \quad (4.57)$$

onde s_k é o símbolo complexo transmitido e n_k é uma seqüência independente e identicamente distribuída de ruído aditivo Gaussiano complexo. Este é o chamado *modelo discreto do canal*, e serve tanto para banda base quanto para banda passante.

4.6 Constelações Alternativas

A modulação QAM nos permite maior flexibilidade na escolha dos pontos da constelação quando comparado a sistemas PAM. Afinal de contas, estamos agora trabalhando no plano, e não precisamos nos restringir a escolher um sinal N-PAM para os componentes em fase e em quadratura. Nesta seção, discutiremos uma outra constelação muito usada na prática, conhecida como N-PSK, do inglês *phase-shift keying*. Neste tipo de modulação, os símbolos são dados por

$$a_i = r \exp\left(\frac{j2\pi}{N}i\right), \text{ para } i = 0, \dots, N - 1. \quad (4.58)$$

Note que todos os pontos da constelação possuem o mesmo módulo r , de forma que a informação sobre o símbolo transmitido está contida apenas na sua fase. Esta observação justifica o nome deste tipo de modulação.

Constelações N-PSK têm algumas vantagens práticas. O módulo constante permite a implementação de receptores mais simples, bem como o uso de amplificadores mais baratos na transmissão. Note também que a constelação 2-PSK coincide com a 2-PAM. Por isso, normalmente chamamos 2-PAM de BPSK, do inglês *binary phase-shift keying*. Temos também que uma constelação 4-PSK corresponde à rotação de um 4-QAM. Na figura 4.12, vemos alguns exemplos de modulações PSK.

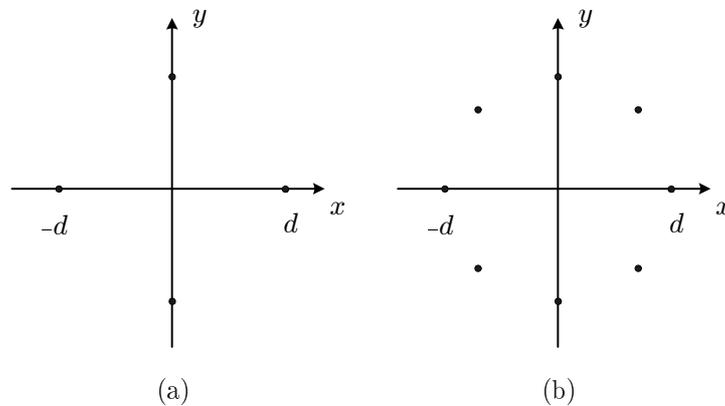


Figura 4.12: Exemplos de modulações PSK: 4-PSK (a) e 8-PSK (b)

4.7 Exercícios

EXERCÍCIO 4.1:

Às vezes, não é possível estimar exatamente a frequência da portadora no transmissor. Esse exercício investiga o que ocorre quando há um erro nesta estimativa.

1. Qual o equivalente em banda base de $r_p(t) = \cos(2\pi 100t) - \sin(2\pi 100t)$ em relação a uma portadora com $f_c = 99.875\text{Hz}$?
2. Imagine que o equivalente em banda base é amostrado uma vez por segundo. Plote no plano complexo as primeiras oito amostras.

EXERCÍCIO 4.2:

Suponha que você use uma modulação 4-QAM para transmitir um único símbolo a uma frequência de 1kHz com pulso conformador $g(t) = 1$ para $-0.5 < t < 0.5$ e zero fora deste intervalo. O sinal recebido é dado por $r(t) = g(t) \cos(2000\pi t + \pi/6)$. Qual foi o símbolo transmitido, de acordo com o critério de distância mínima?

EXERCÍCIO 4.3:

Considere o mesmo sistema do problema anterior. Suponha que o sinal recebido seja igual ao transmitido, ou seja, o canal não introduz nenhuma distorção. Entretanto, a fase da portadora no receptor está errada. Ou seja, enquanto as senóides do

transmissor têm fase zero ($\cos(\omega_c t)$ e $\sin(\omega_c t)$), as do receptor têm fase θ ($\cos(\omega_c t + \theta)$ e $\sin(\omega_c t + \theta)$). Qual o menor valor de θ que leva a um erro de recepção?

EXERCÍCIO 4.4:

Seja $r_p(t)$ um sinal em banda passante, com componentes em fase e quadratura $r_I(t)$ e $r_Q(t)$. Seja $\check{r}_p(t)$ a transformada de Hilbert de $r_p(t)$, com componentes em fase e quadratura $\check{r}_I(t)$ e $\check{r}_Q(t)$. Determine $\check{r}_I(t)$ e $\check{r}_Q(t)$ em função de $r_I(t)$ e $r_Q(t)$.

EXERCÍCIO 4.5:

Imagine que o sinal em banda passante recebido seja $r_p(t) = s_p(t) - s_p(t - T)$. Determine o equivalente em banda base do canal, ou seja, o valor de $h(t)$ tal que $r(t) = s(t) - s(t - T_s)$. Note que este valor não é único. Afinal de contas, o que o canal faz fora da faixa de frequências do sinal não importa. Entretanto, para um valor em particular, a expressão de $h(t)$ é bastante simples.

EXERCÍCIO 4.6:

Seja o sistema em banda passante mostrado na figura abaixo:

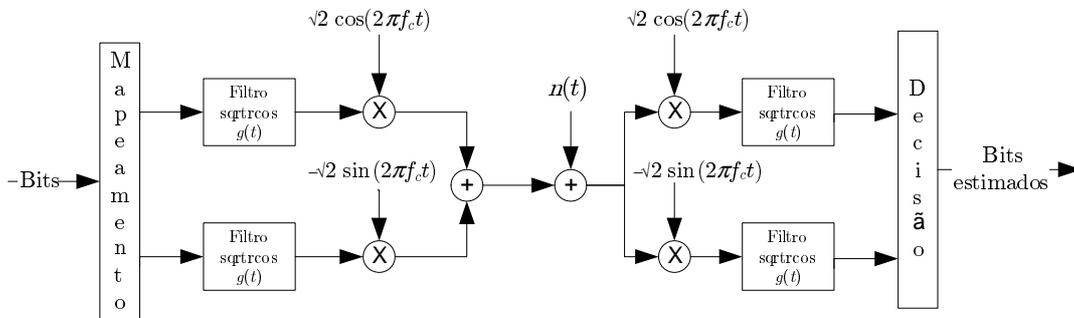


Figura 4.13: Modelo de um sistema de comunicação em Banda Passante

A simulação deste sistema pode ser feita através do seguinte programa:

```

%% Inicialização dos parâmetros do sistema
Ns = 1e3;          % Ns define o numero de símbolos.
Rs = ?;           % Taxa de superamostragem
T = ?;            % Período de símbolo
rolloff = 0.35;   % Define rolloff
tam_janela = ?;   % Define tamanho da janela do filtro de TX e RX
    
```

```

        % Ex.: tam_janela = 4, [-4:1/Rs:4]
dp_ruido = 0; % Desvio padrão do ruído
fc = ?;      % Frequência da portadora

%% Gerar sinal para transmissão
s_infs=gera_PAM(2,Ns); % símbolos 2-PAM em fase
s_quad=gera_PAM(2,Ns); % símbolos 2-PAM em quadratura
s_interp_infs=zeros(1,Ns*Rs); % Gera vetor para interpolação
s_interp_quad=zeros(1,Ns*Rs); % Gera vetor para interpolação
s_interp_infs(1:Rs:end)=s_infs; % Atribui os símbolos nas posições
                                % corretas
s_interp_quad(1:Rs:end)=s_quad % Atribui os símbolos nas posições
                                % corretas

%% Calcular coeficientes do filtro raiz de cosseno levantado
H = sqrt(cos(rolloff,tam_janela,Rs)); % Gera filtro FIR raiz de
                                        %cosseno levantado

%% Conformar símbolos pelo filtro raiz de cosseno levantado
s_conf_infs=conv(h,s_interp_infs);
s_conf_quad=conv(h,s_interp_quad);

%% Modular o sinal para banda passante (up-conversion)
s_bp=sqrt(2)*cos(2*pi*fc*[0:length(s_conf_infs)-1]*T/Rs).*s_conf_infs-...
      sqrt(2)*sin(2*pi*fc*[0:length(s_conf_quad)-1]*T/Rs).*s_conf_quad;

%% Sinal recebido
r=s_bp+dp_ruido*randn(1,length(s_bp));

%% Demodulacao (down-conversion)
r_demod_infs=sqrt(2)*cos(-2*pi*fc*[0:length(r)-1]*T/Rs).*r;
r_demod_quad=sqrt(2)*sin(-2*pi*fc*[0:length(r)-1]*T/Rs).*r;

%% Filtragem pelo filtro casado (matched filter)
r_MF_infs=conv(r_demod_infs,h);
r_MF_quad=conv(r_demod_quad,h);

```

```

%% Ajuste do atraso e decimação
tau = [];          % Define instante de amostragem para realizar decisão
r_s_infs=r_MF_infs(1+tau:Rs:end-tau); % ajusta o instante de
                                     % amostragem e
                                     % elimina transitório da filtragem
r_s_quad=r_MF_quad(1+tau:Rs:end-tau);

```

Pede-se:

- a) Relacione cada um dos sinais do programa acima na figura do exercício.
- b) Gere a função `sqrtcos` e use os parâmetros `rolloff`, `tam_janela`, `Rs` na sua construção. Sua saída deve retornar um vetor linha.
- c) Encontre valores adequados e razoáveis para as variáveis atribuídas com '?' (lembre-se do critério de Nyquist da amostragem para tal).
- d) Use a função que traça a densidade espectral de potência para traçar os espectros de `s_conf_infs`, `s_conf_quad`, `s_bp`, `r_demod_infs` e `r_demod_quad` para os valores escolhidos em (b) e verifique se os resultados estão condizentes. Caso contrário, volte para o item (c).
- e) Encontre um valor adequado para `tau` de maneira a amostrar o sinal `r_MF` quando o "olho" estiver o mais aberto possível. Para facilitar a sua vida, some ao valor de `tau`, um valor que permita eliminar os transitórios (início e fim de `r_MF`) da convolução com o filtro na transmissão e na recepção.
- f) Encontre a taxa de erro de bit(*) para valores de desvio padrão do ruído diferente de zero. Calcule o valor do desvio padrão em função de E_b/σ_n^2 . Nas simulações, use valores de E_b/σ_n^2 na faixa de 0dB a 7dB. Lembre-se de alterar o valor de `Ns` para garantir um intervalo de confiança razoável nas suas simulações. (*) Decida os valores de `r_s_infs` e `r_s_quad` e compare-os com `s_infs` e `s_quad` respectivamente.
- g) Finalmente, veja se o seu sistema funciona corretamente comparando o resultado obtido no item anterior com a probabilidade de erro de bit teórica, assumindo codificação de Gray. Se tudo correr bem, a simulação deve gerar valores praticamente iguais aos valores teóricos. Senão gerar, algo deve estar errado na simulação ou no cálculo dos valores teóricos de probabilidade de erro de bit.
- h) Modifique o programa para transmitir e receber em banda base. Neste caso, i.e., canal AWGN e sincronismo perfeito, é necessário ou vantajoso usar o raiz de cosseno levantado e super-amostrar o sinal? Justifique suas respostas.

- i) A fim de checar o simulador em banda base, obtenha a taxa de erro de bit para a mesma faixa de E_b/σ_n^2 usada em (f) e compare os resultados com a probabilidade de erro de bit teórica, assumindo codificação de Gray.

Dica: Para o cálculo do desvio padrão do ruído em função da relação E_b/σ_n^2 , saiba que a variância de um processo estocástico de variância σ^2 que passa por um filtro $H(z)$ é dada por:

$$\sigma_{\text{após-filtragem}}^2 = \sigma^2 \sum |h_k|^2$$

onde h_k são os coeficientes do filtro

Programa para traçar a Densidade Espectral de Potência:

```

%%%%%%%% Densidade Espectral Potência %%%%%%%%%
function dep_plot(sinal,T,Rs)

N = 64;           % Tamanho da FFT
spec = zeros(1,N); % Espectro (inicialização)

for k=1:floor(length(sinal)/N),
    spec=spec+abs(fft(sinal([1:N]+(k-1)*N))).^2;
end

plot(linspace(-Rs/T/2,Rs/T/2-Rs/T/N,N),fftshift(spec))
xlabel('Hz')

```

CAPÍTULO 5

Análise de Desempenho

Agora que já estudamos diversos esquemas de transmissão, estamos prontos para uma etapa igualmente importante: determinar como eles funcionam. Afinal de contas, parece óbvio que 4-PAM é mais vantajoso que 2-PAM, por oferecer o dobro da eficiência espectral. Ou seja, podemos transmitir 2 vezes mais bits usando 4-PAM que 2-PAM. Mas podemos novamente dobrar a eficiência espectral usando 16-PAM. E porque não 64-PAM? A razão é que, em engenharia, nada é de graça. O preço que pagamos pelo aumento da eficiência é uma redução na eficiência energética. Ou seja, se quisermos aumentar a eficiência espectral sem sacrificar o desempenho do sistema em termos de probabilidade de erro, devemos aumentar a potência transmitida. Assim, o objetivo central deste capítulo é quantificar esta probabilidade de erro, para que possamos escolher a modulação mais adequada às exigências do sistema que estamos projetando.

Essencialmente, estamos interessados em calcular a probabilidade de erro de bits. Infelizmente, este cálculo pode ser bastante complexo. É por isso que começaremos com o cálculo da probabilidade de erro de símbolos. Em seguida, discutiremos como mapear bits em símbolos de forma que as duas probabilidades de erro sejam aproximadamente as mesmas.

Antes de começar, revisaremos a função Q , que está ligada à distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias Gaussianas.

5.1 A Função Q

Na análise de desempenho, estaremos freqüentemente interessados em calcular a probabilidade de que uma variável Gaussiana X exceda um determinado valor x . Por isso, definimos

$$Q(x) \triangleq \text{P}[X > x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (5.1)$$

Nesta definição, assumimos que X tem média nula e variância unitária. Desta definição segue facilmente que

$$Q(-x) = 1 - Q(x). \quad (5.2)$$

Infelizmente, não existe uma fórmula fechada para $Q(x)$. Entretanto, existem aproximações e métodos numéricos bastante precisos, que são normalmente implementados por programas como MATLAB. Muitas vezes, definem-se outras duas funções ligadas à distribuição da Gaussiana: a função erro (erf, do inglês *error function*) e a função erro complementar (erfc, no inglês *complementary error function*). Estas se relacionam com a função Q de acordo com

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ Q(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Resta, ainda, determinar o que ocorre com uma variável Gaussiana com médias e variâncias quaisquer. Assim, seja $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de forma que

$$\text{P}[Y > y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_y^{\infty} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt. \quad (5.4)$$

Fazendo uma mudança de variáveis para $\tau = (t - \mu)/\sigma$, concluimos que

$$\text{P}[Y > y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y-\mu}{\sigma}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau. \quad (5.5)$$

Em resumo, se $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, então

$$\text{P}[Y > y] = Q\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right). \quad (5.6)$$

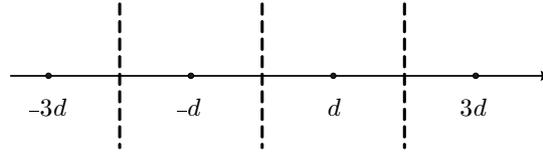


Figura 5.1: Regiões de decisão para uma modulação 4-PAM.

5.2 Desempenho de N -PAM

Podemos agora passar para a análise de desempenho de modulações em banda base N -PAM, discutidos nos capítulos 2 e 3. Neste caso, se transmitirmos uma seqüência de símbolos $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ usando um pulso de transmissão raiz de Nyquist e um filtro casado, o sinal na saída do amostrador é dado por

$$r_k = x_k + n_k, \quad (5.7)$$

onde n_k é um ruído branco aditivo e Gaussiano. Podemos então fazer a detecção símbolo a símbolo, usando r_k para determinar x_k . Em outras palavras, o desempenho neste caso pode ser calculado para um instante k qualquer.

Considere, então, o uso de uma constelação N -PAM. Ou seja, $a_i \in \mathcal{A} = \{-(N-1)d, -(N-3)d, \dots, (N-1)d\}$ os possíveis símbolos transmitidos. Na figura 5.1, mostramos \mathcal{A} para uma modulação 4-PAM. Neste figura, as linhas tracejadas correspondem às regiões de decisão do detector de distância mínima. A região ao redor de um determinado símbolo corresponde aos pontos que estão mais próximos deste símbolo do que de qualquer outro símbolo. Em resumo, se r_k cair na região de decisão de um dado símbolo, o detector de distância mínima dirá que este foi o símbolo transmitido. Por exemplo, para o valor de r_k mostrado na figura, o detector dirá que $-d$ foi o k -ésimo símbolo transmitido.

Agora, seja e o evento de que o símbolo decidido difere do transmitido. Assim, $P[e]$ é a probabilidade de erro, e $P[e|a_i]$ é a probabilidade de erro dado que a_i foi transmitido. Usando o teorema da probabilidade total, temos que

$$\begin{aligned} P[e] &= \sum_{i=0}^{N-1} P[a_i] P[e|a_i] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} P[e|a_i], \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde assumimos que todos os símbolos têm a mesma probabilidade de transmissão.

Vamos, inicialmente, restringir nossa atenção à modulação 4-PAM mostrada na figura 5.1. Considere, então que o símbolo $x_k = a_i$ foi transmitido, e vamos determinar $P[e|a_i]$. De acordo com o critério de distância mínima, $P[e|a_i]$ é a probabilidade de que o ruído n_k leve r_k para mais próximo de um símbolo $a_j \neq a_i$. Esta situação está mostrada na figura 5.1: assumindo que d foi transmitido, o detector de distância mínima cometeria um erro, pois decidiria por $-d$.

De fato, se d foi transmitido, a probabilidade de erro é igual à probabilidade de que o ruído seja maior do que d , caso em que a decisão será $3d$, ou que o ruído seja menor do que $-d$, caso em que a decisão pode ser $-d$ ou $-3d$, dependendo da magnitude do ruído. Matematicamente, temos que

$$P[e|d] = P[\{n_k > d\} \cup \{n_k < -d\}]. \quad (5.9)$$

Como estes eventos são disjuntos,

$$P[e|d] = P[\{n_k > d\}] + P[\{n_k < -d\}]. \quad (5.10)$$

Ora, $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, e portanto a primeira probabilidade acima é dada por $Q(d/\sigma)$. Por simetria, a segunda probabilidade é igual à primeira. Finalmente, concluímos que

$$P[e|d] = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right). \quad (5.11)$$

Analisando a figura 5.1, vemos que os eventos que causam um erro quando $-d$ é transmitido são os mesmos que causam um erro quando d é transmitido. Assim, $P[e|-d] = P[e|d]$. Finalmente, se $-3d$ é transmitido, um erro ocorre apenas se $n_k > d$. Assim,

$$P[e|-3d] = Q\left(\frac{d}{\sigma}\right). \quad (5.12)$$

Mais uma vez usando simetria, vemos que $P[e|-3d] = P[e|3d]$. Finalmente, usando o teorema da probabilidade total, temos que a probabilidade de erro para 4-PAM é dada por

$$P[e] = \frac{6}{4}Q\left(\frac{d}{\sigma}\right). \quad (5.13)$$

Mais genericamente, para uma modulação N -PAM, temos sempre dois pontos limites, com as mesmas características que os pontos $-3d$ e $3d$ na figura 5.1. Para estes 2 pontos, a probabilidade de erro é dada por (5.12). Temos também $N - 2$ pontos centrais, com as mesma características que os pontos $-d$ e d na figura 5.1.

Para estes $N - 2$ pontos, a probabilidade de erro é dada por (5.11). Assim, para uma modulação N -PAM qualquer, a probabilidade de erro é dada por

$$\begin{aligned} P_N[e] &= \frac{2(N-2)+2}{N} Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) \\ &= \frac{2(N-1)}{N} Q\left(\frac{d}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Finalmente, faremos algumas manipulações com o intuito de facilitar a comparação entre diferentes modulações. A idéia é escrever a probabilidade de erro como função de E_b/σ^2 . Esta é a razão entre a energia gasta para a transmissão de um bit, E_b , e a energia do ruído, σ^2 . De fato, é óbvio que se aumentarmos a potência de transmissão ou usarmos um sistema com ruído menor, então obteremos uma menor probabilidade de erro. Assim, escrever a probabilidade de erro como função de E_b/σ^2 evita que, ao comparar modulações, alguma leve vantagem artificial sobre outra.

Vamos então calcular a energia média gasta para a transmissão de um símbolo, E_s . Assumindo que o pulso conformador tenha energia unitária, temos que

$$\begin{aligned} E_s &= E[|a_i|^2] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} |a_i|^2 P[a_i] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |d(2i+1-N)|^2, \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde assumimos novamente que todos os símbolos têm a mesma probabilidade e escrevemos a_i como $d(2i+1-N)$. Usando fórmulas para a soma de quadrados, chegamos finalmente a

$$E_s = \frac{1}{6} d^2 (N^2 - 1). \quad (5.16)$$

Se a energia do pulso conformador não for nula, basta multiplicar E_s acima pela energia do pulso para obter o valor correto. Além disto, como um símbolo traz informação sobre $M = \log_2(N)$ bits, vemos que $E_s = M E_b$. Assim, temos que

$$d = \sqrt{\frac{6 M E_b}{N^2 - 1}}, \quad (5.17)$$

e, portanto,

$$P_N[e] = \frac{2(N-1)}{N} Q\left(\sqrt{\frac{6 M E_b}{(N^2 - 1)\sigma^2}}\right). \quad (5.18)$$

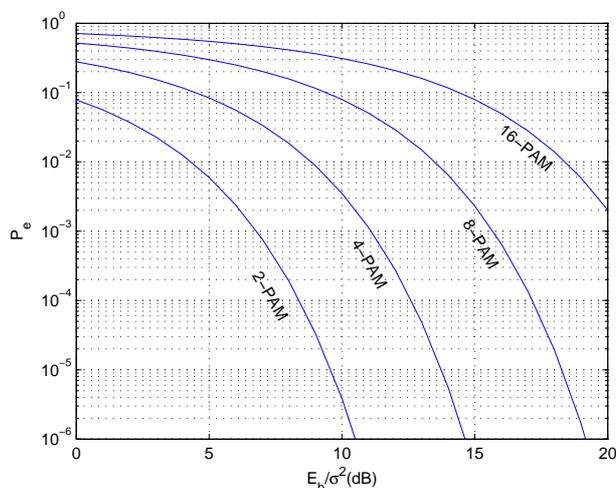


Figura 5.2: Probabilidade de erro de símbolo para várias modulações N -PAM.

Em outras palavras, (5.18) nos dá a probabilidade de erro de uma modulação N -PAM em função da relação sinal-ruído E_b/σ^2 . Na figura 5.2, mostramos a probabilidade de erro para algumas modulações N -PAM. Claramente, quanto maior o valor de N (e, portanto, maior a eficiência espectral), maior a energia de transmissão necessária para que o sistema funcione a uma determinada probabilidade de erro. Nesta figura, note que o eixo y está em uma escala logarítmica. O eixo x está em uma escala linear. Entretanto, a SNR está expressa em decibéis. Ou seja, o valor no eixo x é

$$\frac{E_b}{\sigma^2}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{E_b}{\sigma^2} \right). \quad (5.19)$$

5.2.1 Distância Mínima, Energia e Desempenho

Nesta seção, buscaremos dar alguma intuição a respeito do desempenho de uma constelação PAM. Esta discussão será baseada na energia por bit de uma modulação N -PAM e na sua probabilidade de erro, dadas por (ver (5.14) e (5.17))

$$P_N[e] = \frac{2(N-1)}{N} Q \left(\frac{d}{\sigma} \right) \quad (5.20)$$

$$E_b = \frac{1}{6M} d^2 (N^2 - 1).$$

A primeira observação é que a função Q é decrescente. Ou seja, quanto maior o seu argumento, menor o seu valor. Assim, quanto maior for d , menor a probabilidade

de erro. Ora, a distância entre um símbolo e seu vizinho é igual a $2d$. Assim, quanto maior a distância entre um símbolo e seu vizinho, menor $P_N[e]$. Esta observação é válida em geral para praticamente toda modulação: quanto maior for a distância entre os símbolos, menor será a probabilidade de erro.

Entretanto, quanto maior for d , maior será a energia transmitida E_b . Visto de outra forma, se eu limitar o valor de E_b e quiser aumentar o número de símbolos, eu serei obrigado a diminuir d . Temos assim dois objetivos conflitantes: maximizar d e minimizar E_b . Para sistemas PAM, não podemos fazer muito a respeito. Para sistemas QAM, por outro lado, já é possível fazer alguma coisa. Este tópico é chamado de projeto de constelações, e sua discussão foge do escopo deste curso.

5.3 Desempenho de N -QAM

O cálculo de desempenho de modulações N -QAM é muito semelhante ao procedimento mostrado na seção anterior. Em particular, a detecção símbolo-a-símbolo também é ótima, de forma que precisamos apenas considerar a transmissão de um único símbolo para determinar a probabilidade de erro. A única diferença, neste caso, é que consideraremos o equivalente em banda base do sistema, de forma que as variáveis envolvidas são complexas.

Assim, seja r o sinal na saída do amostrador. Dos resultados do capítulo 4, temos que

$$r = s + n, \quad (5.21)$$

onde $s = x + jy$ é o símbolo transmitido e $n = n_I + n_Q$ é o ruído. Lembre-se que n_I e n_Q são variáveis aleatórias Gaussianas independentes de média zero e variância σ^2 . Temos também que x e y são símbolos N_1 -PAM, onde $N_1 = \sqrt{N}$. Ou seja, $x, y \in \{-(N_1 - 1)d, -(N_1 - 3)d, \dots, (N_1 - 1)d\}$. Assim, o símbolo s pode assumir $N = N_1^2$ valores $\{a_i\}_{i=0}^{N-1}$.

A exemplo da seção anterior, mostramos na figura 5.3 um exemplo dos possíveis valores de s para uma modulação 16-QAM. Nesta figura, as linhas tracejadas marcam as regiões de decisão ao redor de um símbolo. Estas regiões correspondem aos pontos mais próximos do símbolo do que de qualquer outro símbolo. Em outras palavras, se r cair na região de decisão de um símbolo, o detector de distância mínima dirá que este foi o símbolo transmitido. Por exemplo, para o valor de r mostrado na figura 5.3, diremos que o símbolo transmitido foi $s = d - jd$.

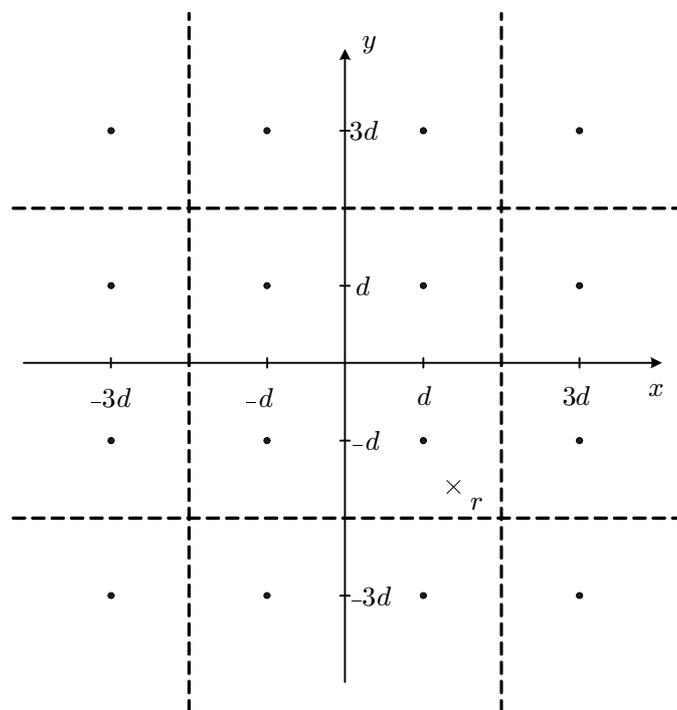


Figura 5.3: Regiões de decisão para uma modulação 16-QAM.

A determinação da probabilidade de erro de uma constelação N -QAM é baseada na probabilidade de erro de uma constelação N_1 -PAM, dada em (5.18). A primeira observação a fazer é que a relação sinal ruído das duas constelações é a mesma. De fato,

$$\begin{aligned} E[|s|^2] &= E[|x|^2] + E[|y|^2] = 2 E[|x|^2] \\ E[|n|^2] &= E[|n_I|^2] + E[|n_Q|^2] = 2 E[|n_I|^2], \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde usamos o fato de que, por simetria, $E[|x|^2] = E[|y|^2]$ e $E[|n_I|^2] = E[|n_Q|^2]$.

