Processamento Digital de Sinais

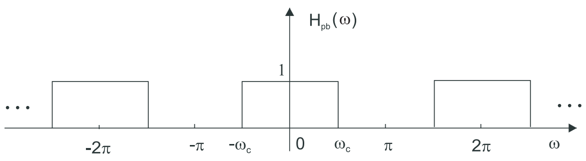
Renato da Rocha Lopes e Amauri Lopes
`rlopes@decom.fee.unicamp.br`

DECOM - Departamento de Comunicações - DECOM
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

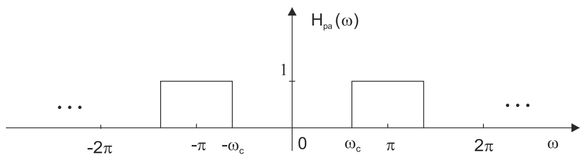
Conteúdo da Aula

Filtros Ideais

Passa Baixas:



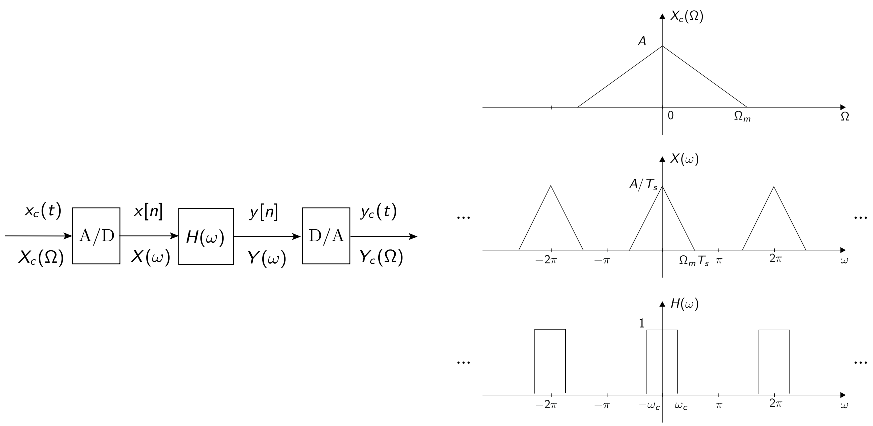
Passa Altas:



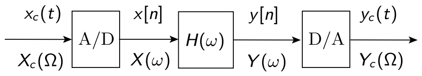
Lembretes

- Resposta em freqüência é periódica
- Altas freqüências estão em torno de π

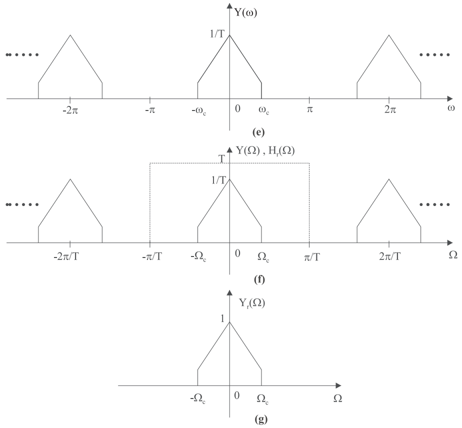
A filtragem



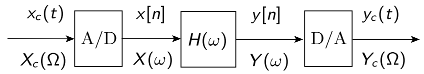
A filtragem



$$\boxed{\Omega_c = \omega_c / T_s}$$



Eliminando *Aliasing* Digitalmente



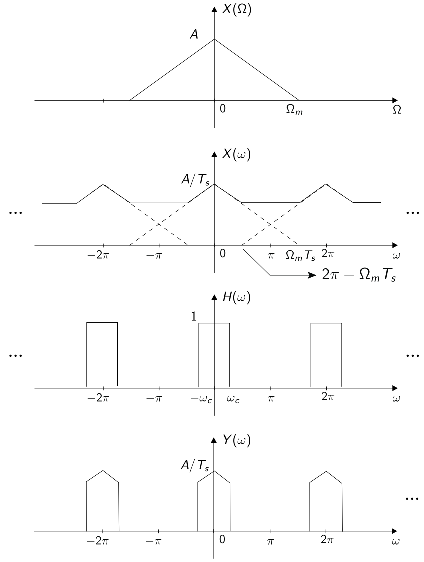
Condição

Remove *alias* se:

$$\omega_c < 2\pi - \Omega_m T_s$$

Ou seja, se

$$\omega_c < 2\pi - \omega_m$$



Introdução

Por que mudar taxa de amostragem?