A segunda observação é que o demodulador de um sinal em fase e quadratura consegue separar perfeitamente os componentes em fase e quadratura. Em outras palavras, no receptor temos basicamente duas demodulações N_1 -PAM, uma para x , outra para y . Assim, para que o símbolo QAM detectado seja igual ao símbolo transmitido, devemos ter que tanto x quanto y são corretamente detectados. Seja $P[c]$ a probabilidade de uma decisão correta do símbolo N -QAM. Assim,

$$P[c] = (1 - P_{N_1}[e])^2, \quad (5.23)$$

onde $1 - P_{N_1}[e]$ é a probabilidade de uma decisão correta do símbolo N_1 -PAM. Assim,

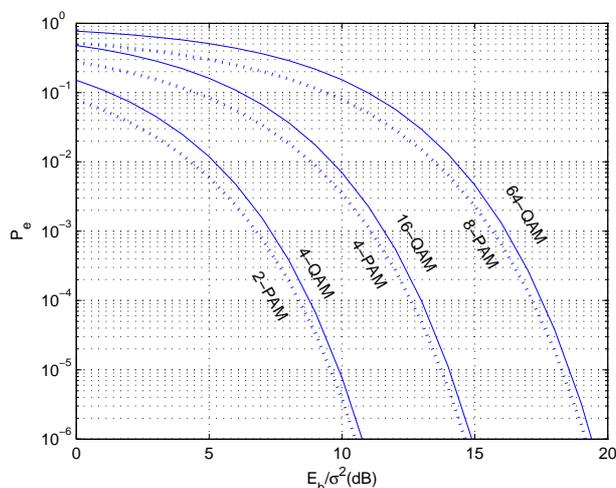


Figura 5.4: Probabilidade de erro de símbolo para várias modulações N -QAM. As linhas tracejadas correspondem às probabilidades para \sqrt{N} -PAM.

a probabilidade de erro para N -QAM é dada por

$$P[e] = 1 - (1 - P_{N_1}[e])^2. \quad (5.24)$$

Na figura 5.4, mostramos a probabilidade de erro para algumas modulações N -QAM. Como no caso PAM, quanto maior o valor de N , maior a energia de transmissão necessária para que o sistema funcione a uma determinada probabilidade de erro. Nesta figura, mostramos também, nas linhas tracejadas, as probabilidades de erro de N_1 -PAM. Claramente, estas duas probabilidades de erro estão próximas. Isto provê mais uma justificativa para o uso de sinais em fase e quadratura para a transmissão em banda passante: de fato podemos dobrar o número de bits transmitidos sem incorrer em perda de desempenho.

5.4 Mapeamento de Gray

Até agora, lidamos apenas com a probabilidade de erro de símbolos. Entretanto, nosso maior interesse é na probabilidade de erro de bits. Obviamente, esta probabilidade depende da forma como os bits são mapeados em símbolos. Assim, nesta seção discutiremos um mapeamento de bits para símbolos, chamado de mapeamento de Gray, que, de certa forma, minimiza a probabilidade de erro de bits para uma dada

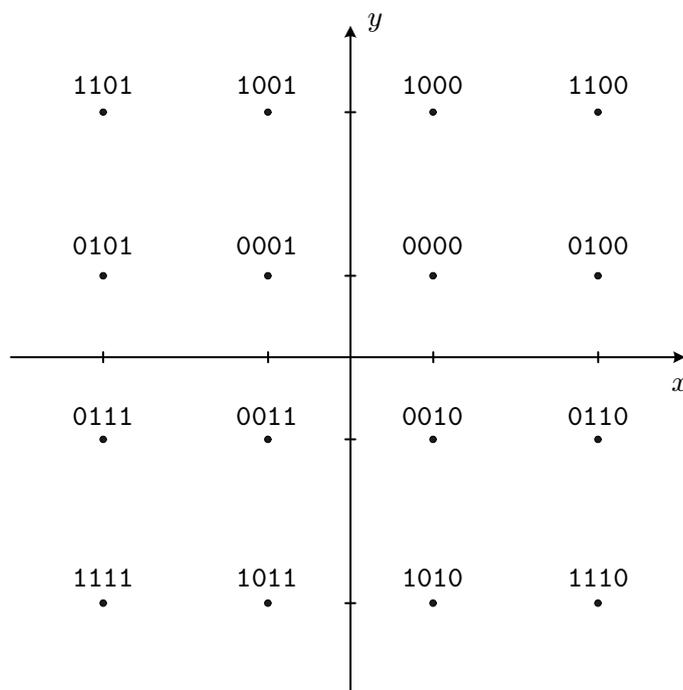


Figura 5.5: Mapeamento de Gray para uma modulação 16-QAM.

modulação. Observe que, dada a modulação, a probabilidade de erro de símbolos está automaticamente determinada.

O mapeamento de Gray parte da observação de que, quando o detector erra, é muito provável que ele escolha um símbolo adjacente ao que foi transmitido. A idéia, então, é fazer com que símbolos vizinhos difiram em apenas um bit. Assim, com grande probabilidade, um erro de símbolo acarretará apenas um erro de bit. Como um símbolo carrega informação sobre M bits temos que, quando usamos um mapeamento de Gray,

$$P[\text{erro de bit}] \approx \frac{1}{M} P[\text{erro de símbolo}]. \quad (5.25)$$

Ainda que existam algoritmos para determinar o mapeamento de Gray, sua descrição foge do escopo deste texto. Ainda assim, na figura 5.5, mostramos este mapeamento para uma modulação 16-QAM. A observação interessante nesta figura é que, para um mapeamento Gray, os valores de x e y não são escolhidos independentemente. Ou seja, não é possível, por exemplo, usar os dois primeiros bits para escolher x e os dois últimos para escolher y .

5.5 Exercícios

EXERCÍCIO 5.1:

Foi pedido a um técnico de laboratório a implementação de um modulador 16-QAM. Infelizmente, o técnico desconhecia o código de Gray e realizou o seguinte mapeamento:

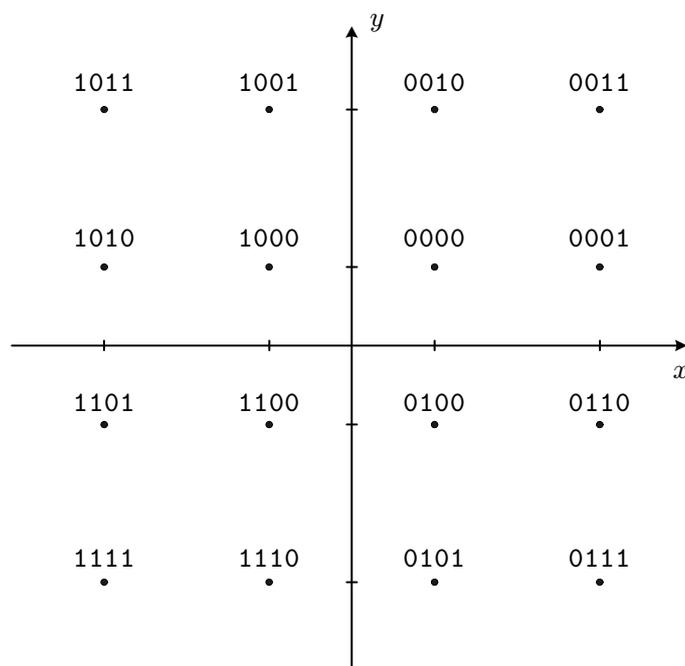


Figura 5.6: Mapeamento implementado para a modulação 16-QAM.

Pede-se: Calcule a relação da taxa de erro de bit deste mapeamento com o mapeamento gerado pelo código de Gray. Siga o mesmo raciocínio usado no código de Gray: considere apenas que o erro para os símbolos adjacentes ao transmitido.

CAPÍTULO 6

Equalização

Por enquanto, assumimos que a única distorção introduzida pelo canal é o ruído. Este tipo de canal é chamado de AWGN, do inglês *additive white Gaussian noise*. Neste capítulo, discutiremos uma outra distorção introduzida pela maioria dos canais de comunicações, e que pode ser modelada pela ação de um filtro linear. Ou seja, um modelo bastante adequado para representar a maioria dos sistemas de comunicações é aquele mostrado na figura 6.1. Esta figura resume em grande parte tudo o que vimos até agora, então vamos descrevê-la com mais detalhe. Temos que

- s_k representa os símbolos PAM ou QAM a serem transmitidos.
- $g(t)$ representa o filtro conformador de pulso.
- $b(t)$ representa a resposta ao impulso do canal.
- $n(t)$ representa o ruído.
- $r(t)$ representa o sinal recebido.
- $h(t)$ representa o filtro de recepção.

Note que a figura 6.1 pode representar tanto um sistema em banda base (neste caso, os sinais são reais) quanto um sistema em banda passante (neste caso, os sinais são complexos). Por enquanto, lidamos apenas com o caso ideal em que $b(t) = \delta(t)$,

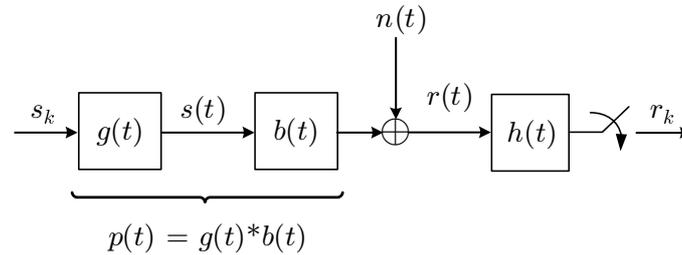


Figura 6.1: Modelo de sistemas de comunicações para canais não-ideais.

de forma que $r(t) = s(t) + n(t)$. O objetivo deste capítulo é o projeto de receptores adequados a canais não-ideais.

6.1 Filtros de Recepção e Modelo Discreto do Canal

O objetivo desta seção é discutir o projeto do filtro de recepção $h(t)$ para um sistema com um canal não-ideal. Vamos também determinar um modelo discreto de canal que relaciona s_k a r_k . Para começar, chamamos a atenção para o fato de que a presença do canal pode ser vista como uma modificação no pulso conformador. De fato, considere um sistema que use um pulso conformador $p(t) = g(t) * b(t)$ e onde o canal seja AWGN. Este sistema é obviamente idêntico ao da figura 6.1, como mostrado nesta própria figura.

Assim, podemos pensar no sistema da figura 6.1 da mesma forma que temos pensado até aqui, como se o canal fosse ideal e o pulso conformador fosse $p(t)$. Em particular, podemos obter um receptor de distância mínima passando o sinal por um filtro casado com o pulso equivalente $p(t)$. De fato, pode-se mostrar que se $h(t) = p(-t)$, então r_k contém toda a informação relevante a respeito de s_k . Ou seja, r_k é, nesse caso, estatística suficiente.

Algumas observações são de interesse:

- A resposta ao impulso do canal pode não ser real. Afinal, podemos estar lidando com o equivalente em banda base de um canal em banda passante. Assim, o nosso filtro de recepção pode ser complexo. Para o caso de sinais complexos, o filtro casado é, na realidade, dado por $h(t) = p^*(-t)$.
- Dificilmente o pulso equivalente $p(t)$ satisfaz o critério de raiz de Nyquist dado em (3.23) na página 43. Assim, teremos interferência entre os símbolos na

saída do filtro de recepção. Por isso, um detector símbolo-a-símbolo não é mais ótimo, pois o sinal r_k contém informações sobre a_k e outros símbolos adjacentes. Um dos principais objetivos deste capítulo é mostrar como podemos processar digitalmente o sinal r_k de forma a possibilitar a decisão símbolo-a-símbolo.

A maior dificuldade na implementação do filtro casado $p^*(-t)$ é que o canal tem que ser precisamente conhecido no receptor. Isto, na vasta maioria dos casos, não é uma hipótese realista. O que se faz na prática é, em geral, simplesmente usar um filtro de recepção passa baixas, de forma a eliminar o ruído fora da faixa de frequências de interesse. Após a filtragem passa-baixas de $r(t)$, temos duas opções.

A primeira é amostrar o sinal à taxa de símbolos. Ora, para podermos amostrar à taxa de símbolos sem perda de informação a respeito de $s(t)$, deveríamos usar um filtro casado $h(t) = p^*(-t)$. Como usamos um filtro passa-baixas qualquer, este procedimento traz uma perda de desempenho. Entretanto, esta perda em geral não é muito grande, e a simplicidade do sistema resultante faz com que ele seja muito usado na prática. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{l=-L_1}^{L_2} s_{k-l} f_l + n_k \\ &= s_k f_0 + \sum_{\substack{l=-L_1 \\ l \neq k}}^{L_2} s_{k-l} f_l + n_k, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $f_{k-l} = f(k-l)T_s$, para $f(t) = g(t)*b(t)*h(t)$, e n_k é uma seqüência iid de ruído Gaussiano de média zero e variância σ^2 . Para ver isto, basta seguir o procedimento que levou a (2.12), na página 20. O modelo resultante está mostrado na figura 6.1. A segunda equação em (6.1) explicita bem o efeito do canal: seu primeiro termo corresponde ao símbolo desejado, seu segundo termo corresponde à interferência dos outros símbolos (IIS), e seu último termo corresponde ao ruído.

Note que, em (6.1), assumimos que $f(t) = 0$ para $t < -L_1 T_t$ e $t > L_2 T_t$. Em resumo, assumimos que $f(t)$ tem duração finita. Obviamente, os parâmetros L_1 e L_2 dependem do canal e dos filtros de transmissão e recepção. Também é importante observar que, como no caso dos pulsos conformadores na página 23, encontramos aqui sistemas não-causais que não existem na prática. Como anteriormente, esta não causalidade pode ser facilmente contornada introduzindo um atraso no sistema,

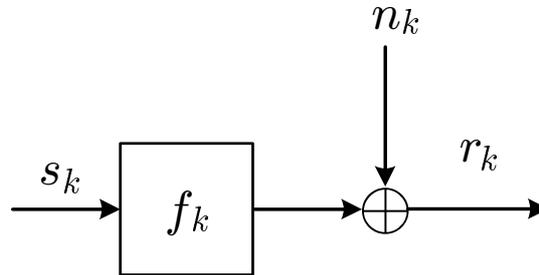


Figura 6.2: Modelo discreto de um sistema de comunicações.

de forma que no instante de tempo k nós estamos interessados em estimar o sinal transmitido no instante $k - \delta$. E, como anteriormente, usamos sistemas não-causais apenas para facilitar a notação.

Finalmente, para podermos dizer que o ruído é iid, assumimos que o filtro de recepção $h(t)$ é raiz de Nyquist para a taxa de amostragem, conforme mostrado na seção 3.4.3, na página 46. Na verdade, o filtro mais usado na prática neste caso parte da observação de que o filtro de transmissão pode ser visto como um filtro passa-baixas. Mais ainda, o pulso conformador é em geral raiz de Nyquist. Assim, usamos normalmente um filtro de recepção casado com o filtro de transmissão, ou seja, $h(t) = g(-t)$.

Uma alternativa à amostragem à taxa de símbolos surge da observação de que o pulso equivalente $p(t)$ é um sinal limitado em frequências. De fato, se $g(t)$ for um raiz de cosseno levantado, $p(t)$ será forçosamente limitado a frequências $|f| < (1 + \alpha)/(2T_s)$. Assim, se amostrarmos o sinal ao dobro da maior frequência do sinal transmitido (após passarmos $r(t)$ por um filtro contra *aliasing*) o processamento digital de r_k se torna equivalente ao processamento em tempo contínuo de $r(t)$. Podemos, por exemplo, implementar digitalmente o filtro casado $h(t) = g(-t)$. Por exemplo, para o cosseno levantado, temos que $\alpha < 1$, de forma que $|f| < 1/T_s$. Assim, se passarmos $r(t)$ por um filtro passa-baixas anti-*aliasing* e amostrarmos o sinal resultante ao dobro da frequência de símbolos, podemos implementar o filtro casado ideal digitalmente. Isto resulta em um equalizador fracionário, pois o período de amostragem é uma fração do período de símbolos. Estudaremos estes equalizadores no final deste capítulo. Antes que você se pergunte porque estudar qualquer outro tipo de equalizador, notamos que, apesar de resultar em um desempenho melhor, o equalizador fracionário tem uma complexidade maior, e muitas

vezes amostrar ao dobro da taxa de símbolos pode ser inviável ou, na melhor das hipóteses, muito caro.

Como sempre, desejamos determinar a estrutura de recepção que minimiza a probabilidade de erro. E, como sempre, esta estrutura é obtida através do critério de distância mínima, que deve ser implementado levando em conta o sinal amostrado na saída do filtro casado $h(t) = p^*(-t)$. Infelizmente, o detector de distância mínima para canais com IIS pode ser demasiado complexo, sendo implementado em apenas alguns poucos casos práticos. Por isto, eles não serão discutidos neste curso. Na seqüência, discutiremos algumas soluções alternativas que, embora não minimizem a probabilidade de erro, levam a um desempenho satisfatório, sendo bastante usadas na prática.

6.2 Equalizadores Lineares

Considere, então, que o sinal amostrado é dado por (6.1). Conforme mencionamos, este sinal contém IIS, de forma que a detecção símbolo-a-símbolo não mais é ótima. Uma solução muito usada na prática é o uso de *equalizadores lineares*, que consiste na filtragem linear de r_k . Um equalizador linear está mostrado na figura 6.3. Se w_k é a resposta ao impulso do equalizador, sua saída é dada por

$$\tilde{s}_k = w_k * r_k = q_k * s_k + w_k * n_k, \quad (6.2)$$

onde $q_k = w_k * f_k$ é a resposta ao impulso do filtro linear global que liga s_k a \tilde{s}_k .

É interessante notar que, de acordo com a nossa definição, no instante k o equalizador tenta estimar o k -ésimo símbolo transmitido. Ora, muito possivelmente o sinal recebido no instante $k + 1$, r_{k+1} , sofre alguma influência de s_k . Portanto, gostaríamos de usar r_{k+1} para o cálculo de \tilde{s}_k . O mesmo vale para r_{k+2}, r_{k+3}, \dots . Ou seja, no instante k , queremos usar os símbolos recebidos no futuro para calcular a saída do equalizador, o que leva obviamente a um filtro não-causal. Assim como fizemos com o pulso conformador não causal, podemos atrasar o sistema, compensando esta não causalidade. Em outras palavras, podemos pensar que no instante k nós queremos estimar o símbolo s_{k-d} para um certo atraso d . Entretanto, o uso de um equalizador não causal facilita a notação, e portanto manteremos esta convenção aqui..

Em geral, a resposta ao impulso do equalizador é finita, indo do instante $-N_1$ até N_2 . Para estes equalizadores de duração finita a saída do equalizador pode ser

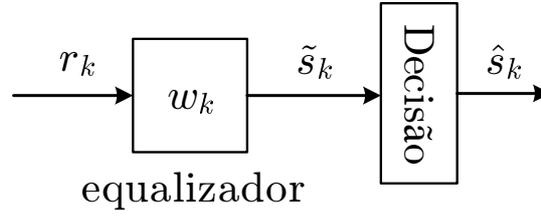


Figura 6.3: Sistema com um equalizador linear.

escrita de duas formas que se mostrarão convenientes nas deduções que se seguirão. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{s}_k &= \sum_{n=-N_1}^{N_2} w_n r_{k-n} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{r}_k,\end{aligned}\tag{6.3}$$

onde definimos os vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= [w_{N_2}, w_{N_2-1}, \dots, w_{-N_1}]^T \\ \mathbf{r}_k &= [r_{k-N_2}, r_{k-(N_2-1)}, \dots, r_{k+N_1}]^T,\end{aligned}\tag{6.4}$$

ambos de dimensão $(N_1 + N_2 + 1) \times 1$.

O objetivo do equalizador é tentar, de certa forma, desfazer a IIS. Ou seja, deseja-se que o sinal na sua saída, \tilde{s}_k , se aproxime, da melhor forma possível, do que seria observado na saída de um canal AWGN. A questão, então, é como determinar os coeficientes w_k do equalizador da melhor forma possível. Uma abordagem em princípio óbvia é tentar encontrar um equalizador que inverta o canal. Este equalizador força a IIS em (6.1) a zero, sendo portanto chamado de equalizador de forçagem a zero (ZF, do inglês *zero-forcing*). Note que, nesta abordagem, estamos basicamente ignorando a presença do ruído.

Para que a cascata do canal com o equalizador resulte em um filtro sem distorções, devemos ter que

$$W_{\text{ZF}}(f) = \frac{1}{F(f)}.\tag{6.5}$$

Neste caso, teremos que

$$\tilde{s}_k = s_k + w_k * n_k.\tag{6.6}$$

Infelizmente, se $F(f) = 0$ para alguma frequência f , então $W_{\text{ZF}}(f)$ teria que ser infinito nesta frequência. Portanto, neste caso o equalizador ZF não é implementável. Mesmo que isso não ocorra, podemos ter o problema de amplificação do ruído (no

inglês, *noise enhancement*) se $F(f)$ for pequeno para alguma frequência. De fato, a densidade espectral de potência do componente de ruído na saída do equalizador, $w_k * n_k$, é $|W_{\text{ZF}}(f)|^2 N_0/2$, de forma que a energia do ruído na saída do equalizador ZF é dada por

$$\frac{N_0}{2} \int |W_{\text{ZF}}(f)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int \frac{1}{|F(f)|^2} dt. \quad (6.7)$$

Obviamente, se $F(f)$ for pequeno então $1/|F(f)|^2$ será grande, o que poderá levar a um alto valor para a energia do ruído.

Em outras palavras, não podemos nos preocupar apenas com a eliminação da IIS. Devemos, na realidade, buscar um equalizador que atinja um compromisso entre a amplificação do ruído e a atenuação da IIS. Para determinar um critério razoável para o projeto do equalizador, vamos estudar o desempenho de um equalizador genérico.

Imagine então que o equalizador tenha executado bem sua tarefa, e que sua saída possa ser escrita como

$$\tilde{s}_k = s_k + e_k, \quad (6.8)$$

onde $e_k \triangleq s_k - \tilde{s}_k$ é o erro entre a saída do equalizador e o valor que gostaríamos que ela tivesse. Claramente, podemos ver e_k como um ruído. Em geral, ele não será Gaussiano, pois é função tanto do ruído quanto dos símbolos interferentes. (Isto não ocorre com um equalizador ZF.) Assim, a probabilidade de erro não pode ser determinada como no capítulo 5. Na realidade, a determinação exata da probabilidade de erro na saída do equalizador é uma tarefa em geral difícil. Isto também dificulta a determinação de um equalizador linear que minimize a probabilidade de erro.

Por outro lado, o cálculo da relação-sinal-ruído (SNR) na saída do equalizador é em geral simples. Definimos esta SNR como

$$SNR_e = \frac{E[|s_k|^2]}{E[|e_k|^2]}. \quad (6.9)$$

Assumindo que e_k é Gaussiano, podemos *aproximar* a probabilidade de erro usando esta SNR nas fórmulas estudadas no capítulo 5. Ainda que isto seja apenas uma aproximação, o fato é que equalizadores que apresentam uma melhor SNR em geral têm um melhor desempenho em termos de probabilidade de erro.

6.2.1 Equalização de Quadrados Mínimos

Ora, como a SNR está ligada ao desempenho do sistema equalizado, podemos tentar projetar um equalizador que maximize a SNR. Como $E[|s_k|^2]$ é dado, podemos equivalentemente tentar minimizar o denominador da SNR, $E[|e_k|^2]$. Assim, nesta seção, estudaremos um equalizador cujo objetivo é simplesmente minimizar a variância do erro e_k . Este equalizador é chamado de equalizador de mínimo erro quadrático médio (MMSE, do inglês *minimum mean-square error*).

Nosso objetivo é, então, achar \mathbf{w} de forma que o custo $J(\mathbf{w}) \triangleq E[|e_k|^2]$ seja mínimo. Em primeiro lugar, é importante notar que $E[|e_k|^2]$ é de fato uma função de \mathbf{w} , já que $\tilde{s}_k = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_k$. É também interessante ressaltar que $J(\mathbf{w})$ é uma forma quadrática, o que pode ser visto como uma espécie de parábola em várias dimensões. Uma consequência importante destes fatos é que, como uma parábola, $J(\mathbf{w})$ possui apenas um mínimo.

Para o projeto do equalizador, vamos assumir inicialmente que as variáveis envolvidas são reais. Para determinarmos o vetor \mathbf{w} que minimiza $J(\mathbf{w})$, devemos igualar as derivadas de $J(\mathbf{w})$ em relação aos componentes de \mathbf{w} a zero. Em outras palavras, devemos fazer

$$\frac{\partial}{\partial w_n} J(\mathbf{w}) = 0 \quad (6.10)$$

para todos os coeficientes do equalizador, ou seja, para $n = -N_1, \dots, N_2$. Ora, assumindo que podemos trocar a ordem da derivada com a esperança, devemos ter que

$$\frac{\partial}{\partial w_n} E[|e_k|^2] = E \left[\frac{\partial}{\partial w_n} |e_k|^2 \right] = 0. \quad (6.11)$$

Aplicando a regra da cadeia, devemos então ter que

$$E \left[2e_k \frac{\partial}{\partial w_n} e_k \right] = 0. \quad (6.12)$$

Podemos, evidentemente, dividir ambos os lados desta equação por 2. Mais ainda, da definição de e_k em (6.3), é fácil (mesmo) ver que

$$\frac{\partial}{\partial w_n} e_k = -r_{k-n}. \quad (6.13)$$

Assim, temos que a solução ótima deve satisfazer

$$-E[e_k r_{k-n}] = 0, \quad (6.14)$$

para $n = -N_1, \dots, N_2$.

Para podermos expressar com mais detalhes o equalizador que minimiza $J(\mathbf{w})$, é conveniente expressar a solução em uma forma matricial. Para isto, colocamos as $N_1 + N_2 + 1$ equações que resultam de (6.14) em um vetor. Assim, temos que, para a solução ótima,

$$-E[\mathbf{r}_k e_k] = 0. \quad (6.15)$$

É importante notar que $E[\mathbf{r}_k e_k]$ é o *gradiente* da função custo $J(\mathbf{w})$ em relação a \mathbf{w} .

Voltando ao projeto do equalizador, como $e_k = s_k - \mathbf{r}_k^T \mathbf{w}$, chegamos a

$$E[\mathbf{r}_k s_k - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T \mathbf{w}] = 0. \quad (6.16)$$

Usando a linearidade da esperança e o fato de que \mathbf{w} não é aleatório, vemos finalmente que a solução deve satisfazer

$$E[\mathbf{r}_k s_k] - E[\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T] \mathbf{w} = 0. \quad (6.17)$$

Sejam, então,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T], \\ \mathbf{p} &= E[\mathbf{r}_k s_k]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Note que estas quantias correspondem, respectivamente, à matriz de auto-correlação do vetor \mathbf{r}_k , e à sua correlação cruzada com o valor que queremos estimar, s_k . Com estas definições, chegamos, finalmente, a

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \quad (6.19)$$

Esta solução é, em geral, conhecida por solução de Wiener, em homenagem ao matemático que estabeleceu as bases da estimação de quadrados mínimos. As equações de Wiener são bastante genéricas. De fato, sempre que queremos determinar um filtro linear para estimar um sinal a partir de outro, os coeficientes do filtro serão dados por $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}$, onde \mathbf{R} e \mathbf{p} são, respectivamente, a matriz de autocorrelação do vetor na entrada do filtro e a correlação cruzada entre este vetor e o sinal desejado.

Para fins de ilustração, mostramos na figura 6.4(b) a resposta ao impulso da cascata do equalizador MMSE com o canal mostrado na figura 6.4(a). Conforme vemos, o equalizador tenta aproximar a resposta da cascata a um impulso. Esta aproximação não é exata por dois motivos. Primeiro, o equalizador tem um comprimento limitado, o que limita sua habilidade de inverter o canal. Por outro lado, o equalizador MMSE adota uma solução de compromisso entre inverter o canal e amplificar o ruído.

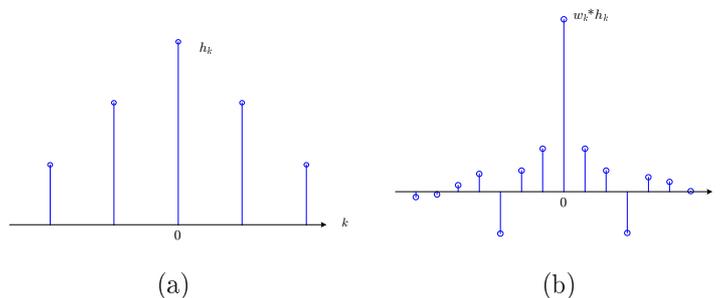


Figura 6.4: Efeito do equalizador MMSE. Observe como a resposta ao impulso do canal (a) se aproxima de um impulso (b) ao ser convoluída com o equalizador. Assumimos um ruído de variância 0.01.

Caso Complexo

No caso de sistemas em banda passante, trabalhamos com os equivalentes em banda base. Isto resulta em variáveis complexas, o que traz algumas complicações. Em princípio, estas complicações são artificiais. Afinal de contas, a função que queremos minimizar, $E[|e_k|^2]$, é real. Também podemos pensar que nossas variáveis são as partes reais e imaginárias do vetor \mathbf{w} , que também são variáveis reais. Assim, temos na realidade um problema de minimização de uma função real de coeficientes reais, o que sabemos facilmente resolver. Esta abordagem, entretanto, não é notacionalmente conveniente.

A principal dificuldade é, na realidade, a definição de uma derivada de uma função em relação a uma variável complexa que tenha as propriedades desejadas. Para contornar esta dificuldade, estudaremos aqui uma abordagem alternativa para a determinação dos coeficientes do equalizador de quadrados mínimos que serve tanto para o caso complexo quanto para o caso contínuo.