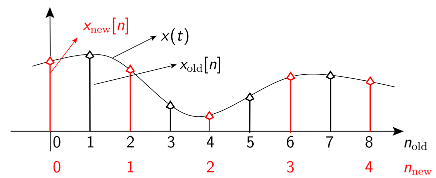
- Interface entre sistemas que operam a taxas distintas
  - Ex.: FPGA e TV Digital
- Mudança de escala de imagens
- Redução de taxa diminui complexidade em cálculos por segundo
- Uso de *hardware* mais simples, com *clock* mais lento
- Pode levar a filtros mais simples
- Base para bancos de filtros e *wavelets*

Como fazer?

- Reconstrói o sinal digital e reamostra
- Faz digitalmente

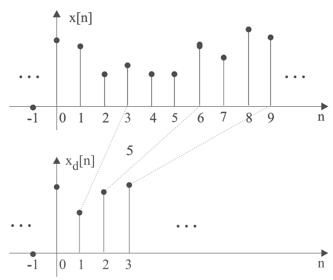
Redução da taxa de amostragem: Dizimação

$$f_{\text{new}} = f_{\text{old}}/M$$



$$\begin{aligned} x_{\text{new}}[n] &= x_c(nT_{\text{new}}) \\ &= x_c(nMT_{\text{old}}) \\ &= x_{\text{old}}[nM] \end{aligned}$$

Mas n é **sempre** inteiro:

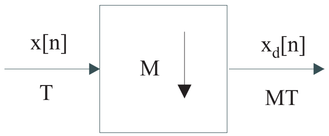


Aliasing e Dizimação

Para que não haja *aliasing*:

$$\Omega_m < \frac{\omega_{\text{new}}}{2} < \frac{\omega_{\text{old}}}{2M}$$

Em freqüências digitais, $\omega_m < \frac{\pi}{M}$
Para evitar *aliasing*, usa filtro passa-baixas antes de dizimar.
Representação simbólica:

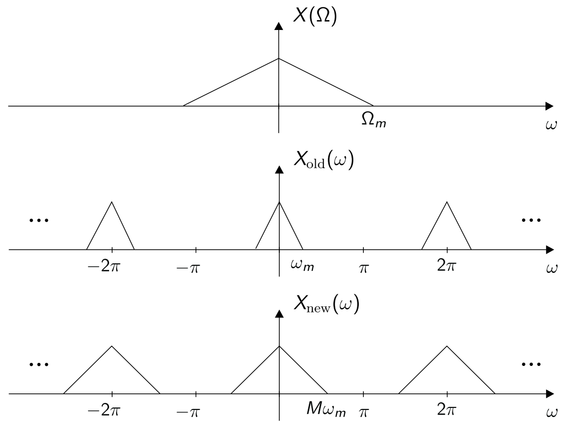


Dizimação no Domínio da Freqüência

Seja $x_{\text{old}}[n] = \cos(\omega_{\text{old}} n)$

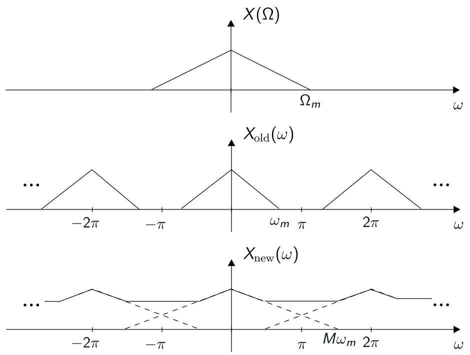
$$\begin{aligned} x_{\text{new}}[n] &= x_{\text{old}}[Mn] \\ &= \cos(\omega_{\text{old}} Mn) \\ &= \cos(\omega_{\text{new}} n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{\text{new}} = M\omega_{\text{old}}}$$