Começamos esta abordagem alternativa expandindo $J(\mathbf{w})$, o que nos leva a

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{w}) &= E[|s_k - \tilde{s}_k|^2] \\
 &= E[(s_k - \tilde{s}_k)(s_k - \tilde{s}_k)^*] \\
 &= E[|s_k|^2 - s_k \tilde{s}_k^* - \tilde{s}_k s_k^* + \tilde{s}_k^* \tilde{s}_k].
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Usando a definição de \tilde{s}_k e o fato de que a soma das esperanças é a esperança da soma, podemos escrever que

$$J(\mathbf{w}) = E[|s_k|^2] - E[s_k(\mathbf{w}^T \mathbf{r}_k)^*] - E[s_k^*(\mathbf{w}^T \mathbf{r}_k)] + E[(\mathbf{w}^T \mathbf{r}_k)^* \mathbf{w}^T \mathbf{r}_k]. \tag{6.21}$$

Ora, \tilde{s}_k é um escalar, de forma que $\tilde{s}_k = \tilde{s}_k^T$. Mais ainda, o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados. Usando estas duas propriedades, chegamos a

$$J(\mathbf{w}) = E[|s_k|^2] - E[\mathbf{w}^H \mathbf{r}_k^* s_k] - E[s_k^* \mathbf{r}_k^T \mathbf{w}] + E[\mathbf{w}^H \mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T \mathbf{w}], \quad (6.22)$$

onde \mathbf{w}^H é o vetor \mathbf{w} transposto e conjugado. Observe, agora que o vetor \mathbf{w} não é aleatório e, portanto, pode ser removido da esperança. Assim, concluímos que

$$J(\mathbf{w}) = E[|s_k|^2] - \mathbf{w}^H E[\mathbf{r}_k^* s_k] - E[s_k^* \mathbf{r}_k^T] \mathbf{w} + \mathbf{w}^H E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T] \mathbf{w}. \quad (6.23)$$

Sejam, então

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T], \\ \mathbf{p} &= E[\mathbf{r}_k^* s_k]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Note que estas quantias correspondem, respectivamente, à matriz de auto-correlação do vetor \mathbf{r}_k^* , e à sua correlação cruzada com o valor que queremos estimar, s_k , e são semelhantes às definidas em (6.18). Com estas definições, chegamos, finalmente, a

$$J(\mathbf{w}) = E[|s_k|^2] - \mathbf{p}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}. \quad (6.25)$$

Por enquanto, não fizemos nada além de escrever a função custo em função de \mathbf{R} e \mathbf{p} . Observe, entretanto, que (6.25) é uma *forma quadrática*. De fato, ela tem algumas semelhanças com as formas quadráticas para uma variável às quais estamos acostumados, ou seja, $ax^2 + bx + c$. Por exemplo, vemos em (6.25) que a matriz \mathbf{R} tem o mesmo papel que a constante a , o vetor \mathbf{p} tem papel semelhante ao da constante b , e $E[|s_k|^2]$ exerce a mesma função da constante c . Assim como no caso linear, podemos completar os quadrados em (6.25), obtendo

$$J(\mathbf{w}) = E[|s_k|^2] - \mathbf{p}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} + (\mathbf{w} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p})^H \mathbf{R} (\mathbf{w} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}). \quad (6.26)$$

É importante notar que o objetivo de completar os quadrados é tornar apenas um dos termos desta equação (o terceiro) depende de \mathbf{w} .

De certa forma, não é muito fácil chegar a (6.26). Por outro lado, é relativamente simples verificar que esta equação está correta. Para isto, é necessário notar, de (6.24), que a matriz \mathbf{R} é hermitiana, ou seja, $\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$. Uma consequência importante deste fato é que $(\mathbf{R}^{-1})^H = \mathbf{R}^{-1}$.

Para podermos prosseguir, observamos que \mathbf{R} é uma matriz dita *positiva definida*. Isto que dizer que, para qualquer vetor \mathbf{x} , $\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x} \geq 0$. De fato, usando a definição

de \mathbf{R} e o fato de que \mathbf{x} não é aleatório, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^H \mathbb{E}[\mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T] \mathbf{x} \\
 &= \mathbb{E}[\mathbf{x}^H \mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T \mathbf{x}] \\
 &= \mathbb{E}[(\mathbf{r}_k^T \mathbf{x})^* (\mathbf{r}_k^T \mathbf{x})] \\
 &= \mathbb{E}[|\mathbf{r}_k^T \mathbf{x}|^2] \geq 0,
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

onde usamos o fato de que $\mathbf{x}^H \mathbf{r}_k^*$ é um escalar, e portanto igual ao seu transposto, e que o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.

Como \mathbf{R} é definida positiva, o menor valor que o terceiro termo de (6.26) pode assumir é zero, o que ocorre quando

$$\mathbf{w} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} = 0. \tag{6.28}$$

Ou seja, os coeficientes do equalizador MMSE satisfazem

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \tag{6.29}$$

Uma primeira observação interessante a fazer neste caso é que (6.26) nos permite determinar o menor valor possível para a variância do erro. De fato, fazendo o terceiro termo de (6.26) igual a zero, obtemos que a menor variância possível para o ruído é dada por

$$J_{\min}(\mathbf{w}) = \mathbb{E}[|s_k|^2] - \mathbf{p}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \tag{6.30}$$

Outra observação importante é a semelhança entre a solução para o caso real e o complexo. Como esperado, estas duas abordagens produzem o mesmo resultado para variáveis reais. Mais ainda, ela nos indica que podemos definir o gradiente de $J(\mathbf{w})$ no caso complexo. De fato, se definirmos

$$\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = -\mathbb{E}[\mathbf{r}_k^* e_k] \tag{6.31}$$

e fizermos todo o procedimento que levou à solução no caso real, obteremos a mesma solução que foi alcançada no caso complexo. Em resumo, esta definição do gradiente possui uma propriedade crucial: igualando este gradiente a zero, obtemos o vetor complexo \mathbf{w} que minimiza $J(\mathbf{w})$.

Tão importante quanto dar a solução é o fato de que, da mesma forma que o gradiente para funções reais, $\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w})$ nos dá a direção em que $J(\mathbf{w})$ mais cresce. (A demonstração deste resultado não é óbvia.) Conforme veremos, esta propriedade

é crucial para a obtenção dos coeficientes do equalizador na prática. De fato, foi apenas para chegar a esta definição de gradiente no caso complexo que adotamos as duas abordagens, uma baseada no gradiente e outra baseada em completar os quadrados.

6.2.2 Cálculo do Equalizador MMSE em Função do Canal

Nesta seção, buscaremos escrever explicitamente os coeficientes ótimos do equalizador MMSE em função dos coeficientes do canal. Obviamente, para isto devemos apenas escrever as quantias \mathbf{R} e \mathbf{p} em função do canal. Vamos considerar aqui o caso complexo, já que o caso real é apenas um caso particular desse. Assumiremos aqui que tanto o sinal transmitido quanto o ruído são brancos, o que é uma situação muito comum na prática.

Note que ambas as estatísticas que estamos querendo calcular são função do vetor na entrada do equalizador, \mathbf{r}_k . Assim, vamos começar expressando este vetor em função das variáveis aleatórias cujas estatísticas assumimos serem conhecidas, s_k e n_k . Lembre-se que

$$r_k = \sum_{l=-L_1}^{L_2} s_{k-l} f_l + n_k \quad (6.32)$$

e

$$\mathbf{r}_k = [r_{k-N_2}, r_{k-(N_2-1)}, \dots, r_{k+N_1}]. \quad (6.33)$$

Usando estas duas equações, não é muito difícil ver que

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{F}\mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k, \quad (6.34)$$

onde

$$\mathbf{s}_k = [s_{k-N_2-L_2}, \dots, s_{k+N_1+L_1}], \quad (6.35)$$

$$\mathbf{n}_k = [n_{k-N_2}, n_{k-(N_2-1)}, \dots, n_{k+N_1}]. \quad (6.36)$$

e \mathbf{F} é uma matriz $(N_1 + L_2 + 1) \times (N_1 + L_2 + N_2 + L_1 + 1)$ conhecida como matriz de convolução, dada por

$$\begin{bmatrix} f_{L_2} & f_{L_2-1} & \cdots & f_{-L_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{L_2} & \cdots & f_{-L_1+1} & f_{-L_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{L_2} & f_{L_2-1} & \cdots & f_{-L_1} \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

De posse destas definições, podemos agora calcular

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T] \\
&= E[(\mathbf{F} \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k)^* (\mathbf{F} \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k)^T] \\
&= \mathbf{F}^* E[\mathbf{s}_k^* \mathbf{s}_k^T] \mathbf{F}^T + \mathbf{F}^* E[\mathbf{s}_k^* \mathbf{n}_k^T] + E[\mathbf{n}_k^* \mathbf{s}_k^T] \mathbf{F}^T + E[\mathbf{n}_k^* \mathbf{n}_k^T] \\
&= E_s \mathbf{F}^* \mathbf{F}^T + \sigma^2 \mathbf{I},
\end{aligned} \tag{6.38}$$

onde usamos o fato de que \mathbf{F} é determinístico e portanto pode ser retirado da esperança, e que a seqüência transmitida e o ruído são brancos e mutuamente independentes, de forma que suas matrizes de autocorrelação são proporcionais à identidade e eles são mutuamente decorrelacionados.

Usando raciocínio semelhante, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= E[s_k \mathbf{r}_k^*] \\
&= E[(\mathbf{F} \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k)^* s_k] \\
&= \mathbf{F}^* E[\mathbf{s}_k^* s_k] \\
&= E_s \mathbf{f}_0^*,
\end{aligned} \tag{6.39}$$

onde \mathbf{f}_0 corresponde à L_1 -ésima coluna de \mathbf{F} . Isso porque o único termo não-nulo de $E[\mathbf{s}_k^* s_k]$ é o que envolve $E[s_k^* s_k]$, o que corresponde à L_1 -ésima linha de $E[\mathbf{s}_k^* s_k]$.

6.2.3 Conclusão

Nesta seção, estudamos o uso de um equalizador linear de quadrados mínimos para mitigar a IIS. Apesar de melhorar a questão da amplificação de ruído em relação ao equalizador ZF, o equalizador MMSE ainda apresenta um desempenho ruim em alguns canais. Isto ocorre principalmente se o canal possui um nulo em sua resposta em frequência, ou seja, se $F(f) = 0$ para algum valor de f . Neste caso, o canal anula completamente as componentes do sinal naquelas frequências, e o equalizador não é capaz de compensar este efeito. Este problema pode ser contornado por equalizadores não lineares, como o discutido na próxima seção.

Um outro problema da solução a que chegamos é que ela obviamente depende do conhecimento do canal. A solução para esse problema deverá esperar mais algumas seções, quando estudaremos filtros adaptativos.

6.3 Exercícios

EXERCÍCIO 6.1:

Na figura 6.5, mostramos uma forma de processar um sinal em banda passante que é equivalente à vista em classe. A diferença é que aqui nós “aceitamos” a presença de sinais complexos. Note também que aqui nós ignoramos o ruído. O filtro $\Phi(f)$ é o divisor de fase descrito em 4.35.

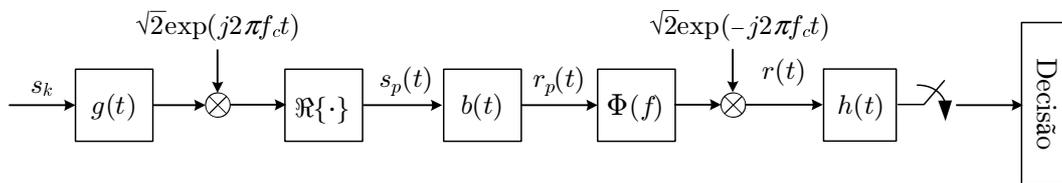


Figura 6.5: Um sistema de transmissão digital completo, com canal não-ideal mas sem ruído.

1. Mostre que o sinal $s_p(t)$ mostrado na figura 6.5 é de fato equivalente ao mostrado na figura 4.2 das notas, dado que $s_k = x_k + jy_k$.
2. Mostre que o receptor (de $r_p(t)$ em diante) da figura 6.5 é equivalente ao receptor mostrado na figura 4.4. Ou seja, mostre que a parte real (imaginária) da entrada do decisor na figura 6.5 é igual à entrada superior (inferior) do decisor na figura 4.4.
3. Vimos em sala que o sistema da figura 6.5 pode ser representado por um equivalente em tempo discreto, como mostrado na figura 6.2 das notas. Calcule a resposta ao impulso discreta do canal, f_k , em função de $g(t)$, $b(t)$, $h(t)$, f_c e T .
4. Calcule f_k se

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < 0.5s, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$b(t) = \delta(t) + \delta(t - 1),$$

e o filtro de recepção é casado com o de transmissão. O período de símbolos é $T = 1s$ e a frequência da portadora é $f_c = 1kHz$.

EXERCÍCIO 6.2:

Considere um sistema em banda passante cujo ruído tem variância 0.01, o sinal transmitido tem energia 2 e o canal tem transformada z dada por $H(z) = 1 + \exp(j\pi/4)z^{-1}$. Vamos usar um equalizador MMSE linear com 10 coeficientes para equalizar esse canal. Use o MATLAB para plotar o valor do menor erro quadrático para cada possível atraso. Qual o atraso ótimo?

6.4 Equalizador com Realimentação de Decisão

Nesta seção, discutiremos uma forma de mitigar a perda de desempenho sofrida por equalizadores lineares quando o canal possui um zero em sua resposta em frequência. Conforme vimos, este zero pode levar a uma amplificação da energia do ruído ou, na melhor das hipóteses, levar a uma perda completa da informação contida naquela frequência.

Entretanto, note que no instante k nós tentamos estimar o k -ésimo símbolo transmitido¹. Ora, nesse instante de tempo, nós já dispomos de *estimativas* para os símbolos transmitidos nos instantes de tempo anteriores, \hat{s}_n , para $n < k$. Assumindo que nosso equalizador tem um desempenho razoável, podemos assumir que essas estimativas são corretas. Ou seja, podemos assumir que nós conhecemos os símbolos que foram transmitidos no passado.

Obviamente, a hipótese de decisões corretas é exageradamente otimista. Entretanto, ela facilita (seria melhor dizer possibilita) as deduções que se seguem. Além disto, felizmente os resultados obtidos com as decisões \hat{s}_n , para $n < k$, (que necessariamente diferem dos símbolos transmitidos) não divergem muito do que se esperaria se os próprios símbolos transmitidos conhecidos no receptor. Em resumo, assumir que os símbolos passados são conhecidos no momento em que queremos estimar s_k é uma hipótese razoável.

A questão é, então, como usar o conhecimento dos símbolos passados para melhorar o desempenho do equalizador. Seguindo uma abordagem não muito intuitiva, podemos pensar em simplesmente filtrar o sinal recebido com um filtro linear com resposta ao impulso w_k , como no caso linear. Para fazer uso do conhecimento dos símbolos anteriores, podemos também pensar em passar as estimativas dos símbolos

¹Chamamos novamente a atenção para o fato de que estamos assumindo o uso de filtros não-causais. Isso pode ser facilmente contornado na prática com a introdução de atrasos no sistema.

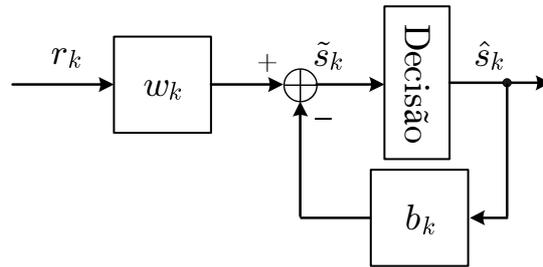


Figura 6.6: O equalizador com realimentação de decisão. O filtro de realimentação tem que ser estritamente causal.

transmitidos por um filtro linear com resposta ao impulso b_k . Combinando a saída destes dois filtros, obtemos um sistema como mostrado na figura 6.6. Conforme vemos nesta figura, temos uma espécie de realimentação das decisões, explicando o nome deste equalizador, que também é conhecido como DFE, do inglês *decision-feedback equalizer*.

É importante chamar a atenção para o fato de que o filtro de realimentação tem que ser estritamente causal, mesmo dentro de nosso contexto onde aceitamos alguns filtros não-causais. Isto ocorre porque nós temos acesso apenas às decisões passadas, e portanto devemos ter que $b_k = 0$ para $k \leq 0$.

Para tentarmos entender melhor o funcionamento do DFE, vamos pensar em primeiro lugar no efeito do equalizador linear. Como mostrado na figura 6.4, na página 100, a resposta ao impulso combinada do canal com o equalizador ainda possui alguma IIS. Assim, no instante k , podemos usar o conhecimento dos símbolos passados e desta resposta ao impulso combinada para estimar a IIS causada pelos símbolos s_n , para $n < k$, na entrada do dispositivo de decisão, \tilde{s}_k . Esta IIS é chamada de IIS pré-cursora, e corresponde à cauda causal da resposta ao impulso combinada. Sua estimativa pode ser subtraída da entrada do dispositivo de decisão, o que, espera-se, eliminará seu efeito. É esta idéia de cancelamento da IIS pré-cursora que leva à estrutura da figura 6.6.

Baseado nas observações acima, podemos pensar que o DFE divide a tarefa de mitigar a IIS em dois. O filtro linear w_k tenta mitigar a parte não causal da IIS, enquanto o filtro de realimentação tenta cancelar a sua parte causal. Uma constatação da veracidade desta observação é que pode-se provar que o filtro ótimo w_k é anti-causal. Também é interessante notar que a presença do dispositivo de decisão faz com que o filtro com realimentação seja sempre estável. De fato, a

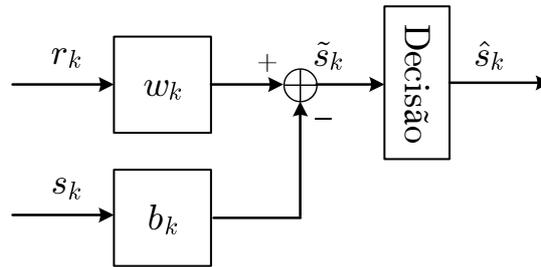


Figura 6.7: O DFE com a hipótese de decisões corretas.

amplitude da saída deste filtro está limitada pelo dispositivo de decisão.

Um grande problema do DFE é a questão da propagação de erro. Imagine que, por algum motivo, $\hat{s}_k \neq s_k$. Neste caso, se usarmos \hat{s}_k para estimarmos a IIS pré-cursora no instante $k + 1$, estaremos obviamente cometendo um erro. Este erro aumentará a probabilidade de que $\hat{s}_{k+1} \neq s_{k+1}$, o que por sua vez aumenta a probabilidade de um erro no instante $k + 2$, etc. Este fenômeno é conhecido como *propagação de erro*, e é um dos principais problemas de equalizadores DFE. Em sistemas como modems discados, este problema é resolvido transferindo-se o filtro realimentado para o transmissor, onde conhecemos exatamente os símbolos transmitidos e portanto não temos propagação de erro. Esta solução, conhecida como precodificação de Tomlinson-Harashima, envolve algumas outras complicações, e seu estudo foge do escopo deste curso.

6.4.1 Os Coeficientes do DFE

Nesta seção, calcularemos os coeficientes do DFE. Como sempre, buscaremos uma solução de quadrados mínimos. Ou seja, queremos minimizar

$$J(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = E[|e_k|^2], \quad (6.40)$$

onde $e_k = s_k - \tilde{s}_k$ é a diferença entre a entrada do dispositivo de decisão e o que se deseja em sua saída. Em princípio, a solução exata deste problema é bastante complicada. Afinal de contas, a saída do equalizador depende de \hat{s}_n , para $n < k$, que são funções não lineares de \tilde{s}_n . Conforme adiantamos anteriormente, a solução aqui é assumir que as decisões estão corretas. Neste caso, podemos pensar no DFE como o filtro mostrado na figura 6.7.

Assim, sejam

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{-(N_w-1)} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_b-1} \end{bmatrix}, \mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ \vdots \\ r_{k+(N_w-1)} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} s_{k-1} \\ \vdots \\ s_{k-(N_b-1)} \end{bmatrix}$$

os vetores correspondentes, respectivamente, à resposta ao impulso do equalizador w_k , do equalizador realimentado b_k , e às entradas destes equalizadores. Note que definimos os filtros w_k e b_k como sendo anti-causal e estritamente causal, respectivamente, o que está de acordo com nossas observações anteriores. Defina, então,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Com isso, podemos escrever o sinal \tilde{s}_k como $\tilde{s}_k = \mathbf{x}^T \mathbf{y}_k$. Com estas definições, caímos em um problema exatamente igual ao encontrado no filtro linear, o que nos leva à mesma solução:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{p}, \quad (6.42)$$

onde

$$\mathbf{R}_y = E[\mathbf{y}_k^* \mathbf{y}_k^T] = \begin{bmatrix} E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T] & E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{s}_k^T] \\ E[\mathbf{s}_k^* \mathbf{r}_k^T] & E[\mathbf{s}_k^* \mathbf{s}_k^T] \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{p} = E[s_k \mathbf{y}_k^*] = \begin{bmatrix} E[\mathbf{r}_k^* s_k] \\ E[\mathbf{s}_k^* s_k] \end{bmatrix}.$$

Como no caso linear, o erro mínimo é dado por

$$J_{\min}(\mathbf{w}) = E[|s_k|^2] - \mathbf{p}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \quad (6.44)$$

A diferença em relação ao caso linear está na definição das grandezas usadas nesta equação.

Também neste caso é interessante determinar os coeficientes do DFE em função dos coeficientes do canal. Para fazê-lo, vamos considerar os blocos de \mathbf{R}_y e \mathbf{p} . Já vimos, do caso linear, que $E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T] = E_s \mathbf{F}^* \mathbf{F}^T + \sigma^2 \mathbf{I}$ e $E[\mathbf{r}_k^* s_k] = E_s \mathbf{f}_0^*$. Lembre-se agora que os símbolos transmitidos são decorrelacionados, ou seja, $E[s_{k-i}^* s_k] = \delta_i$. Assim, o outro bloco de \mathbf{p} , $E[\mathbf{s}_k^* s_k]$, é igual a zero, já que o vetor \mathbf{s}_k não contém o símbolo s_k . Temos também que o outro bloco na diagonal de \mathbf{R}_y , $E[\mathbf{s}_k^* \mathbf{s}_k^T]$, é igual a $E_s \mathbf{I}$.

Falta determinar o bloco fora da diagonal de \mathbf{R}_y , $E[\mathbf{s}_k^* \mathbf{r}_k^T]$. (Note que o outro bloco, $E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{s}_k^T]$, é o Hermitiano desse bloco.) Temos, neste caso, que

$$E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{s}_k^T] = \mathbf{F}^* E \left[\begin{bmatrix} s_{k-L_2}^* \\ \vdots \\ s_{k+N_w+L_1}^* \end{bmatrix} [s_{k-1}, \dots, s_{k-(N_b-1)}] \right], \quad (6.45)$$

já que o ruído é independente dos símbolos transmitidos.

6.5 Equalizadores Adaptativos

Conforme vimos, a determinação dos coeficientes do equalizador, sejam eles lineares ou com realimentação, ZF ou MMSE, passa pelo conhecimento dos coeficientes do canal. De fato, mesmo o equalizador de distância mínima supõe o conhecimento do canal. Obviamente, em um sistema prático não podemos assumir que isto seja verdade. Assim, o objetivo desta seção é o estudo de técnicas para a determinação dos coeficientes de equalizadores.

Uma primeira observação é que o equalizador linear pode ser determinado diretamente a partir de (6.29). De fato, a matriz de autocorrelação do sinal recebido pode ser estimada como uma média temporal a partir da recepção de K amostras:

$$\mathbf{R} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T. \quad (6.46)$$

De forma equivalente, podemos também determinar o vetor de correlação cruzada como

$$\mathbf{p} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{r}_k^* s_k. \quad (6.47)$$

Observações semelhantes podem ser feitas a respeito do DFE.

Nestas duas equações, chamamos a atenção para alguns fatos importantes. Em primeiro lugar, ainda que o vetor \mathbf{r}_k esteja facilmente disponível no receptor (trata-se, afinal de contas, do sinal recebido), o mesmo obviamente não ocorre com o sinal s_k . De fato, se o sinal transmitido fosse conhecido do receptor, não haveria necessidade de nenhuma transmissão.

Outra observação importante é que a solução proposta acima é conhecida por uma solução por blocos. Isto quer dizer que nesta abordagem fazemos em primeiro lugar uma aquisição de um bloco de dados, para em seguida determinar o equalizador.

Isto envolve algumas hipóteses tácitas. Por exemplo, assumimos indiretamente que o canal permanece constante durante a transmissão dos K símbolos. Em resumo, assumimos que o canal é estacionário. Infelizmente, muitos canais variam no tempo, alguns muito rapidamente. Um exemplo disto são canais de telefonia celulares, onde o movimento do terminal móvel induz rápidas variações no canal.

Na seqüência, estudaremos um algoritmo que contorna a hipótese de estacionariedade, podendo “rastrear” as mudanças no canal. Em seguida, veremos como sistemas de comunicações contornam a necessidade do conhecimento do sinal transmitido para o cálculo do equalizador.

6.5.1 O Algoritmo LMS

Nesta seção, estudaremos o algoritmo de quadrados mínimos (LMS, do inglês *Least Mean Square*). Este algoritmo, descoberto por Widrow, um professor de Stanford, no começo dos anos 60, encontra diversas aplicações práticas em várias áreas distintas. Aqui, discutiremos o algoritmo apenas no contexto de equalização.

Lembre-se que buscamos os coeficientes do equalizador, \mathbf{w} , que minimizam a função custo $J(\mathbf{w}) = E[|e_k|^2]$. A idéia aqui é tentar achar iterativamente o mínimo desta função, pois não queremos ou não podemos calculá-lo diretamente. Isto significa que queremos determinar um método para, dado um ponto \mathbf{w}_k , determinarmos um ponto \mathbf{w}_{k+1} tal que, partindo de um ponto inicial \mathbf{w}_0 qualquer, o “caminho” dado por $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots$ leve a um mínimo da função $J(\mathbf{w})$. Existem diversos métodos para determinar \mathbf{w}_{k+1} a partir de \mathbf{w}_k , cada qual com diferentes características.

Devido à sua simplicidade, aliada a um bom desempenho, o chamado método do gradiente para minimização de uma função é particularmente importante em comunicações. Lembre-se, do curso de cálculo, que o gradiente de uma função aponta para a direção em que a função cresce mais rapidamente. Isto é equivalente a dizer que o negativo do vetor gradiente aponta para a direção em que a função diminui mais rapidamente. Em outras palavras, se dermos um passo pequeno na direção oposta a $\nabla_{\mathbf{w}}J(\mathbf{w}_k)$ a partir de \mathbf{w}_k , chegaremos a um ponto onde a função custo tem um valor menor do que o obtido com um passo pequeno em qualquer outra direção. Em outras palavras, o método do gradiente calcula o ponto \mathbf{w}_{k+1} como

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \frac{\mu}{2} \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}_k). \quad (6.48)$$

O motivo da divisão por 2 será explicado adiante.

Em (6.48), o valor de μ controla o tamanho do passo. Ou seja, quanto maior for μ , maior será o tamanho do passo na direção do gradiente. Um valor grande de μ pode nos fazer chegar rapidamente às proximidades do ponto de mínimo. Entretanto, nas proximidades da solução, um valor grande de μ pode nos fazer dar passos exageradamente grandes, o que pode fazer com que fiquemos “zigzagueando” ao redor da solução. A situação é análoga a um jogo de golfe, onde μ faz o papel da força da tacada. No começo, desejamos dar tacadas fortes, para nos aproximarmos rapidamente do buraco. Entretanto, nas proximidades do buraco, devemos diminuir a força da tacada, de forma a evitar que uma tacada errada leve a bola para muito longe do buraco.

A discussão acima pode nos levar a pensar que um passo variável, inicialmente grande e que diminua lentamente, é essencial para o bom desempenho do algoritmo. No caso de situações práticas em telecomunicações, em geral isto não é verdade, e um passo constante é utilizado. Isto porquê se o canal mudar quando o passo for pequeno (o que é equivalente ao buraco do golfe mudar de lugar), o algoritmo pode demorar muito para conseguir se adaptar ao novo canal. Assim, na prática, usa-se em geral um valor constante para μ , normalmente entre 0.001 e 0.1.

Conforme vimos em (6.31), o gradiente da função custo é dado por $\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}_k) = -2 \mathbf{E}[\mathbf{r}_k^* e_k]$. Assim, no caso de equalização MMSE linear, podemos calcular iterativamente os coeficientes do equalizador como

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \mu \mathbf{E}[\mathbf{r}_k^* e_k]. \quad (6.49)$$

Em primeiro lugar, observamos que a divisão por 2 em (6.48) evita uma multiplicação por 2 em (6.49).

Outra observação importante é que em (6.49) precisamos calcular $\mathbf{E}[\mathbf{r}_k^* e_k]$, o que ainda requer o conhecimento do canal. Ou seja, apesar de já termos feito bastante cálculos, ainda não conseguimos atingir nosso objetivo. A solução para isto consiste em substituir o valor esperado, $\mathbf{E}[\mathbf{r}_k^* e_k]$, pelo seu valor instantâneo, $\mathbf{r}_k^* e_k$. Esta substituição leva a um algoritmo conhecido como método do gradiente estocástico.

Substituir $\mathbf{E}[\mathbf{r}_k^* e_k]$ por $\mathbf{r}_k^* e_k$ é evidentemente estranha, pois obviamente não podemos esperar que o valor instantâneo seja igual à média. De certa forma, podemos pensar que aqui estamos tentando estimar uma média do vetor aleatório $\mathbf{r}_k^* e_k$ usando apenas uma de suas amostras. Como o algoritmo repete este procedimento para diversos valores de k , podemos pensar que esta repetição, de certa forma, executa uma média temporal.

Visto de outra forma, o algoritmo do gradiente estocástico percorre o “caminho do bêbado” na direção do gradiente. Analisemos um caso bidimensional para entender o que isto quer dizer. No instante k , o algoritmo dá um passo em uma direção à esquerda da direção correta. No instante seguinte, ele erra de novo, desta vez para a direita. Em $k + 2$, ele erra para a direita de novo, desta vez por um valor maior. Podemos pensar que estes erros possuam média zero, de forma que na média o algoritmo está indo na direção correta.

Chegamos, finalmente, ao algoritmo de mínima média quadrático (LMS, do inglês *least-mean square*):

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \mu \mathbf{r}_k^* e_k. \quad (6.50)$$

Note que este algoritmo não minimiza nada, encontrando na realidade uma solução aproximada. Ainda assim, o nome LMS é consagrado, e versões deste algoritmo são encontradas nas mais diversas aplicações.

Uma observação final é que, para calcularmos e_k , necessitamos conhecer o sinal transmitido. Como mencionamos, se isto fosse possível não haveria a necessidade de transmitir nada. Na próxima seção discutiremos como sistemas de comunicações contornam este problema.

6.5.2 A Seqüência de Treinamento

Conforme vimos, a estimação do equalizador no receptor necessita do conhecimento dos símbolos transmitidos. Por isto, sistemas de comunicações possuem em geral dois modos de operação: o *modo de treinamento* e o *modo de decisão direta*.

Durante o modo de treinamento, a seqüência transmitida é conhecida do receptor, e é chamada de seqüência de treinamento. Durante este modo, o receptor pode executar o algoritmo LMS como visto em (6.50). O sistema sempre opera no modo de treinamento durante a inicialização da conexão.

Após o treinamento inicial, espera-se que o algoritmo tenha convergido para um equalizador com desempenho satisfatório. Neste caso, podemos esperar que as decisões na saída do equalizador, \hat{s}_k , sejam em geral iguais ao sinal transmitido. Assim, após o modo de treinamento, o sistema passa a operar no modo de decisão direta. Aqui, os bits transmitidos carregam informação, e são portanto desconhecidos do receptor. Para calcular o erro e poder operar o LMS, o receptor usa então as suas próprias decisões. Por isto, talvez o nome de modo dirigido por decisões fosse mais apropriado, mas o nome decisão direta é consagrado.

De qualquer forma, no modo de decisão direta o LMS tenta rastrear variações lentas do canal, calculando o erro como

$$e_k = s_k - \hat{s}_k. \quad (6.51)$$

Isto em geral funciona para variações lentas do canal. Ainda assim, a maioria dos sistemas volta periodicamente ao modo de treinamento, retransmitindo, em instantes específicos determinados pela especificação do sistema, uma seqüência de treinamento. Por exemplo, o sistema GSM transmite em blocos de aproximadamente 156 bits, dos quais 26 correspondem a bits de treinamento.

6.6 Exercícios

EXERCÍCIO 6.3:

Efeito do atraso de treinamento no desempenho de equalizadores:

Neste exercício, exploraremos o impacto do atraso de treinamento d no desempenho. Para analisar o desempenho, vamos usar o valor do erro quadrático médio em função do equalizador $\mathbf{w}(d)$, levando em conta o atraso d é dado por:

$$J(\mathbf{w}(d)) = E\{|s_k|^2\} - \mathbf{p}^H \mathbf{w}(d)$$

Para calcular os coeficientes do filtro, precisamos da matriz de convolução \mathbf{F} de dimensões $(N_1 + N_2 + 1) \times (N_1 + N_2 + L_1 + L_2 + 1)$:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{L_2} & f_{L_2-1} & \cdots & f_{-L_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{L_2} & f_{L_2-1} & \cdots & f_{-L_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{L_2} & f_{L_2-1} & \cdots & f_{-L_1} \end{bmatrix}$$

que no Matlab é gerada por:

```
F = convmtx(f(end:-1:1).', N1+N2+1); % f é um vetor coluna!
```

A matriz de correlação \mathbf{R} do sinal recebido é dada por (6.38):

$$\mathbf{R} = \sigma_s^2 \mathbf{F} \mathbf{F}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

O vetor de correlação cruzada $\mathbf{p}(d)$ é dado por:

$$\mathbf{p}(d) = \sigma_s^2 \mathbf{F} \mathbf{q}(d)$$

onde $\mathbf{q}(d)$ é um vetor coluna de dimensão $(N_1 + N_2 + L_1 + L_2 + 1)$ cujo todos elementos são nulos a exceção do elemento $N_2 - N_1 + L_2 - L_1 + 1 + d$ que é igual a 1.

Vamos considerar um canal causal ($L_1 = 0$) cuja representação vetorial é dada por:

$$\mathbf{f} = \left[f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{L_2} \right]^T$$

Seja $N_1 = d$ e $N_2 = 7 - d$ e um canal com $L_2 = 4$. Pede-se traçar $J(\mathbf{w}(d))$ para $0 \leq d \leq 11$ para os seguintes canais:

$$\mathbf{f}_1 = [0.8472 \quad -0.3042 \quad 0.0616 \quad -0.3845 \quad 0.1952] . '$$

$$\mathbf{f}_2 = [0.5422 \quad 0.0493 \quad 0.2568 \quad -0.7380 \quad 0.3050] . '$$

$$\mathbf{f}_3 = [0.1952 \quad -0.3845 \quad 0.0616 \quad -0.3042 \quad 0.8472] . '$$

Para cada canal considere dois casos: (i) variância do ruído $\sigma_n^2 = 0.001$ e (ii) $\sigma_n^2 = 0.4$. Considere uma modulação 4-QAM cujos símbolos s_k são equiprováveis e que $s_k \in \{1 + j, 1 - j, -1 + j, -1 - j\}$. Discuta os resultados, sabendo que \mathbf{f}_1 é um canal de fase mínima, \mathbf{f}_2 é um canal de fase mista e \mathbf{f}_3 é um canal de fase máxima.

EXERCÍCIO 6.4:

Comparação do filtro linear e DFE.

Considere uma modulação 4-QAM com $s_k \in \{1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j\}$ e que a variância do ruído é igual a $\sigma_n^2 = 0.001$. Considere que o equalizador trabalhe na taxa de símbolo. Seja o canal:

$$\mathbf{f} = [0.6389 \quad 0.5750 \quad 0.5111] . '$$

cuja norma é unitária.

Como não temos mais um canal AWGN, mas sim um canal dispersivo, o sinal recebido em banda base é dado no Matlab por:

```
r=conv(s,f); %Convolução dos símbolos em banda base (s) com o canal (f)
r=r+sqrt(0.0005)*(randn(1,length(r))+j*randn(1,length(r))); %adiciona ruído
```

Pede-se:

- a) Implemente um equalizador adaptativo linear e um DFE para equalizar este canal usando o algoritmo LMS e treinamento contínuo. Inicialize seu filtro com coeficientes nulos. O tamanho dos filtros e o atraso de treinamento fica ao critério do projetista, ou seja, você! Para simular os equalizadores, sugere-se usar o modelo em banda base com amostragem na taxa de símbolo, da lista 2, exercício 4.7.
- b) Trace a evolução do módulo ao quadrado do erro ($|e_k|^2$) para avaliar a velocidade de convergência do filtro e o patamar de erro após convergência para dois valores distintos do passo de adaptação. Use escala logarítmica no eixo correspondente a $|e_k|^2$. Trace também a evolução dos símbolos estimados (\tilde{s}_k) usando o comando `plot(real(\tilde{s}_k), 'r')`. Simule um número adequado de símbolos para poder ver quando os equalizadores convergem. Análise e comente os resultados.
- c) Altere o seu programa para permitir a adaptação usando como referência o sinal decidido (técnica LMS-DD). Inicie a adaptação e chaveie para o modo DD depois de X símbolos. Mostre e discuta a influência no desempenho do valor X, usando tanto o erro quadrático como também a evolução das estimativas dos símbolos (\tilde{s}_k).

Dica: Ao traçar a evolução do valor absoluto ao quadrado do erro, faça várias realizações e tire médias dos valores de forma a deixar a curva mais lisa.

EXERCÍCIO 6.5:

Canal variante no tempo. Considere o seguinte canal de fase mínima sem ruído:

$$\mathbf{f}_k = [1 \ 0.99 \sin(\pi(k-1)/4000)]^T$$

cuja implementação em Matlab é feita por:

```
%% canal
r=zeros(1,length(s));
r(1)=s(1);
for k=2:length(s);
    r(k)=[s(k) s(k-1)]*[1 0.99*sin(pi*(k-1)/4000)].';
end
```

Simule 16000 símbolos para o filtro linear e o DFE sob treinamento contínuo. Tanto o passo de adaptação, o atraso de treinamento e o tamanho dos filtros ficam ao seu critério. Trace a parte real de \tilde{s}_k (`plot(real(\tilde{s}_k), 'r')`) e comente a respeito da robustez ao ruído dos filtros linear e do DFE.

CAPÍTULO 7

Sincronização

Do capítulo 3, vimos que, para o canal AWGN, o receptor ótimo no sentido de minimizar a probabilidade de erro é o filtro casado. A fim de obter as estimativas dos símbolos recebidos é necessário amostrar a saída deste filtro nos instantes em que o olho se encontra o mais aberto possível. Já no capítulo 4, mostramos que para demodular coerentemente o sinal de banda passante para banda base é necessário fazê-lo com a mesma frequência e fase de portadora com que foi realizada a modulação no transmissor.

Contudo, na prática, a propagação do sinal pelo canal não é feita instantaneamente, ou seja, o canal insere no sinal um atraso. Além disso, a referência temporal do transmissor e do receptor pode não ser exatamente a mesma, o que equivale a uma diferença de fase entre as portadoras. Finalmente, os osciladores que controlam as portadoras podem apresentar imperfeições, de forma que haja uma diferença de frequências entre elas.

Para que os símbolos transmitidos possam ser demodulados corretamente, é necessário que o receptor estime e corrija esses desvios, o que chamamos de sincronismo.

Existem várias técnicas de sincronismo e o estudo de todas por si só já compreenderia um curso inteiro. Nos restringiremos a algumas técnicas mais clássicas voltadas para as modulações que estudamos até aqui, ou seja, PAM e QAM.

A seguir, caracterizaremos as possíveis formas sob as quais podemos implementar as técnicas de sincronismo.

7.1 Caracterização do sincronismo

Podemos separar o sincronismo em duas categorias:

- malha aberta;
- malha fechada ou com realimentação.

Na técnica em malha aberta, a correção do sincronismo se dá posteriormente à detecção do erro do mesmo. Como geralmente o valor detectado está corrompido por ruído, a realização de médias dos valores estimados permite aumentar a precisão do parâmetro estimado.

Já a técnica em malha fechada utiliza um processo de realimentação do erro de sincronismo. Isto é obtido indiretamente com a correção do parâmetro de sincronismo anteriormente à estimação do erro de sincronismo. Esta forma de implementação possui duas particularidades quando comparada à técnica de malha aberta. A primeira está no valor do erro de sincronismo. O valor desse precisa ser apenas proporcional ao verdadeiro valor e não o valor exato. Ainda, o erro de sincronismo não é enviado diretamente para a realização da correção. O erro deve ser inserido num integrador (acumulador) que faz o papel de encontrar o verdadeiro desvio e o de reduzir o efeito do ruído na estimação. Finalmente, a saída deste integrador é usada para a correção antes do detector de erro, o que fecha a nossa malha. Este é o princípio do PLL (do inglês, *Phase-Locked Loop*).

A técnica de malha aberta permite uma aquisição mais rápida dos parâmetros de sincronismo quando comparada às técnicas de malha fechada e, portanto, são mais usadas em transmissões de curta duração (transmissão por pacotes ou rajadas (*bursts*) de dados). Contudo, uma vez que o sincronismo seja adquirido, nada impede que se use posteriormente técnicas de malha fechada, que são mais adequadas para rastrear eventuais mudanças dos parâmetros de sincronização. Vale ressaltar que as técnicas de malha fechada são amplamente usadas onde a transmissão se faz de forma ininterrupta.

Ainda, podemos classificar as técnicas de sincronismo em:

- auxiliada por dados (DA, do inglês *data-aided*) quando usamos uma seqüência de treinamento para estimar os parâmetros desejados.
- dirigida pela decisão (DD, do inglês *decision-directed*) quando utiliza-se decisões sobre os sinal recebido para realizar a estimação;

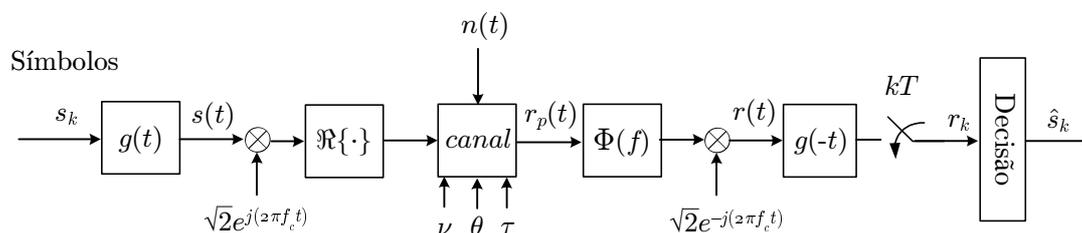


Figura 7.1: Esquema genérico de um sistema de comunicação digital, onde $\Phi(f)$ é o filtro divisor de fase descrito pela eq. (4.35).

- autoditada (NDA, do inglês *non-data-aided*) quando se faz uso de certas propriedades do sinal transmitido para efetuar a estimação.

Por fim, vale ressaltar que a estimação de diversos parâmetros de sincronismo pode ser feita de forma conjunta. Por exemplo, a estimação conjunta do atraso τ e da fase θ do sinal. Tais técnicas são geralmente mais eficazes, mas costumam ser mais complexas.

Iniciaremos nosso estudo primeiramente sobre a sincronização (ou recuperação) da frequência e fase da portadora supondo que, se for o caso, o instante ideal de amostragem já foi recuperado. Em seguida, trataremos da obtenção deste.

Mas antes de continuarmos, vamos estabelecer algumas convenções.

7.2 Modelo matemático para o sincronismo

O canal, como anteriormente dito, introduz um atraso de propagação que denotaremos de τ . Além disso, visando simplificar a notação e o modelamento, concentraremos no canal os desvios de fase e de frequência das portadoras, as quais chamaremos respectivamente de θ e ν . Ainda, o canal também é responsável por inserir ruído Gaussiano branco. A figura 7.1 mostra um esquema genérico de um sistema de comunicação digital levando em conta o modelo de canal adotado.

Na recepção, supondo uma modulação coerente, temos como incerteza o desvio de frequência e de fase da portadora e o instante de amostragem da saída do filtro casado. O sinal, em banda passante é representado por:

$$r_p(t) = \sqrt{2}x(t-\tau) \cos(2\pi(f_c+\nu)(t-\tau)+\phi) - \sqrt{2}y(t-\tau) \sin(2\pi(f_c+\nu)(t-\tau)+\phi) + n'(t) \quad (7.1)$$

Após demodulação e algumas manipulações algébricas, temos em banda base o seguinte sinal:

$$\begin{aligned} r(t) &= (x(t - \tau) + jy(t - \tau))e^{j(2\pi\nu(t-\tau)+\theta)} + n(t) \\ &= s(t - \tau)e^{j(2\pi\nu(t-\tau)+\theta)} + n(t) \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde $\theta = \phi - 2\pi f_c \tau$.

7.3 Sincronismo de frequência e fase da portadora

Em modulações coerentes, um desvio de fase ocasiona um aumento na probabilidade de erro e dependendo da rotação, pode gerar erros de decisão independentemente da relação sinal ruído (vide exercício 4.3). Já o desvio de frequência da portadora quando é da ordem de $|\nu| \ll 1/T$, provoca no sinal após o filtro casado uma rotação contínua de fase (incrementos de $2\pi\nu$ a cada símbolo), o que pode ser facilmente corrigido. Contudo, quando ν é da mesma ordem de $1/T$, o sinal após passar pelo filtro casado sofre grandes distorções de amplitude ou pode até mesmo desaparecer. Neste caso, a correção deve ser feita antes da passagem do sinal pelo filtro casado.

Existem vários algoritmos que permitem estimar a fase θ e a frequência ν e que, em termos práticos, se adequam melhor ou pior dependendo da situação. Não cabe aqui fazer um estudo abrangente sobre todas as técnicas e assumiremos um caso mais representativo. Faremos a hipótese de que para realizar a estimação de ν e de θ , dispomos do atraso τ . Este caso ocorre quando $|\nu| \ll 1/T$, o que permite recuperar o atraso τ antes ou ao mesmo tempo que ν e θ . Desta forma, o sinal $r(t)$ descrito em (7.2), quando amostrado após o filtro casado nos instantes $kT + \tau$, pode ser escrito como:

$$r_k = s_k e^{j(2\pi\nu kT + \theta)} + n_k \quad (7.3)$$

Dada a hipótese de que $|\nu| \ll 1/T$ e que o atraso τ do instante de amostragem já foi obtido, a correção do desvio de frequência e de fase está representado na figura 7.2.

Vale mencionar que existem técnicas que possibilitam nos levar de uma situação em que $|\nu|$ é da ordem de $1/T$ para a situação assumida, mas que não a trataremos aqui.

Começaremos por técnicas que operam em malha aberta e depois veremos técnicas de malha fechada.

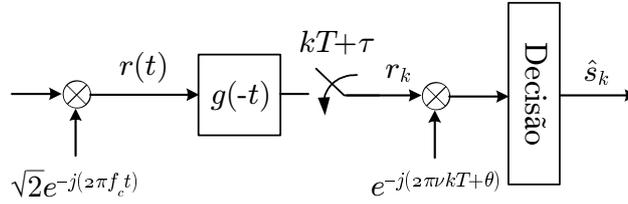


Figura 7.2: Correção do sincronismo de frequência e fase da portadora assumindo $|\nu| \ll 1/T$.

7.3.1 Técnicas de malha aberta

Uma técnica muito utilizada para obter o desvio de frequência é a de eliminar a dependência do símbolo transmitido, multiplicando-se o sinal recebido em banda base pelo conjugado do símbolo. Procedendo desta forma, temos a partir de (7.3):

$$z_k = r_k s_k^* = s_k s_k^* e^{j(2\pi\nu kT + \theta)} + s_k^* n_k \quad (7.4)$$

Para facilitar a compreensão deste algoritmo, vamos supor que $s_k s_k^* = 1$ e que $n'_k \triangleq s_k^* n_k$. Podemos reescrever (7.4) tal que:

$$\begin{aligned} z_k &= e^{j(2\pi\nu kT + \theta)} + n'_k \\ &= \rho_k e^{j(2\pi\nu kT + \theta + \phi_k)} \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde $\rho_k e^{j\phi_k} = 1 + n'_k e^{-j(2\pi\nu kT + \theta)}$.

Pode-se mostrar que, a medida que a relação sinal-ruído aumenta, a variável aleatória ϕ_k é aproximadamente independente, possui média nula e distribuição Gaussiana.

Considere agora o argumento¹ do produto $z_k z_{k-1}^*$. A partir de (7.5), obtemos:

$$\arg\{z_k z_{k-1}^*\} = 2\pi\nu T + \phi_k - \phi_{k-1} \quad (7.6)$$

Está claro que o valor $\arg\{z_k z_{k-1}^*\}$ pode ser visto como uma medida ruidosa de $2\pi\nu T$. Assim, é mais ou menos intuitivo que para melhorar essa medida de $2\pi\nu T$, precisamos realizar alguma espécie de média. Assumindo que dispomos de $L_0 - 1$

¹Seja x uma variável complexa. A função argumento calcula a fase de x levando em conta o quadrante em que a variável se encontra. Ou seja: $\arg\{x\} = \text{atan}(\Im(x)/\Re(x))$ se $\Re(x) > 0$; $\arg\{x\} = \text{atan}(\Im(x)/\Re(x)) + \pi$ se $\Re(x) < 0$ e $\Im(x) > 0$; e finalmente $\arg\{x\} = \text{atan}(\Im(x)/\Re(x)) - \pi$ se $\Re(x) < 0$ e $\Im(x) < 0$. A função $\arg\{x\}$ é definida entre $[-\pi, \pi]$ e sua implementação em linguagens de programação geralmente é $\text{atan2}(\Im(x), \Re(x))$

medidas de $z_k z_{k-1}^*$ e que trabalhamos com modulações 2-PAM ou 4-QAM, a melhor estimativa do desvio de frequência $\hat{\nu}$ é dado por:

$$\hat{\nu} = \frac{1}{2\pi T} \sum_{k=1}^{L_0-1} \gamma_k \arg\{z_k z_{k-1}^*\} \quad (7.7)$$

onde γ_k é uma função de “alisamento” dada por:

$$\gamma_k = \frac{3}{2} \frac{L_0}{L_0^2 - 1} \left[1 - \left(\frac{2k - L_0}{L_0} \right)^2 \right] \quad (7.8)$$

Esta técnica é conhecida como técnica de Kay.

Note que $z_k z_{k-1}^*$ é uma estimativa do primeiro elemento da autocorrelação. Podemos ainda explorar os demais momentos, i.e., $z_k z_{k-2}^*$, $z_k z_{k-3}^*$ e assim por diante até $z_k z_{k-L_0}^*$. É isso o que fazem as técnicas desenvolvidas por Fitz e Luise & Reggiannini (L&R).

Para mostrar ambas técnicas, vamos definir as estimativas dos termos da autocorrelação de $z_k z_{k-1}^*$ como:

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^{L_0-1} z_k z_{k-m}^*, \quad 1 \leq m \leq L_0 - 1 \quad (7.9)$$

A técnica de Fitz é dada por:

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\pi(N+1)T} \sum_{m=1}^N \arg\{R(m)\} \quad (7.10)$$

e a técnica de L&R é computada por:

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\pi(N+1)T} \arg \left\{ \sum_{m=1}^N R(m) \right\} \quad (7.11)$$

Para ambas as técnicas, o desempenho ótimo é obtido quando $N = L_0/2$. Valores de N inferiores a esse possibilitam um maior alcance na estimação do desvio de frequência, mas ocasionam uma perda na precisão do estimador.

A diferença destas técnicas reside no alcance das frequências que podem ser corrigidas e no desempenho do estimador. A técnica de Kay é a que possibilita o maior alcance, mas é a que possui pior desempenho em baixas relações sinal ruído. No caso das técnicas de Fitz e L&R, o desempenho em baixa relações sinal-ruído

é muito superior à técnica de Kay, mas em contrapartida ela possui um alcance de estimação consideravelmente menor. Em relações sinal-ruído elevadas, as técnicas apresentam o mesmo desempenho.

Após a correção do desvio de frequência, podemos estimar facilmente o desvio de fase usando o critério de máxima verossimilhança (MV). Por este critério, a estimação da fase é dada por:

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ \sum_{k=0}^{L_0-1} z_k e^{-j2\pi\nu kT} \right\} \quad (7.12)$$

Contudo, nem sempre é possível dispor de símbolos transmitidos conhecidos na recepção (seqüência de treinamento). Neste caso, podemos usar não linearidades para eliminar a dependência da fase do símbolo transmitido, obtendo assim uma técnica NDA. Uma técnica muito usada para modulações 2-PAM e 4-QAM consiste em elevar o sinal recebido r_k pela segunda e quarta potência respectivamente. Para visualizar essa solução, considere a representação do sinal 2-PAM e 4-QAM na forma polar:

$$\begin{aligned} 2 - \text{PAM} : s_k &= d e^{j2\pi m/2}, \quad m = 0, 1 \\ 4 - \text{QAM} : s_k &= \sqrt{2} d e^{j(2\pi m/4 + \pi/4)} \quad m = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ao se elevar ao quadrado a modulação 2-PAM, o argumento da exponencial será igual a $2\pi m$. Já a modulação 4-QAM, quando elevada a quarta potência, o argumento da exponencial será igual a $2\pi m + \pi$. No primeiro caso, a exponencial sempre resultará em 1, independentemente do valor de m . Já para o 4-QAM, a exponencial sempre resultara em -1, para qualquer que seja o valor de m . Desta forma, após elevar o sinal pela potência correspondente, podemos proceder como no caso DA para eliminar a dependência do instante k e da fase θ , ou seja:

$$[r_k r_{k-1}^*]^N = \alpha e^{j2\pi\nu NkT} + n_k'' \quad (7.14)$$

onde α é um ganho decorrente do valor d da modulação e n_k'' representa o termo de ruído decorrente dos termos sinal \times ruído e ruído \times ruído. Note que esta técnica terá desempenho inferior ao da técnica DA, visto que ao se elevar a N -ésima potência o sinal $r_k r_{k-1}^*$, novos termos de ruído aparecerão, conduzindo a uma redução da precisão do estimador.

Então, podemos estimar o valor de ν por:

$$\hat{\nu} = \frac{1}{2N\pi T} \arg \left\{ \sum_{k=0}^{L_0-1} [r_k r_{k-1}^*]^N \right\} \quad (7.15)$$

Esta técnica também tem um alcance de busca do desvio reduzido de N , visto que o valor do desvio fica multiplicado pelo mesmo e que o domínio do função $\arg\{\cdot\}$ é de $-\pi$ a π .

A fase também pode ser estimada usando essa técnica não linear. Após a estimação do desvio de frequência, a fase da modulação 2-PAM pode ser obtida por:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{4\pi T} \arg \left\{ \sum_{k=0}^{L_0-1} [r_k e^{-j2\pi\nu kT}]^2 \right\} \quad (7.16)$$

e para a 4-QAM, temos:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{8\pi T} \arg \left\{ - \sum_{k=0}^{L_0-1} [r_k e^{-j2\pi\nu kT}]^4 \right\} \quad (7.17)$$

Contudo, o interesse na recuperação de fase através desta técnica NDA é limitado para modulações coerentes. Tal fato se deve a existência de ambigüidades que podem impedir a correta recuperação da informação transmitida.

Os estimadores dos erros de sincronismo descritos nesta seção também podem ser usados em sistemas de malha fechada. Contudo, existem técnicas específicas para implementação em malha fechada. Como dito anteriormente, os estimadores de sincronismo desta implementação não retornam necessariamente o desvio em si, podendo retornar apenas um erro proporcional a este. A seguir mostraremos algumas técnicas para implementação em malha fechada.

7.3.2 Técnicas de malha fechada

Primeiramente, iremos mostrar uma técnica de sincronismo de frequência do tipo NDA. A técnica pode operar com qualquer modulação do tipo PAM ou QAM, mas iremos nos restringir a modulação 4-QAM para facilitar seu entendimento. O esquema de recuperação do desvio de frequência está representado na figure 7.3 na forma de um diagrama de blocos. O integrador e o VCO (do inglês, *Voltage Controlled Oscillator*) digital estão descritos na figura 7.4. O parâmetro γ do integrador controla a largura de banda do filtro. Uma banda mais estreita (γ pequeno) possibilita uma estimação mais precisa, mas uma velocidade de convergência mais lenta ou menor capacidade de rastreamento no caso de um desvio de frequência no tempo. Caso a banda seja mais larga, ocorre exatamente o contrário.

Note que supomos que o atraso τ é conhecido, o que permite eliminar a interferência intersimbólica no sinal amostrado r_k .

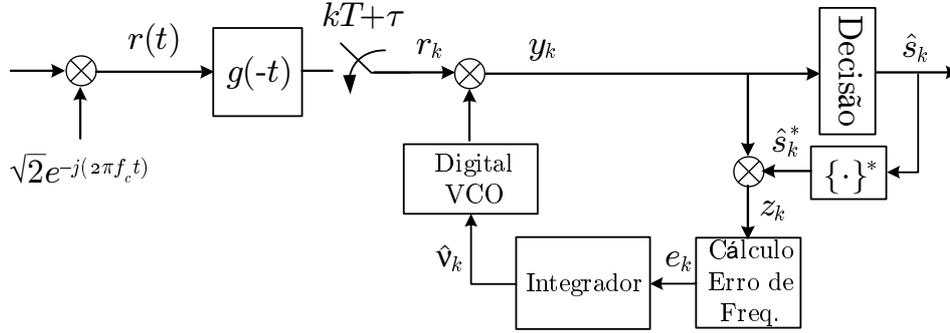
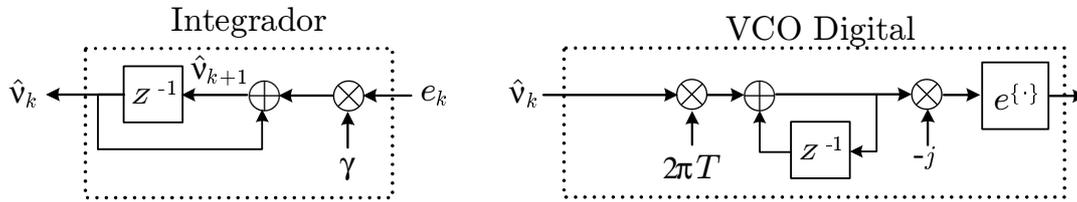

 Figura 7.3: Correção do sincronismo em malha fechada assumindo $|\nu| \ll 1/T$.


Figura 7.4: Integrador e VCO digital.