Aliasing e Dizimação no Domínio da Freqüência

$$X_{\text{new}}(\omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X_{\text{old}}\left(\frac{\omega + k2\pi}{M}\right)$$



Prova da Relação em Freqüência e Dizimação

$$x_{\text{old}}[Mn] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_{\text{old}}(\omega) e^{j\omega Mn}\, d\omega$$

Divida a integral em subintervalos

$$x_{\text{old}}[Mn] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{M-1}\int_{k2\pi/M}^{(k+1)2\pi/M} X_{\text{old}}(\omega) e^{j\omega Mn}\, d\omega$$

Faça $v = \omega - k2\pi/M$

$$x_{\text{old}}[Mn] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{M-1}\int_0^{2\pi/M} X_{\text{old}}(v + k2\pi/M) e^{j(v+k2\pi/M)Mn}\, dv$$

Note que $e^{jk2\pi n} = 1$

Prova da Relação em Freqüência e Dizimação

$$x_{\text{old}}[Mn] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{M-1}\int_0^{2\pi/M} X_{\text{old}}(v + k2\pi/M)e^{jvMn}\,\mathrm{d}v$$

Faça $\omega = vM$

$$x_{\text{old}}[Mn] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{M-1}\int_0^{2\pi} \boxed{\frac{1}{M}X_{\text{old}}\left(\frac{\omega + k2\pi}{M}\right)} e^{j\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

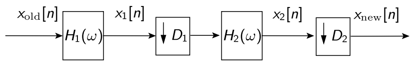
Mas $x_{\text{old}}[Mn] = x_{\text{new}}[n]$, que é dado pela transformada inversa

$$x_{\text{old}}[Mn] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boxed{X_{\text{new}}(\omega)} e^{j\omega Mn}\,\mathrm{d}\omega$$

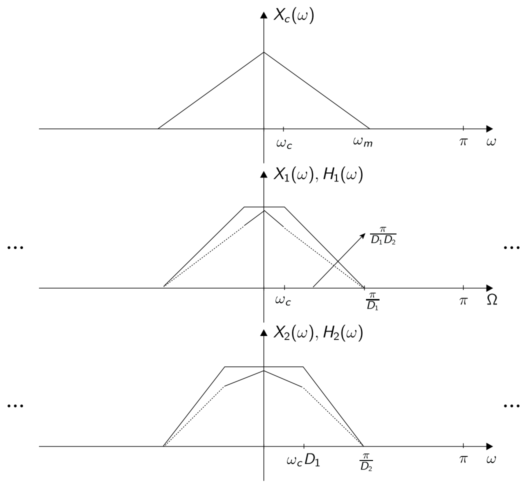
Como a transformada é única, $\boxed{X_{\text{new}}(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1}\frac{1}{M}X_{\text{old}}\left(\frac{\omega + k2\pi}{M}\right)}$

Aplicação: Filtros Simples

Dizimação por $D_1 D_2$ em dois estágios, com filtros mais simples:



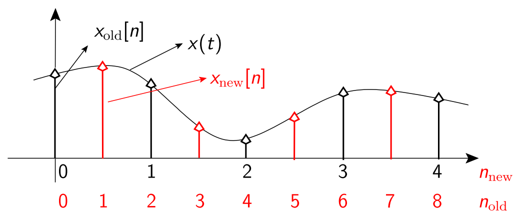
Nota:
Dizimação após filtragem joga fora muitas saídas do filtro.
É possível trocar a ordem.



Aumento da taxa de amostragem: Interpolação

$$f_{\text{new}} = L f_{\text{old}}$$

$$\begin{aligned} x_{\text{new}}[n] &= x_c(nT_{\text{new}}) \\ &= x_c(nT_{\text{old}}/L) \\ &= x_{\text{old}}[n/L] \end{aligned}$$



$\boxed{x_{\text{old}}[n/L] \text{ só existe para } n = kL}$

Como determinar amostras intermediárias?