A fim de facilitar a compreensão do algoritmo, vamos desconsiderar inicialmente a presença do ruído, ou seja, $r_k = s_k e^{j(2\pi\nu kT + \theta)}$. Seja $f_d \triangleq \nu - \hat{\nu}$. Da figura 7.3 e sabendo que a saída do VCO é uma senoíde complexa de frequência $-\nu$ e fase $-\psi_k$, o sinal y_k é dado por:

$$\begin{aligned} y_k &= r_k e^{-j(2\pi\hat{\nu}kT + \psi_k)} \\ &= s_k e^{j(2\pi f_d kT + \theta'_k)} \end{aligned} \quad (7.18)$$

onde $\theta'_k = \theta - \psi_k$

Ainda, o argumento de y_k é dado por:

$$\arg\{y_k\} = \arg\{s_k\} + 2\pi f_d kT + \theta'_k \quad (7.19)$$

Usando o critério de distância mínima e realizando a decisão sobre o sinal y_k , obtemos o símbolo decidido \hat{s}_k . Vale ressaltar que para o correto funcionamento da técnica, não é preciso que $\hat{s}_k = s_k$. A intenção aqui é encontrar em qual quadrante m o sinal y_k se encontra e subtrair de sua fase o valor $(m-1)\pi/2 + \pi/4$. Isto é obtido multiplicando-se \hat{s}_k^* por y_k , o que gera o sinal z_k . Não é difícil de perceber que a diferença de fase entre \hat{s}_k^* e y_k , ou seja, a fase de z_k , sempre estará contida no

intervalo $[-\pi/4, \pi/4)$. Formalmente temos que:

$$\arg\{z_k\} = \text{rem}\{\arg\{s_k\} + \arg\{\hat{s}_k^*\} + 2\pi f_d kT + \theta'_k, \pi/4\} \quad (7.20)$$

onde a função $\text{rem}\{x, y\}$ representa o resto da divisão de x por y .

Note que como a fase de s_k é $i\pi/2 + \pi/4$, onde $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, a diferença de fase entre s_k e \hat{s}_k será um múltiplo de $\pi/2$. Sendo assim, podemos dizer que a fase de (7.20) pode ser representada por apenas:

$$\arg\{z_k\} = \text{rem}\{2\pi f_d kT + \theta'_k, \pi/4\} \quad (7.21)$$

A estimação do sincronismo consiste em realizar uma média de um sinal de erro e_k , tal que esta deve ter o mesmo sinal do desvio f_d . Essa relação é obtida através de:

$$e_k \triangleq \begin{cases} \arg\{z_k\}, & \text{se } |\arg\{z_k\}| < \alpha \\ e_{k-1}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7.22)$$

onde α é um parâmetro positivo e menor que $\pi/4$.

A figura 7.5 ilustra a evolução da fase de z_k em função do tempo para $f_d > 0$ (a) e $f_d < 0$ (b). Já a figura 7.6 mostra o erro e_k em função do tempo para os mesmos casos apresentados na figura 7.5. Fica claro que uma média de e_k para $f_d > 0$ será positiva e para $f_d < 0$, a mesma média será negativa. Vale lembrar que tal média é obtida através do integrador.

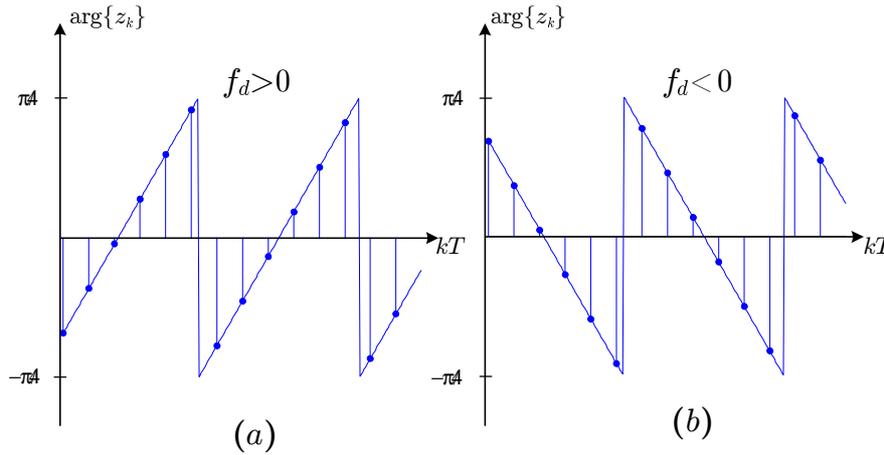
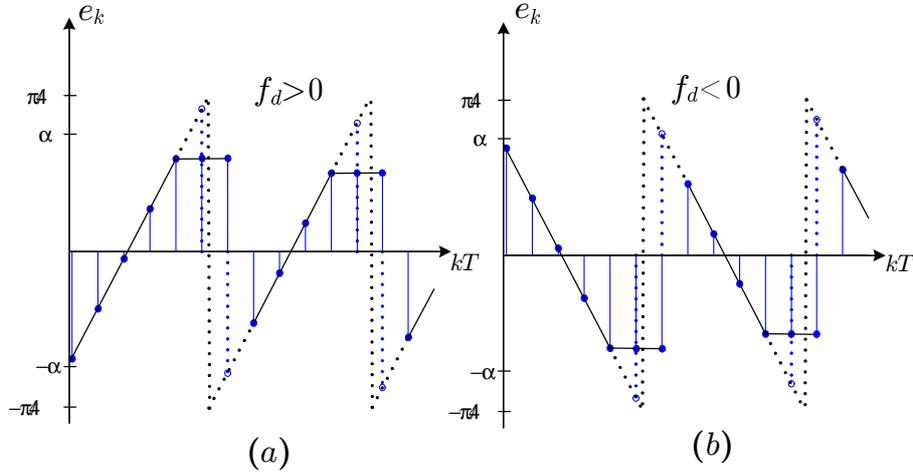


Figura 7.5: Função $\arg\{z_k\}$ versus kT .

Evidentemente, o desempenho desta técnica depende do valor α escolhido.


 Figura 7.6: Evolução do erro e_k (7.22) versus kT .

O leitor atento percebeu que o ponto de estabilidade desta técnica leva também ao cancelamento de θ' . Contudo, dada as ambigüidades desta técnica (pontos de estabilidade a cada $\pi/2$ radianos para modulações 4-QAM), ela tem interesse reduzido para aquisição da fase. Mas em compensação, ela se presta ao rastreamento de possíveis variações de fase, uma vez que a fase correta já foi adquirida por outra técnica DA.

Para realizar a estimação e correção de fase, usaremos o critério do erro quadrático médio (EQM). Da mesma forma que no processo de equalização, poderemos usar uma seqüência conhecida na recepção como referência (técnica DA) ou podemos usar decisões sobre o próprio sinal recebido (técnica DD), o que só é possível quando adotamos implementação em malha fechada.

Vamos considerar que o desvio de freqüência foi corrigido, assim como o desvio do instante de amostragem. Desta forma, o sinal recebido é dado por $r_k = s_k e^{j\theta_k} + n_k$. O função de custo para o critério do erro quadrático médio é dado então por:

$$J(\hat{\theta}_k) = E \left\{ |s_k - r_k e^{-j\hat{\theta}_k}|^2 \right\} \quad (7.23)$$

onde $\hat{\theta}_k$ é a fase estimada no instante kT .

A atualização de $\hat{\theta}_k$ é feita de forma iterativa, utilizando o método do gradiente descendente. Assim, o gradiente de (7.23) em relação à $\hat{\theta}_k$ é dado por:

$$\nabla_{\hat{\theta}_k} J(\hat{\theta}_k) = -2\sigma_s^2 \sin(\theta - \hat{\theta}_k) \quad (7.24)$$

e a atualização de θ é feita por:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \gamma' \nabla_{\hat{\theta}_k} J(\hat{\theta}_k) = \theta_k + \gamma \sin(\theta - \hat{\theta}_k) \quad (7.25)$$

onde $e_k = \sin(\theta - \hat{\theta}_k)$ é o erro de estimação de fase e $\sigma_s^2 = E\{|s_k|^2\}$.

Note que o gradiente (7.24) é nulo para $\hat{\theta}_k = \theta$ e $\hat{\theta}_k = \theta + \pi$. Contudo, só o primeiro ponto ($\hat{\theta}_k = \theta$) corresponde a um ponto de estabilidade de (7.25). O segundo ponto é apenas um ponto de sela e logo, instável.

A figura 7.7 mostra a evolução da esperança do erro e_k em função do desvio de fase $\theta - \hat{\theta}_k$.

Todavia, não dispomos explicitamente da fase θ para cálculo do gradiente e atualização de $\hat{\theta}_k$ e se a tivéssemos, não seria preciso estimá-la! Na prática, usaremos o método do gradiente estocástico para atualizar $\hat{\theta}_k$. Seja nossa função de custo estocástica igual a

$$\tilde{J}(\hat{\theta}_k) = \left\{ |s_k - r_k e^{-j\hat{\theta}_k}|^2 \right\}. \quad (7.26)$$

O gradiente estocástico é dado por:

$$\nabla \tilde{J}(\hat{\theta}_k) = -2\Im\{s_k^* r_k e^{-j\hat{\theta}_k}\} \quad (7.27)$$

e a fórmula de atualização de $\hat{\theta}_k$ é dada por:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \gamma' \nabla_{\hat{\theta}_k} \tilde{J}(\hat{\theta}_k) = \hat{\theta}_k + \gamma \Im\{s_k^* r_k e^{-j\hat{\theta}_k}\} \quad (7.28)$$

onde o erro de estimação da fase no instante kT é:

$$e_k = \Im\{s_k^* r_k e^{-j\hat{\theta}_k}\}. \quad (7.29)$$

Até agora, tínhamos a disposição uma seqüência de treinamento para efetuar a estimação da fase, ou seja, trata-se de uma técnica do tipo DA. Todavia, ao invés de usar os símbolos conhecidos s_k , o que acontece se usarmos decisões \hat{s}_k como referência? Neste caso, a função de custo é escrita como:

$$J(\hat{\theta}_k) = E \left\{ |\hat{s}_k - r_k e^{-j\hat{\theta}_k}|^2 \right\} \quad (7.30)$$

Consideremos a título de ilustração uma modulação 4-QAM e, para facilitar a compreensão, vamos assumir que o ruído é nulo. Vamos definir também que $\phi_k \triangleq \theta - \hat{\theta}_k$. Desta maneira, podemos escrever que o símbolo decidido é dado por:

$$\hat{s}_k = s_k e^{-jx(\phi_k)\pi/2} \quad (7.31)$$

onde $x(\phi_k)$ é um número inteiro tal que:

$$|\theta - x(\phi_k)\pi/2| < \pi/4 \quad (7.32)$$

Por exemplo, se $\phi_k \in (-\pi/4, \pi/4)$, a equação (7.32) gera $x(\phi_k) = 0$, o que a partir de (7.31) corresponde a uma decisão correta. Já para $\phi_k \in (\pi/4, 3\pi/4)$, temos que $x(\phi_k) = 1$ e o que acarreta num erro de decisão, pois de (7.31), $\hat{s}_k = s_k e^{-j\pi/2}$.

Sendo assim, o gradiente de (7.30) em relação à θ_k é igual a

$$\nabla_{\hat{\theta}_k} J(\hat{\theta}_k) = -2\sigma_s^2 \sin(\phi_k - x(\phi_k)\pi/2) \quad (7.33)$$

cujo sinal de erro neste caso é $e_k = \sin(\phi_k - x(\phi_k)\pi/2)$.

A figura 7.7 compara o sinal de erro gerado por (7.24) e (7.33). Note que quando usamos a técnica DA, não existe ambigüidade de fase e quando usamos a técnica DD, aparecem três ambigüidades, provenientes da simetria da própria constelação. No caso de modulações N -QAM, com $N > 4$, existirão pontos de estabilidade espúrios, além das ambigüidades de fase provenientes da simetria da própria modulação.

Na prática, a atualização de $\hat{\theta}_k$, usando o algoritmo do gradiente estocástico e o critério no modo DD é escrita como:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \gamma \Im\{\hat{s}_k^* r_k e^{-j\hat{\theta}_k}\} \quad (7.34)$$

Dá-se o nome de *Costas Loop* às técnicas de recuperação de fase em malha fechada aqui apresentadas e cujo diagrama de bloco está mostrado na figura 7.8.

Quando o *Costas Loop* opera no modo DD, pode ocorrer que o ruído faça com que o algoritmo salte para um ponto de ambigüidade de fase. Dá-se o nome de *phase-slip* a este salto. Note que neste ponto, erros de decisão ocorrerão mesmo que não haja ruído. Esta situação configura um estado de *hang-up* do sistema. A probabilidade de ocorrência de um *phase-slip* está ligada ao valor do passo de adaptação γ . Vários artigos que tratam desse assunto podem ser encontrados na literatura.

As técnicas de correção de desvio de fase em malha fechada permitem também combater desvios de freqüência. Caso usemos apenas integradores de primeira ordem, o erro do desvio de freqüência devem ser pequenos ($\nu T < 0.05$). É preciso enfatizar que havendo desvio de freqüência, tal técnica nunca conseguirá de fato eliminar completamente o erro de fase. Chamamos de erro de desajuste esta diferença constante entre o valor verdadeiro e o valor estimado. Contudo, se usarmos um filtro de segunda ordem, podemos estimar o desvio de freqüência a partir da variação do desvio de fase entre dois instantes de tempo, além do próprio desvio de fase, sem que exista erro de desajuste.

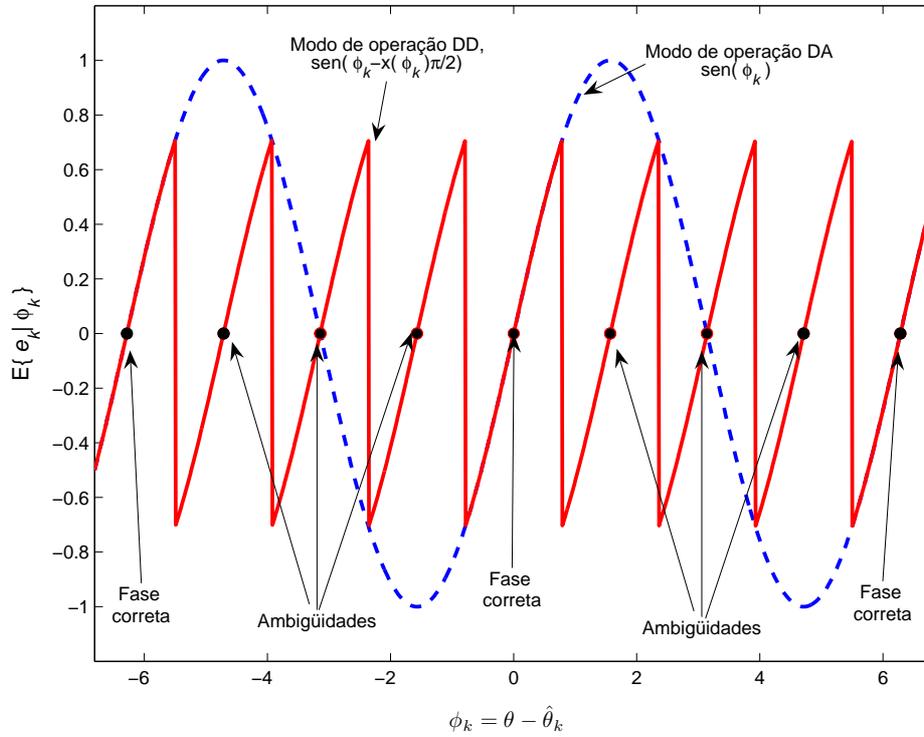


Figura 7.7: Evolução do erro e_k em função do erro de fase $\phi_k = \theta - \hat{\theta}_k$ do Costas Loop para sistema em modo de operação DA e DD.

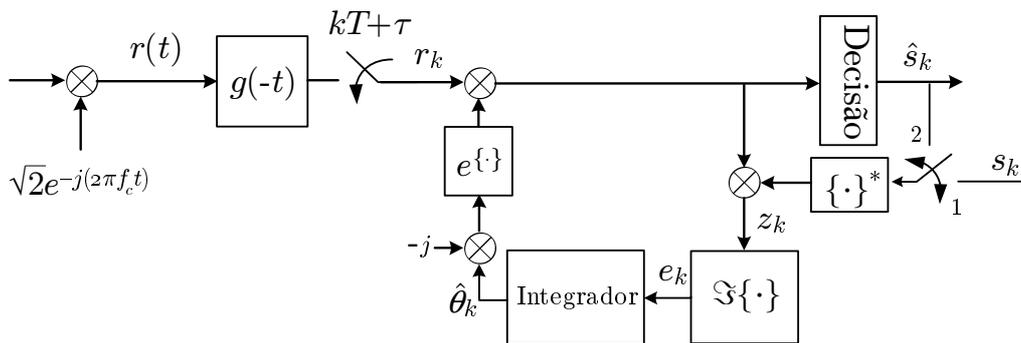


Figura 7.8: Costas Loop: chave na posição 1, modo de operação DA/aquisição; chave na posição 2, modo de operação DD/rastreamento.

7.4 Sincronismo do instante de amostragem

A recuperação do sincronismo temporal pode ser dividida em duas operações: (i) estimação da fase ou do instante τ em que a amostragem do sinal deve ocorrer; (ii) uso da estimativa no processo de amostragem. A primeira operação realiza uma medição temporal enquanto a segunda realiza uma correção temporal no sinal amostrado. Tal correção permite minimizar a interferência intersimbólica do sinal enviado ao decisor, ou seja, amostrar o sinal no momento em que o olho está mais aberto.

Iniciaremos o capítulo falando muito brevemente sobre os métodos de correção do instante de amostragem e depois, passaremos às técnicas de estimação do instante de amostragem.

7.4.1 Correção do instante de amostragem

A amostragem do sinal analógico se dá por meio de um conversor analógico/digital. Tal conversor é governado por um relógio cuja fase raramente pode ser alterada, o que torna impossível a correção do instante de amostragem. Felizmente, a correção pode ser feita através de processamento digital do sinal. Este processamento corresponde à realização de uma interpolação entre as amostras.

Existem várias técnicas de interpolação. Técnicas mais simples apresentam erro de interpolação (a diferença entre o sinal de fato amostrado no instante desejado e o sinal interpolado) maiores. A mais rudimentar é a interpolação linear, que utiliza duas amostras para obter uma interpolação. Em seguida, temos interpoladores parabólicos, que utilizam três amostras, seguidos de interpoladores cúbicos, que usam quatro amostras. É claro, temos o interpolador ideal que utiliza funções sinc para interpolar o sinal, mas que demandaria infinitas amostras.

Para nossa sorte, o erro de interpolação é inversamente proporcional a taxa de amostragem. No caso do interpolador linear, a referência [4] indica que a perda de desempenho em termos de SNR é da ordem de 0.2dB quando amostramos no dobro da taxa de símbolo (superamostragem de duas vezes) e é de 0.02dB quando a taxa de amostragem é de quatro vezes a taxa de símbolos (superamostragem de quatro vezes) para uma modulação 2-PAM, taxa de erro de bit de 10^{-2} e fator de *roll-off* igual a 0,5.

Como na prática a implementação de filtros se faz com superamostragem geral-

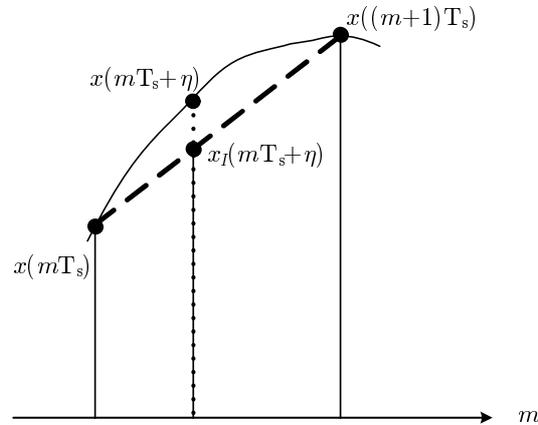


Figura 7.9: Interpolador linear.

mente superior a duas vezes a taxa de símbolo, costuma-se adotar a interpolação linear como solução.

Seja $x(mT_s)$ um sinal amostrado numa taxa $1/T_s$ e $x_I(mT_s)$ o sinal interpolado entre os instantes mT_s e $(m+1)T_s$. O interpolador linear é dado por:

$$x_I(mT_s + \eta) = (1 - \eta)x(mT_s) + \eta x((m+1)T_s) \quad (7.35)$$

onde $0 \leq \eta \leq 1$. Vale ressaltar que $x_I(mT_s + \eta) \neq x(mT_s + \eta)$.

A figura 7.9 mostra o funcionamento do interpolador.

Não cabe aqui explicar como controlar o fator η do interpolador linear nem como controlar as mudanças do índice m . Para tanto, recomenda-se olhar as referências [1],[3] e [4].

7.4.2 Estimação do instante de amostragem

Na seção anterior vimos como é possível corrigir o instante de amostragem. Contudo, antes de corrigir o instante de amostragem, é necessário estimar o desvio do instante de amostragem τ . Veremos a seguir algumas técnicas de estimação.

7.4.3 Técnicas de malha fechada

Como na técnica de sincronismo de fase em malha fechada, usaremos mais uma vez o critério do erro quadrático médio. Tal técnica permite a operação no modo

DA e DD, além de realizar a estimação conjunta do instante de sincronismo como da fase. A função custo é dada por:

$$J(\hat{\theta}_k, \hat{\tau}_k) = \text{E} \left\{ |s_k - r(kT + \hat{\tau}_k)e^{-j\hat{\theta}_k}|^2 \right\} \quad (7.36)$$

A estimação do instante de amostragem é obtida calculando-se o gradiente em relação a $\hat{\tau}_k$:

$$\nabla_{\hat{\tau}_k} J(\hat{\theta}_k, \hat{\tau}_k) = -2\text{E} \left\{ \Re \left\{ \left(s_k - r(kT + \hat{\tau}_k)e^{-j\hat{\theta}_k} \right)^* \frac{dr(kT + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k} e^{-j\hat{\theta}_k} \right\} \right\} \quad (7.37)$$

e depois usando o método do gradiente descendente:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{k+1} &= \hat{\tau}_k - \gamma' \nabla_{\hat{\tau}_k} J(\hat{\theta}_k, \hat{\tau}_k) \\ &= \hat{\tau}_k + \gamma \text{E} \left\{ \Re \left\{ \left(s_k - r(kT + \hat{\tau}_k)e^{-j\hat{\theta}_k} \right)^* \frac{dr(kT + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k} e^{-j\hat{\theta}_k} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (7.38)$$

onde $\frac{dr(kT + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k} = s_k \frac{dg(-t + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k} = s_k g'(-t + \hat{\tau}_k)$, com $\frac{dg(t)}{dt} \triangleq g'(t)$.

Na prática, a implementação é feita usando-se o gradiente estocástico, ou seja, eliminamos a operação de esperança na função custo e obtemos:

$$\tilde{J}(\hat{\theta}_k, \hat{\tau}_k) = |s_k - r(kT + \hat{\tau}_k)e^{-j\hat{\theta}_k}|^2. \quad (7.39)$$

Ainda, a derivada $\frac{dr(kT + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k}$ pode ser aproximada por:

$$\frac{dr(kT + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k} \approx \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + \delta) - r(kT + \hat{\tau}_k - \delta)}{2\delta} \quad (7.40)$$

onde geralmente se escolhe $\delta = T/2$. Neste caso, o sinal recebido deve ser superamostrado com um fator de pelo menos dois, isto é, o período de cada amostra é de $T/2$ ou inferior a este.

Ainda, para não ter que interpolar três amostras por símbolo no cálculo do desvio τ , i.e., $r(kT + \hat{\tau}_k)$, $r(kT + \hat{\tau}_k + T/2)$ e $r(kT + \hat{\tau}_k - T/2)$ e sabendo que $\hat{\tau}_k \approx \hat{\tau}_{k-1}$, usaremos apenas duas amostras, $r(kT + \hat{\tau}_k)$, $r(kT + \hat{\tau}_k + T/2)$. A amostra $r(kT + \hat{\tau}_k - T/2)$ é substituída por $r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)$. Assim, a derivada é dada por:

$$\frac{dr(kT + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k} \approx \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)}{T} \quad (7.41)$$

Então, usando o gradiente estocástico, a fórmula de atualização do valor de $\hat{\tau}_k$ é:

$$\hat{\tau}_{k+1} = \hat{\tau}_k + \gamma \Re \left\{ \left(s_k - r(kT + \hat{\tau}_k)e^{-j\hat{\theta}_k} \right)^* \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)}{T} e^{-j\hat{\theta}_k} \right\} \quad (7.42)$$

Se calcularmos o gradiente estocástico em relação à $\hat{\theta}_k$, obtemos:

$$\nabla_{\hat{\theta}_k} \tilde{J}(\hat{\tau}_k, \hat{\theta}_k) = -2\Im\{s_k^* r(kT + \hat{\tau}_k) e^{-j\hat{\theta}_k}\} \quad (7.43)$$

cuja atualização é dada por:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \gamma \Im\{s_k^* r(kT + \hat{\tau}_k) e^{-j\hat{\theta}_k}\} \quad (7.44)$$

que é idêntico ao *Costas Loop*.

Assim, para cada iteração k , usando (7.42) e (7.44) podemos estimar simultaneamente τ e θ . Se quisermos operar em modo DD, basta usar as decisões do receptor, i.e., \hat{s}_k como referência.

Na literatura, encontramos uma versão modificada desta técnica. Nela, podemos eliminar o elemento $r(kT + \hat{\tau}_k) e^{-j\hat{\theta}_k}$ do termo $(s_k - r(kT + \hat{\tau}_k) e^{-j\hat{\theta}_k})$. Desta forma, o algoritmo passa a ser:

$$\hat{\tau}_{k+1} = \hat{\tau}_k + \gamma \Re \left\{ s_k^* e^{-j\hat{\theta}_k} \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)}{T} \right\} \quad (7.45)$$

que é conhecido sob o nome de *Early-Late Detector* - ELD. O *early* e *late* vêm do fato de que o cálculo da derivada é feito com a amostra $r(kT + \hat{\tau}_k + T/2)$ que está adiantada (*early*) em relação a $r(kT + \hat{\tau}_k)$ e a amostra $r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)$ que está atrasada (*late*). A figura 7.10 mostra o diagrama de blocos da técnica conjunta de estimação de fase e atraso (DA e DD).

Ainda, o ELD tem a vantagem de ser insensível à variação de potência de $r(t)$, pois note que os sinais (parte real e imaginária) de $(s_k - r(kT + \hat{\tau}_k) e^{-j\hat{\theta}_k})$ dependem do ganho do canal. Caso este ganho não seja corretamente compensado no receptor, o estimador de atraso apresentado em (7.42) não funcionará (exercício 7.3, item *d*).

Vale ressaltar que não é obrigatório realizar a estimação conjunta de fase e de atraso. A fase pode ser estimada por uma técnica feedforward que não necessite do instante de amostragem.

A técnica NDA baseia-se na maximização da variância na saída do filtro casado. A função custo deste critério é dada por:

$$J(\hat{\tau}_k) = E \{ |r(kT + \hat{\tau}_k)|^2 \} \quad (7.46)$$

Note que diferentemente de (7.36), a função custo é insensível a desvios de fase. Por exemplo, seja ϕ o erro de fase. Então, $|r(kT + \hat{\tau}_k) e^{j\phi}|^2 = |r(kT + \hat{\tau}_k)|^2 |e^{j\phi}|^2 = |r(kT + \hat{\tau}_k)|^2$.

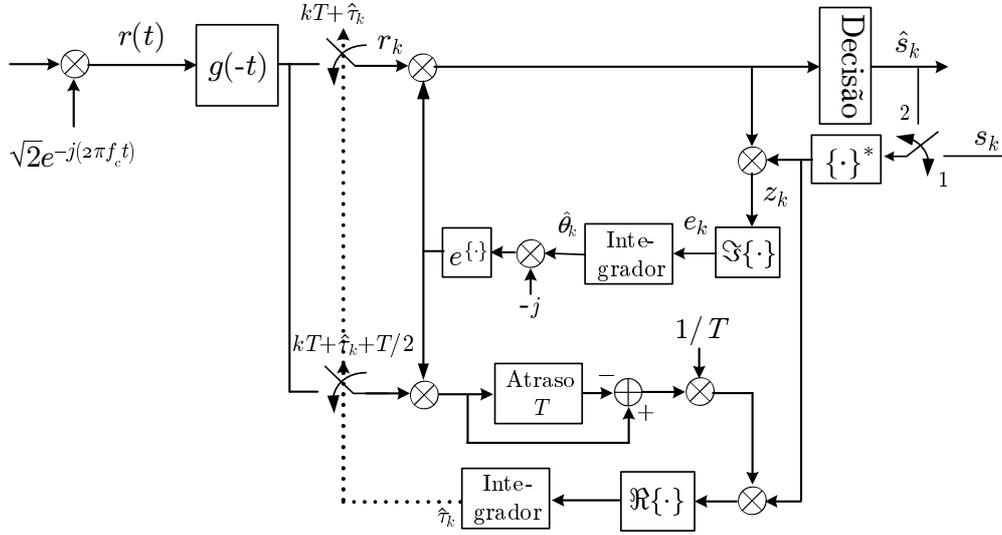


Figura 7.10: Estimação conjunta da fase e do atraso pela técnica ELD: chave na posição (1), modo DA; chave na posição (2), modo DD.

O gradiente de (7.46) em relação a $\hat{\tau}_k$ é:

$$\nabla_{\hat{\tau}_k} J(\hat{\tau}_k) = \text{E} \left\{ \Re \left\{ r(kT + \hat{\tau}_k)^* \frac{dr(kT + \hat{\tau}_k)}{d\hat{\tau}_k} \right\} \right\} \quad (7.47)$$

Então, na prática, usando o método do gradiente estocástico ascendente para maximizar (7.46) e a aproximação (7.41), temos a seguinte fórmula iterativa para encontrar $\hat{\tau}_k$:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{k+1} &= \hat{\tau}_k + \gamma \nabla_{\hat{\tau}_k} J(\hat{\tau}_k) \\ &= \hat{\tau}_k + \gamma \Re \left\{ r(kT + \hat{\tau}_k)^* \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_k - T/2)}{T} \right\} \end{aligned} \quad (7.48)$$

Nos referimos à técnica (7.48) como o ELD-NDA, representada na figura 7.11.

Analisando a derivada utilizada nas técnicas ELD (eq. 7.41), podemos ver que além do ruído contido nas amostras adiantada e atrasada, estas sempre sofrerão de interferência intersimbólica. Desta forma, mesmo que a relação sinal ruído tenda para infinito, a variância do estimador da técnica ELD nunca será igual a zero.

Ainda, o desempenho das técnicas ELD depende do valor do *roll-off* dos filtros formatadores. Quanto maior o valor do *roll-off*, menor é a variância do estimador. Este comportamento pode ser intuitivamente explicado pelo fato de que com o aumento do *roll-off*, a resposta impulsiva dos filtros formatadores encurta e assim, a in-

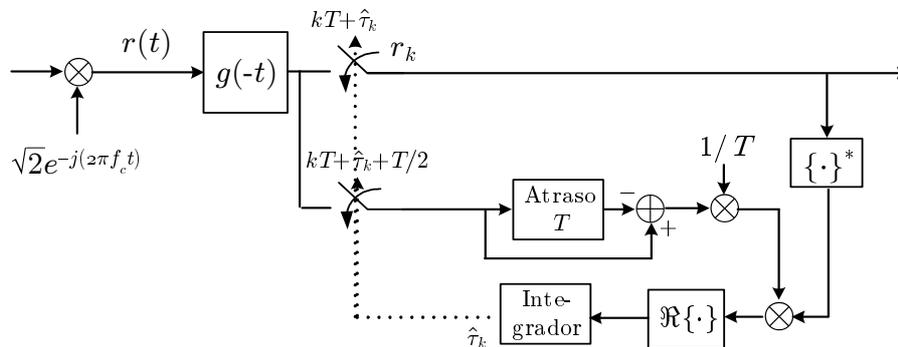


Figura 7.11: Estimação do atraso pela técnica ELD-NDA.

terferência intersimbólica presente nas amostras adiantada e atrasada da “derivada” do ELD diminui.

Assim como o *Costas Loop* no modo DD, as técnicas de sincronismo de atraso em malha fechada aqui apresentadas, incluindo a técnica DA, também sofrem do fenômeno de *hang-up*. Tal fenômeno ocorre porque existem pontos de estabilidade dos algoritmos espaçados de T segundos no modo DD e NDA e pontos espúrios de equilíbrio no modo DA. Assim, se um ruído faz com que o algoritmo salte um símbolo acrescentando ou decrementando um valor superior ou igual a T de $\hat{\tau}$, o sistema estará “comendo” ou “clonando” um ou mais símbolos respectivamente. Isto terá efeito nefastos, pois os bits não estarão mais nas posições corretas na recepção e todos os dados serão interpretados de forma errônea. Portanto, será necessário averiguar de tempos em tempos a posição da seqüência de aprendizagem para corrigir a ocorrência de um salto.

Além disso, o tempo de aquisição de um sistema em malha fechada costuma ser elevado, o que não é interessante para sistemas com transmissão em rajadas (*bursts*). Neste caso, opta-se por utilizar técnicas de malha aberta que permitem uma aquisição mais rápida. A seguir veremos uma técnica deste tipo.

7.4.4 Técnicas de malha aberta

Existem dois métodos de estimação do instante de amostragem em malha aberta. Um deles usa o critério de máxima verossimilhança e o outro, o método de Oerder & Meyr (O&M), versão NDA. Este se baseia em argumentos heurístico. Ambas técnicas necessitam de amostragem fracionária, como as técnicas de malha fechada

mostradas na seção anterior. Além disso, o método ML também necessita de uma filtragem especial. Aqui, nos restringiremos somente à técnica proposta por O&M por ela ser mais prática que a ML.

A técnica O&M necessita de uma taxa de superamostragem R_s que seja de, pelo menos, quatro vezes superior à taxa de símbolo. O algoritmo é descrito da seguinte forma. Primeiramente, obtemos o módulo ao quadrado do sinal amostrado $r(kT/R_s)$. Em seguida ele é multiplicado por $e^{-j2\pi k/R_s}$ e o sinal resultante é acumulado. Finalmente, após $R_s L_0$ acumulações, o atraso estimado é obtido multiplicando o argumento da acumulação por $-T/(2\pi)$. Formalmente, temos:

$$\hat{\tau} = -\frac{T}{2\pi} \arg \left\{ \sum_{k=0}^{R_s L_0 - 1} |r(kT/R_s)|^2 e^{-j2\pi k/R_s} \right\} \quad (7.49)$$

onde L_0 é o tamanho da janela de acumulação em número de símbolos.

7.5 Exercícios

EXERCÍCIO 7.1:

A técnica de modulação diferencial consiste em codificar os bits através da diferença de fase entre dois símbolos consecutivos. Para o caso de um único bit codificado (b_k), esta modulação chama-se DBPSK (*Differential Binary Phase Shift Keying*) e funciona da seguinte maneira:

i) Modulação:

Os símbolos transmitidos são da forma $s_k = e^{j\psi_k}$

O valor de ψ_k é definido da seguinte forma:

Se $b_k = 1$, $\psi_k = \psi_{k-1}$,

Caso contrário, i.e., $b_k = 0$, $\psi_k = \psi_{k-1} + \pi$

ii) Demodulação:

Se $|\arg\{r_k r_{k-1}^*\}| < \pi/2 \Rightarrow \hat{b}_k = 1$,

Caso contrário, $\hat{b}_k = 0$

Considerando a modulação diferencial descrita acima, julgue verdadeiro ou falso as seguintes afirmações abaixo, justificando as suas respostas:

a) A modulação DBPSK é sensível a um desvio de fase;

- b) A modulação DBPSK é sensível a um desvio de frequência da portadora, mesmo que este seja muito inferior à cadência de símbolo;
- c) A modulação DBPSK é insensível a erros no instante de amostragem.

EXERCÍCIO 7.2:

Estimação de fase pelo *Costas Loop*:

Usando um modelo em banda base com canal AWGN e amostragem na taxa de símbolo, pede-se o seguinte:

- a) Implemente o *Costas Loop* no modo DD (eq. (7.34)) para modulações 4-QAM e 16-QAM.
- b) Para diferentes inicializações ($\hat{\theta}_0$) entre $-\pi$ e π , trace a evolução de $\hat{\theta}_k$ para as modulações 4-QAM e 16-QAM e verifique se os resultados estão de acordo com o que está descrito na apostila. Dica: escolha um vetor de inicializações do tipo `fases_iniciais=[-pi:pi/32:pi]` e use todos os elementos deste vetor como valores iniciais.
- c) Suponha agora a presença de um desvio de frequência νT e que $\theta = 0$. Ou seja, formalmente, $r_k = s_k e^{j2\pi k \nu T}$. Para um valor de $\nu T = 0.001$, analise o funcionamento do *Costas Loop* traçando a evolução de $\hat{\theta}_k$ e comparando com $2\pi k \nu T$ para diferentes valores do passo de adaptação γ . Só utilize a modulação 4-QAM neste caso.
- d) Faça como no item anterior, mas considere agora $\nu T = 0.0001$. Compare com o resultado do item anterior. Só utilize a modulação 4-QAM neste caso.
- e) Agora, suponha $\nu T = 0.001$, $\theta = 0$ e uma relação sinal-ruído de 10dB. Calcule o erro quadrático médio (eq. (7.30)) para diferentes valores de γ e discuta os resultados. No cálculo do erro quadrático médio, aproxime a esperança pela média temporal, i.e., $E \left\{ \left| \hat{s}_k - r_k e^{j\hat{\theta}_k} \right|^2 \right\} \cong \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left| \hat{s}_k - r_k e^{j\hat{\theta}_k} \right|^2$. Só utilize a modulação 4-QAM neste caso.

EXERCÍCIO 7.3:

Curva $E\{e_k|\tau\}$ do ELD:

Para este exercício, consideraremos uma modulação 4-QAM, $\theta = 0$ e um fator de roll-off $\alpha = 0.35$. Considere ainda os seguintes valores de e_k :

$$\text{ELD-DA: } e_k = \Re \left\{ s(kT) * \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)}{T} \right\}$$

$$\text{ELD-DD: } e_k = \Re \left\{ \hat{s}(kT) * \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)}{T} \right\}$$

$$\text{ELD-NDA: } e_k = \Re \left\{ r(kT) * \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)}{T} \right\}$$

Pede-se:

- Fixe $\hat{\tau} = 0$. Obtenha $E\{e_k|\tau\}$ dos ELD-DA, ELD-DD e ELD-NDA. Varie τ entre $-4T$ e $4T$. Compare e comente as curvas.
- Agora, considere que se transmite sempre o mesmo símbolo (ex.: $s_k = 1 + j$). O que acontece com as curvas $E\{e_k|\tau\}$ dos estimadores ELD? Por quê?
- Repita o primeiro item, mas desta vez considere que o sinal passa pelo canal $h_1(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t-T)$, $h_2(t) = \delta(t) - 0.5\delta(t-T)$ e $h_3(t) = \delta(t) - 0.5\delta(t-T/2)$. O que acontece com as curvas $E\{e_k|\tau\}$ de cada estimador ELD (DA, DD e NDA)? Por quê?
- Suponha agora um canal $h(t) = \alpha\delta(t)$. Trace a curva $E\{e_k|\tau\}$ da técnica (7.42), i.e., $e_k = \Re \left\{ (s_k - r(kT + \hat{\tau}_k)) * \frac{r(kT + \hat{\tau}_k + T/2) - r(kT + \hat{\tau}_{k-1} - T/2)}{T} \right\}$, para os $\alpha = 0.0625, 1$ e 8 . Comente os resultados.

Como fazer este exercício sem usar um interpolador: use uma superamostragem de 16 vezes a taxa de símbolo ($R_s=16$). A variação de τ se dará então em passos de $T/16$. Aproxime a função esperança pela média de $e_k|\tau$

7.6 Bibliografia

- [1] U. Mengali e A. N. D'Andrea, *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, 1a. edição, Nova Iorque e Londres: Plenum Press, 1997
- [2] C. R. Johnson Jr. e W. A. Sethares, *Telecommunication Breakdown*, <http://eceserv0.ece.wisc.edu/~sethares/telebreak.html>

- [3] F. M. Gardner, “Interpolation in Digital Modems - Part I: Fundamentals”, IEEE Transactions on Communications, vol. 41, no. 3, março, 1993
- [4] L. Erup, F. M. Gardner e R. A. Harris, “Interpolation in Digital Modems - Part II: Implementation and Performance”, IEEE Transactions on Communications, vol. 41, no. 6, junho, 1993

APÊNDICE A

Revisão de Processos Estocásticos

Faremos neste apêndice uma revisão, tão breve quanto possível, de conceitos de probabilidade, variáveis aleatórias e de processos estocásticos. É importante chamar a atenção para o fato de que este apêndice não pretende ser um texto para o aprendizado de processos estocásticos, mas apenas uma revisão dos conceitos pertinentes ao estudo de transmissão digital.

A necessidade do conhecimento de estatística para o estudo de transmissão digital deve-se ao fato de que a maioria (se não todas) as grandezas pertinentes ao problema são aleatórias, ou seja, seu valor não é exatamente conhecido *a priori*. Por exemplo:

- Os bits transmitidos. De fato, se eles não fossem aleatórios, a informação que eles contém poderia ser determinada exatamente no receptor sem a necessidade de transmissão. Na realidade, o conceito de informação definido por Shannon está intimamente ligado à previsibilidade de um fenômeno. Quanto mais imprevisível, mais informação ele contém.
- O ruído de recepção. Este ruído é causado por uma série de fatores cuja modelagem, ainda que fosse possível, seria inviável. Nesse caso, tratamos o ruído como um fenômeno aleatório.
- As características de um canal de transmissão sem fio. Devido à mobilidade dos usuários em sistemas como telefonia celular, o canal de comunicações está

em constante mudança, e também não pode ser previsto com exatidão. Temos, assim, mais um exemplo de um fenômeno aleatório.

O conceito intuitivo que temos de probabilidade é adequado para lidar com alguns fenômenos aleatórios simples, como a escolha de uma carta de baralho ou o lançar de um dado ou de uma moeda. Por exemplo, sabemos que a probabilidade de tirar cara ao lançarmos uma moeda é igual a 0.5. Esses experimentos são chamados discretos, ou seja, existe um número contável de resultados possíveis. Entretanto, alguns fenômenos, como ruído de recepção ou a altura de uma pessoa, podem assumir qualquer valor real. Aqui, nosso conceito intuitivo começa a falhar um pouco. Afinal de contas, a probabilidade de uma pessoa medir 1.70m é igual a zero. Ainda que essa informação possa parecer surpreendente, considere também a probabilidade de que uma pessoa meça $1.70 + 10^{-300}$ m. Em outras palavras, ninguém mede *exatamente* 1.70m. E mesmo em fenômenos mais corriqueiros nossa intuição pode levar a algumas ambigüidades, conforme discutido no capítulo 1 de [?].

De fato, durante muito tempo, o uso de conceitos intuitivos fez do estudo de probabilidade tanto uma arte quanto uma ciência exata. Para que fosse possível estabelecer uma teoria geral de probabilidade, foi necessário estabelecer um ferramental matemático adequado para trabalhar com fenômenos aleatórios. Começaremos essa revisão com uma discussão sobre esse ferramental.

Na segunda parte da revisão, discutiremos alguns fenômenos aleatórios que ocorrem ao longo de um intervalo de tempo, como por exemplo o ruído de recepção. Discutiremos algumas grandezas estatísticas que caracterizam alguns aspectos desses fenômenos e, principalmente, discutiremos o comportamento dessas grandezas quando os sinais em questão passam por filtros lineares.

Antes de começarmos com a revisão propriamente dita, devemos definir o conceito de um *evento*. Basicamente, um evento é um conjunto de possíveis resultados de um fenômeno aleatório, ou experimento. Assim, ao lançarmos um dado, podemos apostar que o resultado será par. Ou seja, o evento de interesse é dado pelo conjunto $A = \{2, 4, 6\}$. Podemos também apostar que o resultado será 3, e nesse caso o evento de interesse consistirá de apenas um resultado. Mais especificamente, ele será dado por $A = \{3\}$. Dizemos que um evento ocorreu A se o resultado do nosso experimento for um elemento do evento. Assim, se A é o evento com todos os resultados pares, e B é o evento com todos os resultados maiores ou iguais a 5, e se o resultado do experimento for 6, dizemos que tanto A quanto B ocorreram.

O *espaço amostral* Ω é o evento que contém todos os possíveis resultados do experimento. Assim, Ω sempre ocorre, sendo por isso chamado também de evento certo.

A.1 Probabilidade de Eventos, Independência

Nesta seção, definiremos, ainda de forma relativamente intuitiva, alguns conceitos importantes ligados ao estudo de fenômenos aleatórios. Estes conceitos são obtidos quando se considera um evento A , ou dois eventos A e B ao mesmo tempo.

Em primeiro lugar, temos que a probabilidade de um evento é a probabilidade de ocorrência de qualquer um de seus resultados. Por exemplo, no lançamento de um dado, se A for o evento de que o resultado é par, então $P[A] = 1/2$. Assim, a probabilidade pode ser pensada como uma função que associa a cada evento um número entre 0 e 1.

Podemos, também, pensar na probabilidade de que dois eventos ocorram ao mesmo tempo, a chamada *probabilidade conjunta*, denotada por $P[A, B]$. Se A e B ocorrem ao mesmo tempo, então o resultado do experimento está tanto em A quanto em B . Em outras palavras, o resultado está em um novo evento dado por $A \cap B$. Assim, temos que $P[A, B] = P[A \cap B]$. Voltando ao exemplo do dado, seja A o evento de que o resultado é par, B o evento de que o resultado é ímpar e C o evento de que o resultado é maior ou igual a 5, então $P[A, B] = 0$ e $P[A, C] = P[B, C] = 1/6$.

Mais importante, e normalmente mais difícil de entender, é o conceito de *probabilidade condicional*. Ainda com o exemplo do dado, digamos que você aposta que o resultado será par. Eu lanço o dado e vejo o resultado, mas não conto para você qual número saiu. Eu apenas digo que o resultado é maior do que 3, e pergunto se você quer mudar a sua aposta. Ora, se o resultado é maior que 3, ele pode ser 4, 5 ou 6. Nesse caso, temos dois resultados favoráveis (4 e 6) em um total de três resultados possíveis. Como originalmente a probabilidade de acerto da aposta era $1/2$ e agora é $2/3$, seria razoável aumentar o valor apostado.

A probabilidade condicional é então definida como a probabilidade de um evento A dado que B ocorreu, e é denotada $P[A|B]$. Ora, se B ocorreu, então para que A ocorra é necessário que $A \cap B$ ocorra. Por outro lado, o fato de B ter ocorrido restringe o número de possíveis resultados para o experimento. Levando esses dois

fatos em conta, definimos

$$P[A|B] = \frac{P[A, B]}{P[B]}. \quad (\text{A.1})$$

Obviamente, esta fórmula só faz sentido se $P[B] \neq 0$.

Nesse ponto, é interessante definir eventos *disjuntos* ou *mutuamente excludentes*, que são aqueles tais que $A \cap B = \emptyset$ (o conjunto vazio). Seguindo nossa intuição, definimos que $P[\emptyset] = 0$. Assim, se dois eventos são disjuntos, $P[A|B] = 0$. Essa observação também satisfaz nossa intuição. De fato, se A e B não podem ocorrer ao mesmo tempo, então a probabilidade de ocorrer A dado que B ocorreu deve mesmo ser nula.

Finalmente, dizemos que dois eventos são *independentes* se um não traz informação sobre o outro, ou seja, se $P[A|B] = P[A]$. Note que isso é equivalente a dizer que A e B são independentes se $P[A, B] = P[A]P[B]$. Independência entre dois eventos é, em geral, fácil de estabelecer. Por exemplo, a sua nota nesse curso e o valor da bolsa de Hong Kong são, imagina-se, independentes. Entretanto, esse nem sempre é o caso. Voltando ao exemplo do dado, seja $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Então, $P[A] = 1/2$, $P[B] = 2/3$ e $P[A, B] = 1/3$. Portanto, $P[A, B] \neq P[A]P[B]$. Em outras palavras, A e B são independentes apesar de ser impossível determinar isso sem uma análise mais cuidadosa.

A.2 Definição Axiomática de Probabilidade

Conforme mencionamos, devemos ser capazes de estabelecer uma probabilidade para cada evento. Ou seja, a probabilidade deve ser, num sentido genérico, uma função que associa, a cada evento, um valor entre 0 e 1. Mais ainda, gostaríamos que a probabilidade do evento certo fosse 1. Nessa seção, veremos que outras propriedades nós desejamos que uma probabilidade satisfaça, o que nos levará a uma definição axiomática de probabilidade.

Precisamos, por exemplo, determinar qual deve ser a probabilidade de eventos obtidos a partir de outros eventos. Entre outros, como deve $P[A \cup B]$ se relacionar com $P[A]$ e $P[B]$? Voltando ao exemplo dos dados, é fácil ver que, sempre que A e B são disjuntos (ou seja, $A \cap B = \emptyset$) então $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$. Podemos, assim, exigir que qualquer definição de probabilidade tem que possuir essa propriedade. O que não é fácil de ver, mas é verdade, é que apenas esse requerimento é suficiente para que possamos estabelecer a probabilidade de qualquer operação entre eventos.

Temos assim, três elementos na definição axiomática de probabilidade. Em primeiro lugar, temos o espaço amostral Ω , que contém todos os possíveis resultados do meu experimento. Temos também os eventos A , que são conjuntos de resultados e, portanto, são subconjuntos de Ω . Finalmente, para cada evento A , temos uma probabilidade $P(A)$ que deve satisfazer:

1. $P[A] \geq 0$.
2. $P[\Omega] = 1$.
3. Se A e B são disjuntos, então $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

A partir dessas propriedades, podemos estabelecer os seguintes resultados (tentar prová-los pode ser um exercício interessante):

1. $P[\emptyset] = 0$.
2. $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.
3. Se $A \subset B$, então $P[A] < P[B]$.
4. $P[A^c] = 1 - P[A]$, onde A^c é o complemento de A .

Vamos fazer agora um pequeno desvio matemático para tentar motivar a definição de probabilidade acima. Existe um ramo da matemática chamado teoria da medida, que estuda medidas de conjuntos, e como se podem obter integrais a partir dessas medidas. Esse é um ramo bem estabelecido da matemática que gerou, entre outros resultados, a integral de Lebesgue. De particular interesse para nós é o fato de que a probabilidade também pode ser vista como uma medida de um conjunto. Assim, os vários e importantes resultados teóricos obtidos em teoria da medida podem ser diretamente aplicados a probabilidade. É justamente para estabelecer essa ponte entre probabilidade e teoria da medida que se faz a definição axiomática de probabilidade acima.

É importante ressaltar que essa referência à teoria da medida, bem como referências futuras a essa teoria, servem apenas para tentar justificar porque algumas definições são da forma que elas são. Obviamente, não esperamos que os alunos saibam teoria da medida, muito menos que eles aprendam essa teoria nessa revisão. Em outras palavras, mencionamos teoria da medida apenas por acreditar que um conceito com uma motivação (ainda que extremamente vaga) é melhor que um conceito sem motivação.

A.2.1 Teorema da Probabilidade Total

Usaremos agora a definição de probabilidade para provar dois resultados importantes. Assim, seja $\{B_i\}_{i=1}^N$ uma *partição* de Ω . Por uma partição queremos dizer que os conjuntos B_i são disjuntos, ou seja, $B_i \cap B_j = \emptyset$, e que sua união dá Ω , ou seja, $\bigcup_{i=1}^N B_i = \Omega$.

Uma partição possui duas propriedades importantes. A primeira é relativamente óbvia:

$$\begin{aligned} 1 &= P[\Omega] \\ &= P\left[\bigcup_{i=1}^N B_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^N P[B_i]. \end{aligned} \tag{A.2}$$

A “obviedade” dessa propriedade pode ser vista no seguinte exemplo. O conjunto $B_1 = \{\text{cara}\}$ e $B_2 = \{\text{coroa}\}$ formam claramente uma partição do espaço amostral correspondente a um lançamento de uma moeda. Assim, (A.2) simplesmente nos diz que $P[\{\text{cara}\}] + P[\{\text{coroa}\}] = 1$, como esperado.

O outro resultado não é tão óbvio, mas é bastante importante. Seja A um evento qualquer, e seja $\{B_i\}_{i=1}^N$ a partição acima. Assim, como $A = A \cap \Omega$, temos que

$$\begin{aligned} P[A] &= P[A \cap \Omega] \\ &= P\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\right] \\ &= P\left[\bigcup_{i=1}^N (A \cap B_i)\right]. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Ora, como os eventos B_i são disjuntos, os eventos $A \cap B_i$ também o são. Assim,

$$P[A] = \sum_{i=1}^N P[A \cap B_i]. \tag{A.4}$$

Entretanto, usando a definição de probabilidade condicional em (A.1), chegamos finalmente a

$$P[A] = \sum_{i=1}^N P[A|B_i] P[B_i], \tag{A.5}$$

conhecido como o *teorema da probabilidade total*. A importância de (A.5) reside no fato de que, muitas vezes, a determinação de $P[A]$ pode ser difícil, ao passo

que o cálculo de $P[A|B_i]$ e de $P[B_i]$ pode ser fácil. Um exemplo dessa situação é a transmissão de um sinal binário. A determinação direta das estatísticas do sinal recebido não é fácil, mas isso muda se condicionarmos essas estatísticas no fato de que o bit transmitido foi 0 ou 1.

A.3 Variáveis Aleatórias

Conforme vimos, nossa idéia intuitiva de probabilidade não funciona muito bem quando os possíveis valores do nosso experimento são contínuos. Mais ainda, nossa intuição funciona para eventos cujo resultado não são necessariamente números. Assim, a manipulação dos resultados dos experimentos não é fácil. Por exemplo, qual o valor médio de um lançamento de uma moeda?

Entretanto, na maioria dos casos, nós estamos interessados, na realidade, em um número ligado ao experimento. De fato, em problemas de cartas ou dados, podemos pensar que apostamos em algum evento, e portanto a grandeza de interesse é quanto dinheiro nós ganharemos ou perderemos para cada possível resultado do experimento. Considere, por exemplo, um jogo de dados em que apostamos 2.00 reais que o resultado será par. Se ganharmos, sairemos da mesa com 4.00 reais. Se perdemos, sairemos da mesa com -2.00 reais. Temos, então, que a quantia aleatória que de fato nos interessa assume um valor 4.00 se o resultado do experimento for 2, 4 ou 6, e assume um valor -2.00 caso contrário.

Note que podemos estender essa idéia para qualquer experimento. Ou seja, qualquer que seja meu fenômeno aleatório, eu posso associar um *número* a todos os resultados possíveis. A principal vantagem disso é que, a partir de agora, trabalharemos sempre com grandezas aleatórias do mesmo tipo: números. Com isso, podemos começar a pensar em uma teoria que seja mais geral, nos concentrando em números aleatórios e nos desligando das particularidades de cada experimento.

Esta regra (ou função) que associa um número real a cada possível resultado do experimento é chamada de *variável aleatória*. Genericamente falando, uma variável aleatória é uma função de Ω (o conjunto de todos os resultados possíveis) em \mathbb{R} que, para cada resultado ξ associa um número real $X(\xi)$, conforme mostrado na figura A.1.

Note que uma variável aleatória não é uma variável, mas sim uma função. Além disso, ela não é aleatória. No exemplo da aposta dado acima, a função está muito

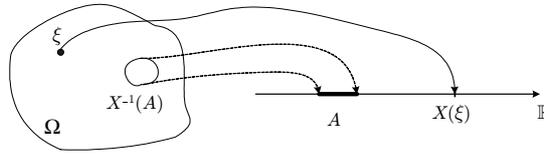


Figura A.1: Representação gráfica da ação de uma variável aleatória.

bem definida: para cada resultado do experimento, temos um valor real fixo. O que é aleatório é apenas o valor que a variável assume. Entretanto, como um experimento, junto com uma variável aleatória associada, gera um número real aleatório, o nome variável aleatória é consagrado. Inclusive, é normal falar apenas em X , ignorando o valor de ξ que gerou esse número aleatório, e nós adotaremos essa notação daqui para frente.

Na próxima seção, veremos como caracterizar as propriedades estatísticas de uma variável aleatória.

A.4 Função Distribuição de Probabilidade

Voltemos ao nosso jogo de dados, em que apostamos 2.00 reais que o resultado será par. Seja ξ o resultado do nosso experimento, ou seja, o número mostrado pelo dado. Seja X a nossa variável aleatória. Temos, então, que $X(\xi) = 4.00$ se $\xi \in \{2, 4, 6\}$ e $X(\xi) = -2.00$ se $\xi \in \{1, 3, 5\}$. Podemos nos perguntar, então, qual a probabilidade de $X(\xi) = 4.00$. Ora, essa é a probabilidade de que ξ assuma um valor tal que $X(\xi) = 4.00$. Em outras palavras, ξ deve pertencer a $\{2, 4, 6\}$. Assim, $P[X(\xi) = 4.00] = P[\xi \in \{2, 4, 6\}] = 1/2$.

O importante a notar aqui é que o conjunto $\{2, 4, 6\}$ é a imagem inversa do conjunto $\{4.00\}$. Matematicamente, $\{2, 4, 6\} = X^{-1}(\{4.00\})$. O que essa notação quer dizer é que o conjunto do lado esquerdo, $\{2, 4, 6\}$, é o conjunto de *todos* os valores de ξ tal que $X(\xi)$ pertence ao conjunto do lado direito, $\{4.00\}$. Note também que a imagem inversa existe mesmo quando a função $X(\xi)$ não é inversível.

Podemos, mais uma vez, generalizar essa idéia. Assim, seja A um conjunto de valores que a variável aleatória pode assumir. Ou seja, A é um subconjunto de \mathbb{R} . Definimos, então

$$P[X(\xi) \in A] = P[\xi \in X^{-1}(A)]. \quad (\text{A.6})$$

Este mapeamento inverso está mostrado na figura A.1.

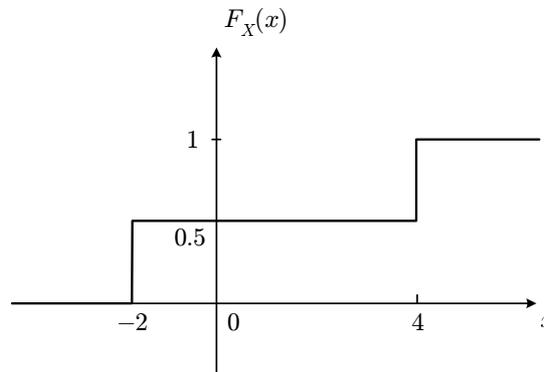


Figura A.2: Função distribuição de probabilidade para o saldo final de uma aposta de 2.00 reais que o lançamento de um dado resulta em um número par.