Interpolação no Domínio da Freqüência: o Desejado

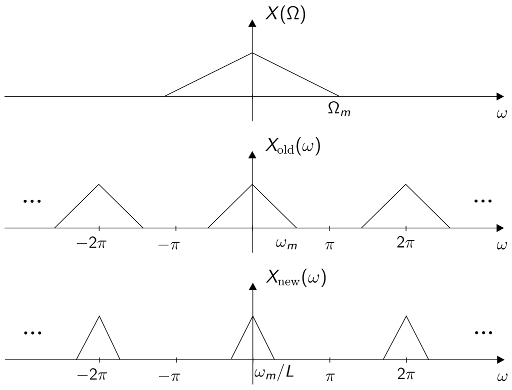
$$\begin{aligned} x_c(t) &= \cos(\Omega t) \\ x_{\text{new}}[n] &= x_c(n\Omega T_{\text{new}}) \\ &= \cos(n\Omega T_{\text{old}}/L) \end{aligned}$$

$\boxed{\omega_{\text{new}} = \omega_{\text{old}}/L}$

- $x_{\text{old}}[n]$ não representa freqüências acima de $f_{\text{old}}/2$.

⇒ $x_{\text{new}}[n]$ tb. não representa freqüências acima de $f_{\text{old}}/2$.

⇒ Maior freqüência digital de $x_{\text{new}}[n]$ é π/L.

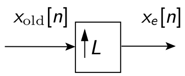


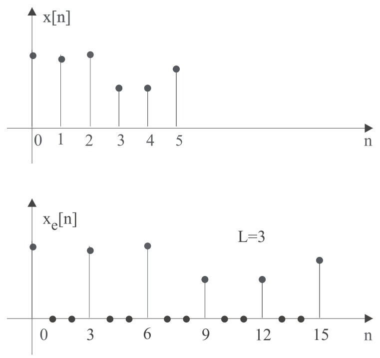
Interpolação Puramente Digital

Faça amostras intermediárias = 0.

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

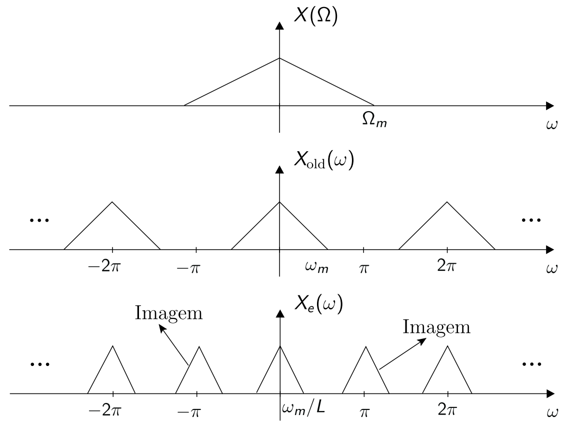
Representação:





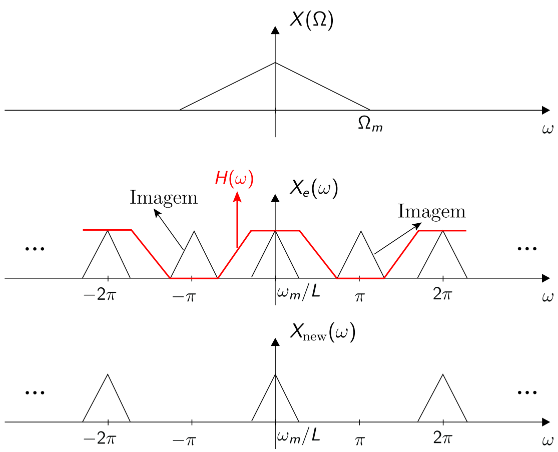
Interpolação Puramente Digital no Domínio da Freqüência

$$X_e(\omega) = X_{\text{old}}(\omega L)$$



Interpolação Puramente Digital

Filtro passa-baixas elimina imagens



Prova da Relação em Freqüência e Interpolação

$$X_e(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] e^{j\omega n}$$

Como $x_e[n] = 0$ se $n \neq Lk$

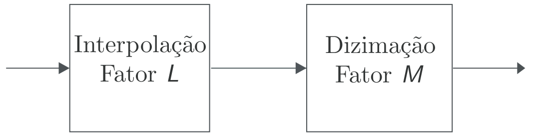
$$X_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e[Lk] e^{j\omega Lk}$$