Aqui, também, nós gostaríamos de nos desligar da estrutura de Ω , e estabelecer uma teoria genérica focando apenas a variável aleatória. Ou seja, gostaríamos de determinar a probabilidade do número real pertencer a A sem para isso ter que pensar nos valores de ξ . O restante dessa seção tenta ir um pouco nessa direção.

Em primeiro lugar, vamos pensar no evento A . Lembre-se que A é um subconjunto dos reais. A teoria da medida nos diz que todos os eventos de interesse, para os quais uma probabilidade pode ser definida, podem ser obtidos como uniões e intersecções de eventos do tipo $\{X \leq x\}$ ¹. Em outras palavras, esse evento básico consiste em todos os valores da variável aleatória menores ou iguais a x . Com isso em mente, definimos a *função distribuição de probabilidade* de uma variável aleatória X como

$$F_X(x) = P[X(\xi) \leq x] = P[\xi \in X^{-1}((-\infty, x])]. \quad (\text{A.7})$$

A função distribuição de probabilidade para o exemplo da aposta de 2.00 reais no jogo de dados está mostrada na figura A.2.

Assim, se conhecermos $F_X(x)$, não precisamos mais nos preocupar com Ω , já que a probabilidade de qualquer evento de X pode ser diretamente calculada a partir de

¹Como curiosidade, a teoria da medida também nos diz que existem conjuntos para os quais não é possível definir uma medida que faça sentido. Na realidade, é possível mostrar que uma maçã pode ser cortada em conjuntos disjuntos que, adequadamente reagrupados, resultam em um objeto do tamanho da Terra. Obviamente, nossa noção de volume não é válida para esses conjuntos. Desnecessário dizer que esses conjuntos são muito estranhos, e não vamos nos preocupar com eles. Fenômeno parecido ocorre com a probabilidade que, assim como o volume, é uma medida de conjuntos.

$F_X(x)$. Conforme veremos, várias variáveis aleatórias encontradas na prática possuem uma função distribuição de probabilidade conhecida, e discutiremos algumas delas adiante.

A.4.1 Propriedades da Distribuição

Cabe, aqui, discutir algumas propriedades de $F_X(x)$. Em primeiro lugar, X assume um valor real, finito. Assim, a probabilidade de que X seja menor do que infinito é 1. Isso pode ser expresso matematicamente por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1. \quad (\text{A.8})$$

De forma equivalente, temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Ainda nessa linha, podemos notar que o evento $\{X \leq x\} \cup \{X > x\} = \{X \in \mathbb{R}\}$. Mais ainda, esses dois eventos são disjuntos, de forma que $P[\{X \leq x\} \cup \{X > x\}] = P[X \leq x] + P[X > x]$. Como X é sempre um número real, temos que $P[\{X \in \mathbb{R}\}] = 1$. Juntando todos esses fatos, concluímos que $P[X \leq x] + P[X > x] = 1$, ou seja,

$$P[X > x] = 1 - F_X(x). \quad (\text{A.10})$$

Temos também que $\{X \leq x\}$ pode ser escrito como $\{X \leq y\} \cup \{y < X \leq x\}$, se $y < x$. Note que esses dois últimos eventos são disjuntos. Assim, usando as propriedades da probabilidade, temos que

$$P[X \leq x] = P[X \leq y] + P[y < X \leq x]. \quad (\text{A.11})$$

Obviamente, $P[y < X \leq x] \geq 0$, o que implica que $F_X(x)$ é uma função não-decrescente de x . Ou seja, se $x > y$, então $F_X(x) \geq F_X(y)$.

Finalmente, usando a definição de $F_X(x)$ em (A.11), temos que

$$P[y < X \leq x] = F_X(x) - F_X(y). \quad (\text{A.12})$$

Assim, essa equação nos ensina como calcular a probabilidade do evento $\{y < X \leq x\}$ em função de $F_X(x)$. Seguindo um raciocínio semelhante, podemos determinar a probabilidade de vários eventos (subconjuntos dos reais) em termos de $F_X(x)$. De fato, de posse de $F_X(x)$, podemos calcular a probabilidade de qualquer evento. Em outras palavras, $F_X(x)$ nos dá todas as informações necessárias sobre as características estatísticas da variável aleatória X .

A.4.2 Distribuição Conjunta

Podemos também definir a função distribuição de probabilidade quando consideramos mais de uma variável aleatória. Por exemplo, para duas variáveis aleatórias X e Y , definimos a distribuição conjunta $F_{XY}(x, y)$ como a probabilidade conjunta dos eventos $\{X \leq x\}$ e $\{Y \leq y\}$, ou seja,

$$F_{XY}(x, y) = P[\{X \leq x\}, \{Y \leq y\}]. \quad (\text{A.13})$$

Da mesma forma que para uma única variável, a probabilidade de qualquer evento de interesse envolvendo X e Y pode ser obtida a partir de $F_{XY}(x, y)$.

Aqui, é interessante notar que $\{X \leq x\} \cap \{Y < \infty\} = \{X \leq x\}$. Afinal de contas, a condição $\{Y < \infty\}$ significa que Y pode assumir qualquer valor, e essa “condição” também é imposta pelo lado esquerdo da equação. Assim, temos que

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty). \quad (\text{A.14})$$

Da mesma forma, obtemos que

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y). \quad (\text{A.15})$$

A.5 Função Densidade de Probabilidade

Uma outra função que também caracteriza completamente uma variável aleatória é a *função densidade de probabilidade*, dada por

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x). \quad (\text{A.16})$$

Como veremos, podemos usar $f_X(x)$ para calcular, por exemplo, o valor médio de X , daí sua importância. Outra razão para a definição da densidade é que muitas variáveis aleatórias importantes, como a Gaussiana, possuem uma fórmula fechada para $f_X(x)$, mas não para $F_X(x)$.

A partir das propriedades de $F_X(x)$, podemos estabelecer algumas propriedades de $f_X(x)$. Em primeiro lugar, de (A.9) e da própria definição de $f_X(x)$, temos que

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy. \quad (\text{A.17})$$

Baseado nessa equação, e usando (A.8), concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (\text{A.18})$$

Como $F_X(x)$ é uma função não-decrescente, temos que

$$f_X(x) \geq 0. \quad (\text{A.19})$$

Finalmente, de (A.12), temos que

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx. \quad (\text{A.20})$$

Ou seja, a área sob o gráfico de $f_X(x)$ entre a e b dá a probabilidade de que X esteja entre a e b .

Na realidade, de (A.20), podemos cometer um abuso de notação e escrever que

$$P[x < X \leq x + dx] = f_X(x) dx, \quad (\text{A.21})$$

onde dx é um deslocamento infinitesimal. Afinal, $f_X(x)$ é praticamente constante entre x e $x + dx$, de forma que a área em questão se trata de um retângulo de altura $f_X(x)$ e lado dx . A equação (A.21) é muitas vezes conveniente para determinarmos algumas definições e resultados ligados a variáveis aleatórias contínuas.

Para o caso de duas variáveis, definimos

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y). \quad (\text{A.22})$$

Aqui, chamamos a atenção para o fato de que (A.14) implica que

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy. \quad (\text{A.23})$$

O processo de obter a densidade de uma variável a partir da densidade conjunta é conhecido como *marginalização*.

Baseado no conceito de independência, dizemos que duas variáveis aleatórias são independentes se quaisquer eventos associados a elas são independentes. Isso é equivalente a dizer que duas variáveis aleatórias são independentes se

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y). \quad (\text{A.24})$$

Finalmente, note que, conforme visto na figura A.1, algumas variáveis aleatórias apresentam descontinuidades (saltos) em suas distribuições. Nesses casos, devemos recorrer ao delta de Dirac para podermos definir uma distribuição: onde $F_X(x)$ apresenta um salto de d , $f_X(x)$ apresenta um delta de amplitude d . Assim, para o exemplo da aposta nos dados, mostrado na figura A.2, $f_X(x)$ tem a forma representada na figura A.3.

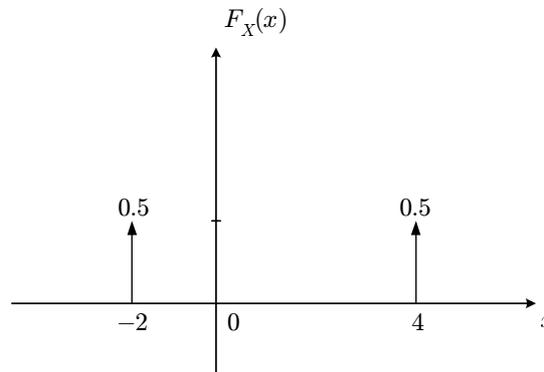


Figura A.3: Função densidade de probabilidade para o saldo final de uma aposta de 2.00 reais que o lançamento de um dado resulta em um número par.

A.6 Médias de Variáveis Aleatórias

Ainda que $F_X(x)$ e $f_X(x)$ tragam todas as informações necessárias sobre X , elas não são muito fáceis de manipular e/ou determinar. De fato, dada uma série de observações de X , é difícil determinar qual a função $F_X(x)$ que a descreve. Assim, na prática, costumamos usar as *médias*, ou momentos, para caracterizar (ainda que parcialmente) uma variável aleatória. Afinal de contas, as médias são números reais, portanto simples de serem manipulados e, como veremos, consideravelmente simples de serem estimados. Entretanto, essa caracterização é apenas parcial, já que variáveis aleatórias com diferentes distribuições podem possuir algumas médias iguais. Iniciaremos com médias de variáveis discretas, pois nesse caso a definição de médias é mais intuitiva.

A.6.1 Variáveis Aleatórias Discretas

A principal média com a qual nós estamos acostumados é a esperança, ou valor esperado. Considere, por exemplo, que você aposta 2.00 reais que uma carta retirada ao acaso de um baralho será de paus. Assim, com probabilidade $1/4$, você sai da mesa com 4.00 reais, e com probabilidade $3/4$ você sai da mesa com -2.00 reais. A esperança do seu ganho é dada pela média ponderada desses dois valores, ou seja, $4.00 * 1/4 + (-2.00) * 3/4 = -0.50$ real.

Em geral, se a variável aleatória X assume valores $\{x_i\}_{i=1}^N$, com probabilidade

$P[x_i]$, sua esperança é dada por

$$E[X] = \sum_{i=1}^N x_i P[x_i], \quad (\text{A.25})$$

onde N pode ser infinito. Note que $E[X]$ é um número não aleatório, que está diretamente ligado ao modelo probabilístico de X . A esperança é também chamada de primeiro momento, e às vezes é denotada por μ_X .

Ainda que não seja fácil ver nem demonstrar isso, a esperança está ligada ao nosso conceito intuitivo de média de seguinte forma: imagine que você repita um experimento K vezes, e que o resultado do k -ésimo experimento seja y_k . Considere então a média desses resultados, no seu sentido intuitivo:

$$\text{média} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y_k. \quad (\text{A.26})$$

Então, é possível mostrar que, a medida que temos mais experimentos, essa média se aproxima da esperança de X . Em outras palavras,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{média} = E[X]. \quad (\text{A.27})$$

Este importante resultado é conhecido como a lei dos grandes números. Na realidade, (A.26) é muito usada para estimar a esperança de uma variável aleatória baseado em sucessivas observações desta variável.

É importante ressaltar que a esperança *não* é o valor que esperamos que ocorra. De fato, no exemplo acima, o valor -0.50 nunca ocorre. Na realidade, se você jogar muitas vezes, a média dos seus resultados é dada pela esperança. Assim, no nosso exemplo, você vai perder em média 0.50 real, o que significa que esse jogo não vale a pena para você, mas vale muito a pena para o cassino.

Podemos, também, generalizar (A.25) para qualquer função de X . De fato, temos que

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^N g(x_i) P[x_i]. \quad (\text{A.28})$$

Algumas funções $g(X)$ levam a médias particularmente importantes. Por exemplo, usando $g(X) = aX + b$, podemos estabelecer que a esperança é um operador

linear, ou seja, para constantes a e b , $E[aX + b] = aE[X] + b$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 E[aX + b] &= \sum_{i=1}^N (aX + b) P[x_i] \\
 &= \sum_{i=1}^N aX P[x_i] + \sum_{i=1}^N b P[x_i] \\
 &= a \sum_{i=1}^N X P[x_i] + b \sum_{i=1}^N P[x_i] \\
 &= aE[X] + b,
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

onde a última igualdade segue do fato que os eventos $\{X = x_i\}$ são disjuntos e sua união dá o evento certo.

De particular importância para nós é o segundo momento, definido por

$$E[|X|^2] = \sum |x_i|^2 P[x_i], \tag{A.30}$$

e ligado, como é comum quando lidamos com o quadrado de alguma grandeza, à energia de X .

Baseado no segundo momento, podemos definir a variância de X , dada por

$$\begin{aligned}
 \sigma_X^2 &= E[|X - \mu_X|^2] \\
 &= E[|X - \mu_X|^2] \\
 &= E[|X|^2] - 2E[X\mu_X] + \mu_X^2 \\
 &= E[|X|^2] - \mu_X^2,
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

onde as igualdades seguem da linearidade da esperança e do fato de que μ_X é uma constante. A variância é importante, pois nos dá uma medida do quanto uma variável aleatória “flutua” ao redor de sua média.

A.6.2 Variáveis Aleatórias Contínuas

Nessa subseção, abandonaremos temporariamente nossa idéia de tentar dar uma justificção intuitiva, ainda que em geral vaga, para todos os conceitos, e simplesmente definiremos a esperança de uma variável aleatória contínua como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \tag{A.32}$$

Na realidade, devido ao uso do delta de Dirac, essa fórmula vale também para variáveis discretas. A “intuição” por trás dessa fórmula envolve a soma de Riemann, e não é particularmente elucidativa. Entretanto, a ligação entre $E[X]$ e nosso conceito intuitivo de média (a soma de observações dividido pelo número de observações) continua válida.

Assim como para variáveis aleatórias discretas, podemos definir algumas esperanças importantes para variáveis contínuas. Assim, temos:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \\ E[|X|^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 f_X(x) dx, \\ \sigma_X^2 &= E[|X|^2] - E[X]^2. \end{aligned} \tag{A.33}$$

Médias de Duas ou Mais Variáveis Aleatórias

Finalmente, podemos também calcular médias envolvendo duas ou mais variáveis aleatórias. Ainda que possamos fazê-lo também para variáveis discretas, preferimos definir essas médias apenas uma vez. Em particular, para uma função qualquer de X e Y , temos que

$$E[g(X, Y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy. \tag{A.34}$$

Usando essa equação com $g(X, Y) = X + Y$, temos que

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy + \iint_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E[X] + E[Y], \end{aligned} \tag{A.35}$$

onde usamos a marginalização da densidade conjunta descrita em (A.23). Em outras palavras, também nesse contexto a esperança é um operador linear.

Uma média muito importante de duas variáveis aleatórias é sua covariância, dada por

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)], \tag{A.36}$$

que, de certa forma, mede o quanto X e Y estão relacionados. Não é muito difícil ver que $\text{Cov}[X, Y]$ também pode ser calculada como

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - \mu_X \mu_Y. \quad (\text{A.37})$$

Para N variáveis aleatórias X_1, \dots, X_N , a média mais usada é a matriz de covariância. Seja \mathbf{X} é o vetor composto com as variáveis em questão, ou seja, $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^T$. Seja também $E[\mathbf{X}] = [E[X_1], \dots, E[X_N]]^T$ o vetor com a média dessas variáveis. Então, a matriz de covariância é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_N) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_N, X_1) & \text{Cov}(X_N, X_2) & \cdots & \sigma_{X_N}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Antes de terminar esta seção, é bom chamar a atenção para dois fatos já mencionados. Em primeiro lugar, *qualquer* média pode ser estimada usando (A.26). Por exemplo, se observamos K valores das variáveis X e Y , temos que

$$E[XY] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k y_k. \quad (\text{A.39})$$

Em segundo lugar, as médias apresentam uma caracterização parcial das propriedades de variáveis aleatórias. De fato, variáveis aleatórias com diferentes distribuições podem possuir algumas médias que são iguais. Entretanto, por serem facilmente estimáveis e manipuláveis, as médias são comumente usadas na prática.

A.7 Variáveis Aleatórias Gaussianas

Nessa seção, estudaremos a que é talvez a variável aleatória mais importante: a Gaussiana. Conforme vimos, uma variável aleatória é completamente caracterizada por sua densidade de probabilidade. No caso da Gaussiana, temos que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{A.40})$$

Assim, temos que a densidade de uma variável Gaussiana é completamente caracterizada por sua média e sua variância. Essa é uma das razões por trás da importância

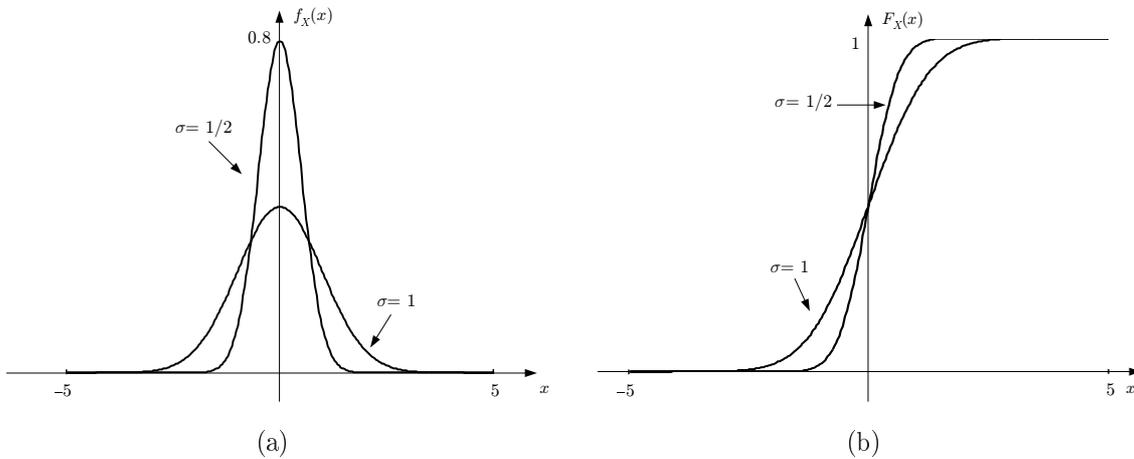


Figura A.4: Densidade (a) e distribuição (b) de probabilidade de uma variável aleatória Gaussiana de média zero.

dessa variável: se estimarmos essas duas grandezas, podemos determinar completamente *todas* as suas características estatísticas. Para chamarmos a atenção para esse fato, e para facilitar a notação, escrevemos $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ para dizer que X tem uma distribuição Gaussiana com média μ_X e variância σ_X^2 .

Mas talvez a principal explicação para a importância de variáveis Gaussiana esteja no teorema central do limite. *Grosso modo*, esse teorema diz que se uma variável aleatória X é a soma de várias outras variáveis, então, quando o número de variáveis tende a infinito, X tende a uma Gaussiana. Claro que o teorema impõe algumas condições sobre essas variáveis aleatórias que compõem X , mas em geral essas restrições só dizem respeito à média e à variância, e não à suas densidades. Inclusive, cada uma pode ter uma densidade diferente! Assim, se um fenômeno é a soma de diversas contribuições (como por exemplo o ruído térmico, causado pela combinação dos ruídos de milhares de elétrons), podemos aproximá-lo por uma variável Gaussiana.

Infelizmente, a distribuição de uma variável Gaussiana não possui uma fórmula fechada, devendo ser calculada numericamente ou através de uma tabela. Isso pode ser facilmente feito usando qualquer programa de simulação, e o resultado está mostrado na figura A.4.

A.7.1 Várias Variáveis Conjuntamente Gaussianas

Dizemos que as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_N são conjuntamente Gaussianas se sua densidade de probabilidade conjunta puder ser escrita como

$$f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})}{2}\right), \quad (\text{A.41})$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$, $\mu_{\mathbf{X}} = [\text{E}[X_1], \dots, \text{E}[X_N]]^T$, e \mathbf{C} é a matriz de covariância de X_1, \dots, X_N . Note que o termo $(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})$ descreve elipsóides de dimensão N centradas em $\mu_{\mathbf{X}}$. Da mesma forma que para uma única variável, usaremos a notação $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{X}}, \mathbf{C})$ para indicar que as variáveis em \mathbf{X} são conjuntamente Gaussianas, com média $\mu_{\mathbf{X}}$ e matrix de covariância \mathbf{C} .

É interessante notar que se as variáveis conjuntamente Gaussianas são decorrelacionadas, então \mathbf{C} é uma matriz diagonal, e o i -ésimo elemento da diagonal de \mathbf{C} é dado por $\mathbf{C}_{i,i} = \sigma_i^2$. Nesse caso,

$$\det(\mathbf{C}) = \prod_{i=1}^N \sigma_i^2. \quad (\text{A.42})$$

Também não é difícil ver que o fato de \mathbf{C} ser diagonal leva a

$$(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}}) = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \text{E}[X_i])^2}{2\sigma_i^2}. \quad (\text{A.43})$$

Como a exponencial da soma é igual ao produto das exponenciais, temos que a densidade conjunta de X_1, \dots, X_N é dada por

$$f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{(x_i - \text{E}[X_i])^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad (\text{A.44})$$

ou seja, a densidade conjunta é o produto das densidades marginais. Em outras palavras, se variáveis aleatórias conjuntamente Gaussianas são decorrelacionadas, elas também são independentes.

Um resultado importante, que apresentaremos sem prova, é que qualquer transformação linear de variáveis conjuntamente Gaussianas leva a variáveis conjuntamente Gaussianas. Ou seja, se $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{X}}, \mathbf{C}_{\mathbf{X}})$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, para alguma matriz constante \mathbf{A} , então \mathbf{Y} também é Gaussiano. O que não é muito difícil de ver, usando a linearidade da esperança, é que $\text{E}[\mathbf{Y}] = \mathbf{A} \text{E}[\mathbf{X}]$ e $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T$. Assim, $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\mu_{\mathbf{X}}, \mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T)$.

A.8 Processos Estocásticos

Por enquanto, estudamos apenas variáveis aleatórias cujo valor não depende do tempo. De certa forma, é como se as variáveis consideradas até aqui ocorressem apenas uma vez. Entretanto, os fenômenos aleatórios presentes em sistemas de comunicações dependem inerentemente do tempo. Por exemplo, a cada instante de tempo, o ruído de recepção assume um valor aleatório. A forma de onda transmitida também assume um valor aleatório a cada instante, já que depende dos símbolos transmitidos. Estes fenômenos aleatórios que dependem do tempo são chamados *processos estocásticos*, e seu estudo é o tópico desta e das próximas seções.

Nesse ponto, é bom lembrar que nós já mencionamos, de passagem, um tal processo. De fato, quando falamos de médias na equação (A.26), nós mencionamos que para seu cálculo nós repetimos um experimento aleatório diversas vezes, e somamos os diversos resultados obtidos. O processo de repetir um experimento diversas vezes gera uma seqüência de variáveis aleatórias. De forma equivalente, podemos pensar que temos uma variável aleatória diferente para cada instante de tempo discreto k em que realizamos o experimento. É importante notar que, nesses casos em que o processo estocástico ocorre apenas em instantes de tempo discretos, dizemos que temos uma *seqüência aleatória*.

Na realidade, existem duas definições equivalentes de um processo estocástico. A mais intuitiva diz que, em um processo estocástico, para cada instante de tempo k (ou t , se o processo ocorrer em tempo contínuo) temos uma variável aleatória $X(k; \xi)$ (ou $X(t; \xi)$). Por exemplo, a definição do processo ligado ao cálculo da média dada acima segue essa linha.

Da mesma forma, imagine que queiramos transmitir um único bit ξ . Assim $\xi \in \{0, 1\}$. Imagine ainda que a forma de onda transmitida seja $x(t) = \text{sinc}(t)$ se $\xi = 1$ e $x(t) = -\text{sinc}(t)$ se $\xi = 0$. Então, para cada instante de tempo t temos uma variável aleatória $X(t; \xi)$ dada por

$$X(t; \xi) = \begin{cases} \text{sinc}(t) & \text{se } \xi = 1, \\ -\text{sinc}(t) & \text{se } \xi = 0. \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

A discussão acima nos sugere imediatamente a segunda definição de um processo estocástico, que permite um tratamento de certa forma unificado de variáveis aleatórias e processos estocásticos. Lembre-se que uma variável aleatória associa um valor real a cada possível resultado de seu experimento. Um processo estocástico, por outro lado, associa uma *função* a cada possível resultado de seu experimento.

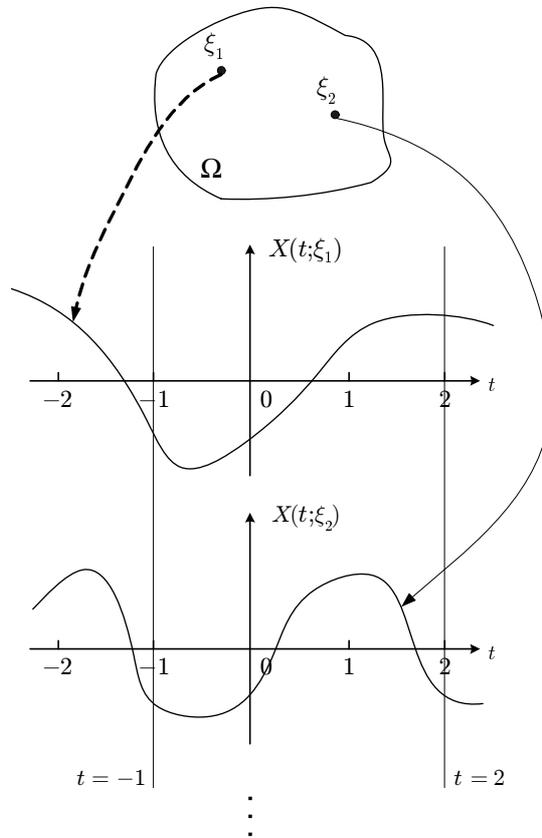


Figura A.5: Representação gráfica de um processo estocástico.

Ambas as definições estão mostradas na figura A.5 para um processo estocástico qualquer. Por um lado, vemos nessa figura que para cada valor de ξ temos uma função $X(t; \xi)$. Por outro lado, vemos que, para $t = -1$ e $t = 2$ temos duas variáveis aleatórias, $X(-1; \xi)$ e $X(2; \xi)$.

Dizemos que $x(t)$ é a *realização* de um processo estocástico se esta for a função que ele assume. Assim, no exemplo da transmissão do bit, a função $\text{sinc}(t)$ é a realização do processo estocástico quando $\xi = 1$. Por outro lado, chamamos o conjunto de todas as possíveis realizações de *ensemble*. No exemplo da transmissão, o ensemble é dado por $E = \{\text{sinc}(t), -\text{sinc}(t)\}$.

Assim como fizemos com variáveis aleatórias, em geral nós ignoraremos o fato de que o processo estocástico depende do valor de ξ . Em outras palavras, denotaremos o processo simplesmente por $X(t)$.

A.9 Médias de Processos Estocásticos

A caracterização estatística de um processo estocástico é bastante complexa. De fato, para sua completa caracterização, devemos conhecer $f_{X(t_1), \dots, X(t_N)}(x_1, \dots, x_N)$ para todos os valores de t_1, \dots, t_N e para todo valor de N . Obviamente, esta exigência não é muito simples de satisfazer. Assim, o uso de médias para caracterizar processos estocásticos é muito difundido, e talvez seja até mais importante do que em variáveis aleatórias.

São três as médias mais usadas na prática. Em primeiro lugar, definimos o valor esperado de um processo estocástico como

$$\mu_X(t) = E[X(t)]. \quad (\text{A.46})$$

Em outras palavras, $\mu_X(t)$ é a esperança da variável aleatória $X(t)$.

Se fôssemos simplesmente copiar o que fizemos para uma variável aleatória, definiríamos nesse ponto a variância de um processo estocástico. Entretanto, podemos obter muito mais informação a respeito de $X(t)$ através da sua *função de autocovariância*, dada por

$$C_X(t, t + \tau) = \text{Cov}[X(t), X(t + \tau)]. \quad (\text{A.47})$$

Em outras palavras, $C_X(t, t + \tau)$ é a covariância entre as variáveis aleatórias $X(t)$ e $X(t + \tau)$. Se $\tau = 0$, $C_X(t, t)$ nos dá a variância de $X(t)$, como desejávamos no começo deste parágrafo. Entretanto, para um τ qualquer, $C_X(t, t + \tau)$ nos dá uma idéia de quanto $X(t)$ e $X(t + \tau)$ estão relacionados. Ou seja, $C_X(t, t + \tau)$ nos dá uma noção de como $X(t)$ muda no intervalo τ . Se $C_X(t, t + \tau)$ for grande, então o processo possivelmente não muda muito nesse intervalo. Por outro lado, se $C_X(t, t + \tau)$ for pequeno, então possivelmente o processo passa por grandes mudanças entre os instantes t e $t + \tau$.

Finalmente, definimos também a função de autocorrelação de $X(t)$, dada por

$$R_X(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)]. \quad (\text{A.48})$$

Não é difícil ver que $C_X(t, t + \tau) = R_X(t, t + \tau) - \mu_X(t)\mu_X(t + \tau)$. Também temos que $R_X(0) = E[X^2(t)]$, ou seja, $R_X(0)$ está ligado à energia do processo estocástico.

Obviamente, podemos definir as mesmas médias para seqüências aleatórias. Devemos simplesmente trocar os valores reais t e τ por valores inteiros k e m . Assim, a média de X_k é dada por $E[X_k]$, a função de autocovariância é dada por $C_X(k, m) = \text{Cov}[X_k, X_{k+m}]$, e a função de autocorrelação é dada por $R_X(k, k+m) = E[X_k X_{k+m}]$.

A.9.1 Processos Estacionários

As características estatísticas de muitos processos estocásticos encontrados na prática não mudam com o tempo. Em outras palavras, se começarmos a observar um processo agora ou dentro de δ segundos, observaremos as mesmas características. Matematicamente, isso quer dizer que

$$f_{X(t_1), \dots, X(t_N)}(x_1, \dots, x_N) = f_{X(t_1+\delta), \dots, X(t_N+\delta)}(x_1, \dots, x_N). \quad (\text{A.49})$$

para todos os valores de t_1, \dots, t_N e para todo valor de N e δ . Processos com essas características são ditos estacionários.

Tomando $N = 1$, temos que $f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\delta)}(x)$, para qualquer δ . Tomando $\delta = -t$, concluímos que $f_{X(t)}(x) = f_{X(0)}(x)$. Em outras palavras, a densidade de $X(t)$ é a mesma para todo t , e portanto sua média não depende de t . Assim, podemos definir a média de um processo estacionário como μ_X ao invés de $\mu_X(t)$.

Tomando $N = 2$, temos que $f_{X(t), X(t+\tau)}(x_1, x_2) = f_{X(t+\delta), X(t+\tau+\delta)}(x_1, x_2)$. Assim, para $\delta = -t$, obtemos que $f_{X(t), X(t+\tau)}(x_1, x_2) = f_{X(0), X(\tau)}(x_1, x_2)$. Em outras palavras, $f_{X(t), X(t+\tau)}(x_1, x_2)$ só depende de τ , mas não de t . Dessa forma, podemos escrever as funções de autocovariância e autocorrelação como $C_X(\tau)$ e $R_X(\tau)$, já que elas também não dependem de t . Em resumo, para processos estacionários, as funções de autocovariância e autocorrelação dependem de apenas *uma* variável.

Certamente, pode ser difícil determinar se (A.49) é válido para todo N . Entretanto, na maioria das vezes, só estamos de fato interessados nas estatísticas mencionadas acima. Assim, dizemos que um processo estocástico é *estacionário no sentido amplo* se sua média é constante e sua função de autocovariância só depende de τ .

A.9.2 Médias Temporais e Ergodicidade

Para o cálculo das médias definidas na seção anterior, fixamos um ou mais instantes de tempo e verificamos o que ocorre com as variáveis aleatórias equivalentes a esses instantes. Assim, para calcular essas médias, levamos em conta todas as possíveis realizações do processo estocástico. Por isso, essas médias são chamadas de média de ensemble.

Na prática, estamos muito mais acostumados a observar uma única realização de um processo estocástico. Na realidade, o processo é uma função do tempo, de

forma que a todo instante estamos lidando com a mesma realização. Nesse caso, podemos calcular médias temporais ligadas à realização.

Para uma realização x_k de uma seqüência aleatória, por exemplo, podemos calcular

$$\langle x \rangle_K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_k. \quad (\text{A.50})$$

De forma equivalente, para uma realização $x(t)$ de um processo estocástico a tempo contínuo, definimos

$$\langle x \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (\text{A.51})$$

Note que há o risco de confundir essa notação com a adotada no apêndice B para o produto interno de duas funções. Note, entretanto, que a definição aqui possui apenas um argumento, e apresenta um índice que indica quantos elementos estão envolvidos na soma.

Estas definições pode parecer a primeira vista intrigantes. Afinal, vimos que para cada instante de tempo temos uma variável aleatória distinta. Ou seja, essas definições estão executando a soma de realizações de variáveis aleatórias distintas. Pode parecer estranho que isso tenha algum sentido, mas de fato, para uma grande classe de processos, tem. Na realidade, existe uma classe de processos, chamados de processos *ergódicos na média*, para os quais (A.50) e (A.51) tendem a μ_x a medida que K (ou T) tendem a infinito.

Note que para a definição de ergodicidade acima fazer sentido, μ_X não pode ser uma função do tempo. Afinal, não teríamos como levar uma dependências dessas em conta nas equações (A.50) e (A.51).

Podemos também definir outras médias temporais importantes. De particular interesse, definimos

$$\begin{aligned} \langle x_k x_{k+m} \rangle_K &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_k x_{k+m} \\ \langle x(t) x(t + \tau) \rangle_T &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Assim como fizemos acima, dizemos que um processo é ergódico na autocorrelação se as médias temporais acima convergem, respectivamente, para $C_X[m]$ e $C_X(\tau)$.

Note que para as definições de ergodicidade acima fazerem sentido, o processo estocástico tem que ser estacionário no sentido amplo. Por exemplo, se (A.50)

tende a μ_X , então μ_X não pode depender de k . De, não teríamos como incluir uma dependência em k ou t nos cálculos das médias temporais.

O ponto principal desta seção, na realidade, não é discutir a definição de processos ergódicos. De fato, o mais importante é ressaltar que, para processos de interesse, as médias temporais podem ser usadas, e de fato o são na prática, para estimar as médias de ensemble do processo estocástico como um todo, mesmo que só tenhamos acesso a uma de suas realizações.

A.10 Filtragem de um Processo Estocástico

Nesta seção, estudaremos as características estatísticas do sinal $Y(t)$ na saída de um filtro linear quando sua entrada é um processo estocástico estacionário no sentido amplo $X(t)$. Discutiremos principalmente sinais em tempo contínuo, já que os resultados para seqüências aleatórias são semelhantes, bastando, em geral, substituir as integrais por somatórias. Nesta seção, buscaremos determinar a média e a função de autocorrelação do sinal na saída do filtro já que, como sempre, a determinação de todas as suas características estatísticas seria muito complexa.

Assim, seja $h(t)$ a resposta ao impulso do filtro, e $H(f)$ sua transformada de Fourier. Para um dado ξ , o sinal na entrada do filtro é $X(t; \xi)$. Temos então que a saída do filtro é dada por

$$Y(t; \xi) = \int h(u)X(t - u; \xi)du. \quad (\text{A.53})$$

Em outras palavras, $Y(t; \xi)$ também é um processo estocástico. Seguindo a convenção anterior, não mais faremos referências explícitas a ξ , e denotaremos a saída do filtro apenas por $Y(t)$.

Assuma, agora, que tanto $X(t)$ quanto $h(t)$ são tais que possamos trocar a ordem da esperança e da integração. Esta condição é apenas um formalismo matemático, e não é muito restritiva. Baseado nesta hipótese, e usando a linearidade da esperança,

a determinação da esperança de $Y(t)$ é relativamente simples. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 \mu_Y(t) &= \mathbb{E} \left[\int h(u)X(t-u) du \right] \\
 &= \int h(u) \mathbb{E}[X(t-u)] du \\
 &= \int h(u)\mu_X du \\
 &= \mu_X \int h(u) du \\
 &= \mu_X H(0).
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Podemos observar que $\mu_Y(t)$ na realidade não depende de t .

Uma outra média importante é a correlação cruzada entre $Y(t)$ e $X(t)$, que é dada por

$$\begin{aligned}
 R_{X,Y}(t, t+\tau) &= \mathbb{E}[X(t)Y(t+\tau)] \\
 &= \mathbb{E} \left[X(t) \int h(u)X(t+\tau-u) du \right] \\
 &= \int h(u) \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau-u)] du \\
 &= \int h(u)R_X(\tau-u) du \\
 &= h(\tau) * R_X(\tau),
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

onde $*$ denota convolução. Claramente, (A.55) não depende de t .

Finalmente, para determinarmos a função de autocorrelação, escrevemos

$$\begin{aligned}
 R_Y(t, t+\tau) &= \mathbb{E} \left[\int h(u)X(t-u) du \int h(v)X(t+\tau-v) dv \right] \\
 &= \iint h(u)h(v) \mathbb{E}[X(t-u)X(t+\tau-v)] dudv \\
 &= \iint h(u)h(v)R_x(\tau-v+u) dudv,
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

onde a última equação é consequência da estacionariedade de $X(t)$. Assim, fica claro que $R_Y(t, t+\tau)$ não depende de t . Como já observamos que μ_Y é constante, concluímos que $Y(t)$ também é um processo estacionário no sentido amplo, assim como $X(t)$.

Infelizmente, (A.56) não é nada intuitiva, nem é fácil de calcular. Para contornar esses problemas, na próxima seção veremos o que ocorre no domínio da frequência.

A.11 Densidade Espectral de Potência

Para podermos escrever (A.56) no domínio da frequência, definimos a *densidade espectral de potência*, ou *espectro*, de um processo estocástico estacionário no sentido amplo como a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação. Matematicamente, temos que

$$S_X(f) = \int R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (\text{A.57})$$

o que implica que

$$R_X(\tau) = \int S_X(f) \exp(j2\pi f\tau) df. \quad (\text{A.58})$$

A densidade espectral de potência possui duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, $R_X(0) = E[X^2(t)]$. Assim, temos que

$$E[X^2(t)] = \int S_X(f) df. \quad (\text{A.59})$$

Ou seja, a integral de $S_X(f)$ está ligada à potência do sinal.

Mais ainda, $S_X(f)$ possui propriedades de simetria importantes. Em primeiro lugar, da definição de $R_X(\tau)$ fica claro que $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$, o que implica que $S_X^*(f) = S_X(f)$. Ou seja, a densidade espectral de potência é um número real. Para processos estocásticos reais como os que temos tratado até aqui, $R_X(f)$ é também real, o que implica que $S_X(f) = S_X(-f)$.

Considere, agora, o cálculo da densidade espectral do sinal na saída de um filtro linear, $S_Y(f)$. De (A.56), temos que

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \int R_Y(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int \left(\iint h(u)h(v)R_x(\tau - v + u) du dv \right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Fazendo a mudança de variáveis de τ para $\tau' = \tau + v - u$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \int h(u) \exp(-j2\pi fu) du \int h(v) \exp(j2\pi fv) dv \int R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= H(f)H^*(f)S_X(f) \\ &= |H(f)|^2 S_X(f). \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

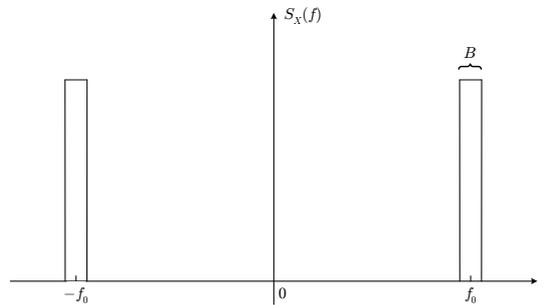


Figura A.6: Resposta em frequência de um filtro passa faixas ideal.

A equação (A.56) nos dá uma relação simples entre a densidade espectral de potência dos sinais na entrada e na saída de um filtro linear. Mais ainda, ela nos permite uma interpretação interessante da densidade espectral de potência. Para ver isso, considere que $H(f)$ seja um filtro passa baixas centrado em f_0 , cuja resposta em frequência está mostrada na figura A.6. Nesse caso, o sinal na saída do filtro é praticamente apenas os componentes de $X(t)$ com frequência f_0 .

Agora, vamos calcular a energia do sinal na saída do filtro. Sabemos que $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$. Assim,

$$E[Y^2(t)] = \int S_Y(f) df = \int |H(f)|^2 S_X(f) df. \quad (\text{A.62})$$

Suponha, agora, que B seja pequeno, de forma que $S_X(f)$ seja constante na faixa de interesse. Isso implica que $E[Y^2(t)] \approx 2BS_X(f_0)$, o que, por sua vez, resulta em

$$S_X(f_0) \approx \frac{E[Y^2(t)]}{2B}. \quad (\text{A.63})$$

Ou seja, a densidade espectral de potência nos dá a potência por unidade de frequência (em outras palavras, a densidade) da potência de $X(t)$ em torno de f_0 .

Outra propriedade importante de $S_X(f)$ é que $S_X(f) \geq 0$. Ainda que a demonstração rigorosa desse resultado seja difícil, (A.63) nos dá um intuição de que ele seja verdade. De fato, como $E[Y^2(t)] \geq 0$, esperamos que também $S_X(f) \geq 0$.

A.12 Ruído Aditivo Gaussiano Branco

Como sempre, um dos processos estocásticos mais importantes é o Gaussiano. Dizemos que um processo é Gaussiano se, para todos os valores de t_1, \dots, t_N e

para todo valor de N , as variáveis aleatórias $X(t_1), \dots, X(t_N)$ são conjuntamente Gaussianas.

São duas as propriedades importantes destes processos. Em primeiro lugar, lembre-se que variáveis conjuntamente Gaussianas são completamente caracterizadas por suas médias e correlações. Ora, se um processo estocástico Gaussiano é estacionário no sentido amplo, então sua média e matriz de autocorrelação não dependem de t . Isso implica que sua densidade de probabilidade não depende de t . Ou seja, o processo é estacionário. Mais ainda, para caracterizar completamente esse processo, precisamos apenas de μ_X e de $R_X(\tau)$, já que podemos obter a matriz de autocorrelação de $X(t_1), \dots, X(t_N)$ a partir de $R_X(\tau)$.

A segunda propriedade está ligada ao resultado mencionando anteriormente de que qualquer transformação linear de variáveis aleatórias conjuntamente Gaussianas resulta em variáveis aleatórias conjuntamente Gaussianas. Como um filtro é também linear, temos que se a entrada do filtro for um processo estocástico Gaussiano, então a saída do filtro também é.

Processos Gaussianos são muito usados para modelagem do ruído presente em sistemas elétricos. Conforme vimos, para caracterizar esse ruído devemos especificar sua média e função de autocorrelação. Ora, ruídos em geral possuem média zero, ou seja, $\mu_X = 0$. Mais ainda, a evolução temporal do ruído é altamente imprevisível. Para expressarmos isso matematicamente, dizemos que, se $t_1 \neq t_2$, então $X(t_1)$ e $X(t_2)$ são independentes. Isso implica que

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = E[X(t)] E[X(t + \tau)] = 0, \text{ para } \tau \neq 0. \quad (\text{A.64})$$

Para completar a especificação do processo, falta apenas determinar o valor de $R_X(0)$. Para fazê-lo, considere que, como $R_X(\tau) = 0$ para $\tau \neq 0$, temos que $S_X(f) = 0$, a não ser que $R_X(\tau)$ seja proporcional a $\delta(\tau)$. Entretanto, se $S_X(f) = 0$, temos um processo estocástico de variância nula, o que certamente não representa o ruído. Assim, devemos ter que $R_X(\tau) = N_0/2\delta(\tau)$. Nesse caso, teremos que $S_X(f)$ é uma constante igual a $N_0/2$.

Esta definição tem algumas conseqüências importantes. Em primeiro lugar, vemos que o ruído tem componentes iguais em todas as freqüências. Como a cor branca também tem esta característica, chamamos esse ruído de ruído branco.

Outra observação é que $R_X(\tau) = N_0/2\delta(\tau)$ implica que $R_X(0)$ é infinito, ou seja, que o sinal tem energia infinita. Obviamente, nenhum sinal na natureza pode satisfazer esta propriedade. Entretanto, devemos considerar também que nenhum

sinal de interesse ocupa uma faixa de frequência infinita, e que, no processamento, as frequências que não correspondem ao sinal de interesse são filtradas. Assim, a hipótese de que o ruído aditivo possui um espectro plano em todas as frequências acaba sendo reduzida à hipótese de que o espectro é plano apenas nas frequências de interesse.

Considere, por exemplo, a figura A.6. Nesse caso, a faixa de frequências do sinal de interesse é B . Assumindo um ruído com espectro plano igual a $N_0/2$ na faixa de interesse e nulo fora dela, temos, de (A.59), que a variância do ruído é dada por

$$E[N^2(t)] = \int S_N(f) df = BN_0. \quad (\text{A.65})$$

Ou seja, na faixa de frequências de interesse, o ruído possui energia finita.

A.13 Exercícios

EXERCÍCIO A.1:

A variável aleatória X tem a densidade de probabilidade mostrada na figura A.7. Determine o valor de A .

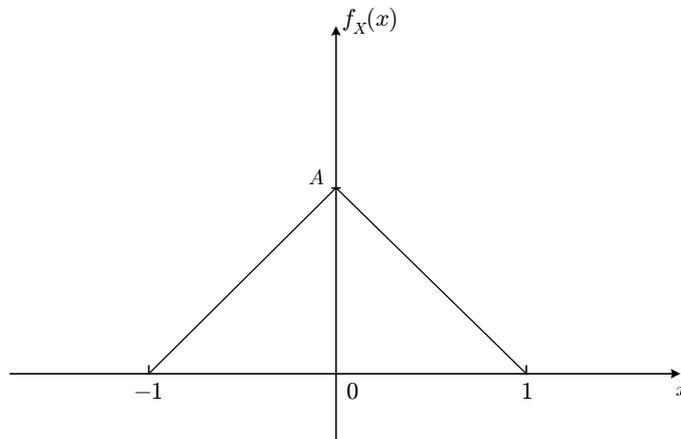


Figura A.7: Densidade de probabilidade de X .

EXERCÍCIO A.2:

Seja $R = X + N$ o sinal na saída de um canal de comunicações, onde X é o símbolo transmitido e $N \sim (0, \sigma^2)$ é o ruído. Suponha que x assumam os valores $+1$

e -1 , ambos com probabilidade $1/2$. Determine $f_R(r|X = +1)$ e $f_R(r|X = -1)$. (Dica: pense no que acontece com o sinal recebido quando o símbolo transmitido é $+1$, por exemplo.) Finalmente, usando o teorema da probabilidade total (ver notas), esboce o gráfico de $f_R(r)$.

EXERCÍCIO A.3:

Determine o valor da constante a que minimiza $E[(X - a)^2]$. “Dica”: Se você não quiser simplesmente usar derivadas, soma e subtraia μ_X do termo que é elevado ao quadrado. Expandindo o resultado de forma adequada, o resultado sai em poucas linhas. Esta técnica é muito usada em vários problemas que envolvem minimizar um quadrado.

EXERCÍCIO A.4:

Usando apenas a definição axiomática de probabilidade, prove que

- $P[\emptyset] = 0$.
- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.
- Se $A \subset B$, então $P[A] < P[B]$.
- $P[A^c] = 1 - P[A]$, onde A^c é o complemento de A .

APÊNDICE B

Funções como Espaços Vetoriais

Apesar de inicialmente poder parecer surpreendente, o conjunto das funções forma um espaço vetorial. Afinal, a soma de duas funções é uma função, e a multiplicação de uma função por um real é uma função, e é fácil (de verdade) verificar que todas as outras exigências para um espaço vetorial são satisfeitas pelo conjunto das funções. A maior dificuldade talvez seja pensar em uma função como um objeto, mas isso é uma abstração com a qual é possível se acostumar. E lembre-se que a definição de espaço vetorial diz respeito a um conjunto de objetos que satisfazem uma série de propriedades, e não está restrita apenas aos vetores em \mathbb{R}^n com os quais estamos acostumados.

Igualmente importante é o fato de que a integral do produto de duas funções satisfaz todos os requerimentos de um produto interno. Ou seja, para duas funções $g(t)$ e $f(t)$, podemos definir

$$\langle g(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t) dt \quad (\text{B.1})$$

como o produto interno de duas funções. Se as funções são complexas, o produto interno pode ser definido como

$$\langle g(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f^*(t) dt. \quad (\text{B.2})$$

Sem entrarmos em maior detalhes, assumiremos que estamos lidando com funções para as quais essas integrais sejam bem definidas. Estas funções formam um conjunto denotado, em matemática, por L^2 .

O interesse em considerar funções como espaços vetoriais, bem como na definição do produto interno de duas funções, é que vários resultados e intuições de álgebra linear podem ser diretamente aplicados a funções. Na seqüência, veremos algumas aplicações de interesse em transmissão digital.

B.1 Norma, Distância e Ortogonalidade

Se considerarmos o conjunto das funções L^2 como um espaço vetorial dotado de um produto interno, podemos definir a *norma* (o “tamanho”) de uma função, de acordo com a relação

$$\|g(t)\|^2 = \langle g(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt. \quad (\text{B.3})$$

Ou seja, $\|g(t)\|^2$ é a energia do sinal $g(t)$.

Baseado no conceito de norma, podemos também definir a *distância* entre duas funções como $\|g(t) - f(t)\|$. Em outras palavras, o quadrado da distância entre duas funções (ou, equivalentemente, entre dois sinais) é a energia de sua diferença:

$$\|g(t) - h(t)\|^2 = \langle g(t) - h(t), g(t) - h(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t) - h(t)|^2 dt. \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, dizemos que duas funções são *ortogonais* se

$$\langle g(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f^*(t) dt = 0. \quad (\text{B.5})$$

Este conceito é idêntico à ortogonalidade entre vetores, e tem as mesmas consequências. Por exemplo, se $g(t)$ e $f(t)$ são ortogonais, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e concluir que $\|g(t) + f(t)\|^2 = \|g(t)\|^2 + \|f(t)\|^2$.

B.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Um resultado importante de álgebra linear que pode ser diretamente aplicado ao conjunto das funções é a desigualdade de Cauchy-Schwarz, cuja prova pode ser

encontrada em qualquer livro de álgebra linear, e será dada no final desta seção. Esta desigualdade diz que, para quaisquer dois vetores \mathbf{g} e \mathbf{h} , temos que

$$|\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle| \leq \|\mathbf{g}\| \|\mathbf{h}\|, \quad (\text{B.6})$$

com igualdade se e somente se \mathbf{g} é um múltiplo de \mathbf{h} . Usando a definição do produto interno de duas funções, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt, \quad (\text{B.7})$$

com igualdade se e somente se $g(t)$ é um múltiplo de $h(t)$. Note que, para facilitar a notação, em (B.7) elevamos os dois lados de (B.6) ao quadrado.

Para demonstrar a desigualdade, notamos que, para qualquer valor do escalar α ,

$$\|\alpha \mathbf{g} - \mathbf{h}\|^2 \geq 0. \quad (\text{B.8})$$

Expandindo o lado esquerdo dessa desigualdade, temos que

$$|\alpha|^2 \|\mathbf{g}\|^2 - \alpha \langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle - \alpha^* \langle \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle + \|\mathbf{h}\|^2 \geq 0. \quad (\text{B.9})$$

Observe agora que se $\|\mathbf{g}\| = 0$ então $g(t) = 0$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz é satisfeita. Assuma então que $\|\mathbf{g}\| \neq 0$ e tome um valor particular de α , $\alpha = \langle \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle / \|\mathbf{g}\|^2$, de forma que $|\alpha|^2 = |\langle \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle|^2 / \|\mathbf{g}\|^4$. Note que, da definição do produto interno em (B.5), $\langle \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle^*$, e, portanto, $\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle \langle \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle^* = |\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle|^2$. Usando estes resultados e a definição de α na desigualdade acima, podemos escrever

$$\frac{|\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle|^2}{\|\mathbf{g}\|^2} - \frac{|\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle|^2}{\|\mathbf{g}\|^2} - \frac{|\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle|^2}{\|\mathbf{g}\|^2} + \|\mathbf{h}\|^2 \geq 0. \quad (\text{B.10})$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$-\frac{|\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle|^2}{\|\mathbf{g}\|^2} + \|\mathbf{h}\|^2 \geq 0, \quad (\text{B.11})$$

e, portanto,

$$\|\mathbf{h}\|^2 \geq \frac{|\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle|^2}{\|\mathbf{g}\|^2}, \quad (\text{B.12})$$

Multiplicando os dois lados por $\|\mathbf{g}\|^2$ e tirando a raiz quadrada, chegamos ao resultado desejado.

Finalmente, note que se $h(t) = \alpha g(t)$ para um α qualquer, então a desigualdade de Cauchy-Schwarz é satisfeita com igualdade. Por outro lado, se a desigualdade

de Cauchy-Schwarz é satisfeita com igualdade, então, invertendo o raciocínio acima, vemos que $\|\alpha\mathbf{g} - \mathbf{h}\|^2 = 0$ para $\alpha = \langle \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle / \|\mathbf{g}\|^2$. Mas isso acontece se e somente se $\alpha g(t) - h(t) = 0$ para todo t , o que implica que $h(t) = \alpha g(t)$. Ou seja, a desigualdade de Cauchy-Schwarz é satisfeita com igualdade se e somente se $h(t) = \alpha g(t)$.

B.3 Subespaços e Bases Ortonormais

Outra vantagem de vermos funções como um espaço vetorial é que, com isso, podemos pensar em subespaços de funções, em bases para esses subespaços, etc. Por exemplo, funções periódicas com período T formam um subespaço do conjunto de funções. Afinal, a soma de duas funções periódicas é uma função periódica, e o produto de uma função periódica por uma constante é também uma função periódica. Do estudo de séries de Fourier, sabemos que $\{\exp(j2\pi kt/T)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ é uma base (infinita) desse subespaço. Neste caso, o intervalo de integração na definição do produto interno incorpora apenas um período da função. Do contrário, as integrais envolvidas não são bem definidas.

A base determinada pela série de Fourier possui uma propriedade importante: seus vetores são ortogonais. De fato, temos que

$$\langle \exp(j2\pi kt/T), \exp(j2\pi lt/T) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq l \\ T & \text{se } k = l \end{cases}. \quad (\text{B.13})$$

Bases com esta propriedade são chamadas de *bases ortogonais*. Se, além disto, os vetores da base tiverem norma unitária, temos uma *base ortonormal*.

Como sempre, as bases ortogonais no presente contexto possuem as mesmas propriedades importantes que aquelas de espaços vetoriais tradicionais. De fato, seja $V = \text{span}\{f_k(t)\}_{k=0}^K$ o subespaço gerado pelas funções ortonormais $f_k(t)$, $k = 0, \dots, K$. Ou seja, toda função $g(t) \in V$ pode ser escrita como

$$g(t) = \sum_{k=0}^K g_k f_k(t). \quad (\text{B.14})$$

Devido à ortonormalidade da base, não é difícil mostrar que

$$g_k = \langle g(t), f_k(t) \rangle. \quad (\text{B.15})$$

Para isso, tome o produto interno do lado direito de (B.14) com $f_k(t)$. Também pode-se mostrar que

$$\|g(t)\|^2 = \sum_{k=0}^K |g_k|^2. \quad (\text{B.16})$$

B.4 Projeções Ortogonais

A partir dos conceitos de ortogonalidade e de subespaço, podemos definir também a projeção ortogonal. Por exemplo, seja V um subespaço e $r(t)$ um “vetor” qualquer. Então, é possível mostrar que o vetor de V mais próximo de $r(t)$, $r_0(t)$, é a projeção ortogonal de $r(t)$ em V .

Aqui, como sempre, a projeção ortogonal possui as mesmas propriedades que em espaços mais tradicionais. Em particular, qualquer elemento de V é ortogonal ao vetor $r(t) - r_0(t)$. Na figura 3.2, página 37, temos um exemplo de projeção ortogonal em um subespaço unidimensional.

A demonstração de que a projeção ortogonal de fato minimiza a distância utiliza uma técnica muito comum em vários outros problemas. Portanto, seu estudo é de interesse. Assim, seja $g(t)$ um vetor qualquer em V . Então,

$$\|g(t) - r(t)\|^2 = \|g(t) - r_0(t) - (r(t) - r_0(t))\|^2, \quad (\text{B.17})$$

onde apenas somamos e subtraímos $r_0(t)$. Ora, o vetor $g(t) - r_0(t)$ é a diferença entre dois elementos de V , e portanto também está em V . Portanto, ele é ortogonal a $r(t) - r_0(t)$. Assim, usando Pitágoras,

$$\|g(t) - r(t)\|^2 = \|g(t) - r_0(t)\|^2 + \|r(t) - r_0(t)\|^2. \quad (\text{B.18})$$

Note que o termo $\|g(t) - r_0(t)\|^2$ é sempre positivo, e seu menor valor é atingido quando $g(t) = r_0(t)$. Assim, temos que

$$\|g(t) - r(t)\|^2 \geq \|r(t) - r_0(t)\|^2, \quad (\text{B.19})$$

com igualdade se e somente se $g(t) = r_0(t)$. Em outras palavras, se $g(t) \in V$, o menor valor que $\|g(t) - r(t)\|^2$ pode assumir é $\|r_0(t) - r(t)\|^2$, o que ocorre se e somente se $g(t) = r_0(t)$. Concluimos, então que $r_0(t)$ é de fato o elemento de V mais próximo de $r(t)$.

O conceito de base ortonormal facilita bastante o cálculo das projeções ortogonais. De fato, seja, novamente, $V = \text{span}\{f_k(t)\}_{k=0}^K$ o subespaço gerado pelas funções ortonormais $f_k(t)$, $k = 0, \dots, K$. Assim, temos que

$$r_0(t) = \sum_{k=0}^K r_k f_k(t), \quad (\text{B.20})$$

onde

$$r_k = \langle r(t), f_k(t) \rangle. \quad (\text{B.21})$$

De fato, não é difícil checar que se $g(t) \in V$, então, para o vetor $r_0(t)$ definido acima, $\langle g(t), r(t) - r_0(t) \rangle = 0$. Para isso, basta escrever $g(t)$ como em (B.14) e expandir o produto interno acima, lembrando que as funções de base são ortonormais.

Bibliografia