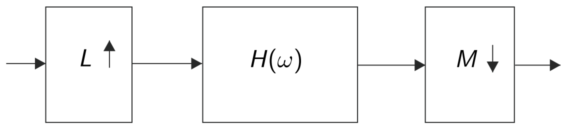
Mas $x_e[Lk] = x_{\text{old}}[k]$

$$X_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{\text{old}}[k] e^{j\omega Lk}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_e(\omega) = X_{\text{old}}(L\omega)}$$

Alteração por L/M



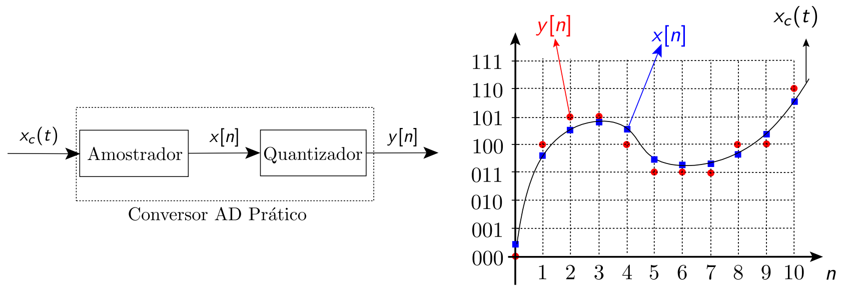


Detalhes

- Se dizimar antes, pode ocorrer *alias* desnecessariamente.
- Freqüência de corte do filtro:
  - $\omega_c < \pi/L$ para eliminar imagens
  - $|\omega_c < \pi/M$ para evitar *alias*

Quantização

Saída de um conversor AD prático são seqüências de bits.
Cada grupo de bits aproxima um valor do sinal analógico.

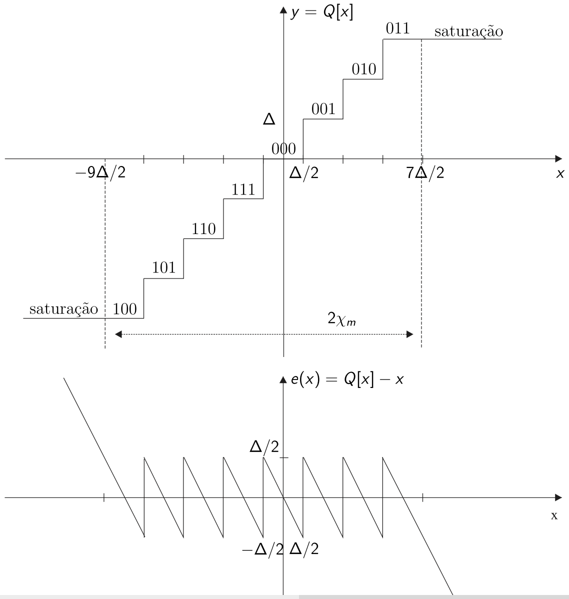


$y[n]$: discreto no tempo e em amplitude

Exemplo de quantizador

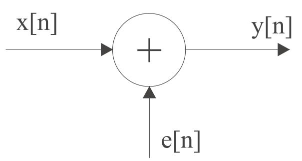
- $B + 1 = 3$ bits
- Δ: Passo de quantização
- χ_m: Fundo de escala

$$\boxed{\Delta = \frac{2\chi_m}{2^{B+1}}}$$



Análise do erro de quantização

Modela erro de quantização como ruído:



Hipóteses:

- $e[n]$ é estacionário;
- $e[n]$ e $x[n]$ são descorrelacionados;
- $e[n]$ tem função densidade de probabilidade uniforme no intervalo $-\Delta/2$ a $\Delta/2$.

Análise do erro de quantização

Energia do Ruído

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p_e(e)\,\mathrm{d}e \\ &= \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{2\chi_m}{2^{B+1}}\right)^2\end{aligned}$$

Relação Sinal-Ruído

$$\begin{aligned}\mathrm{SNR} &= 10\log\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) \\ &= 6,02B + 10,8 - 20\log\left(\frac{\chi_m}{\sigma_x}\right)\end{aligned}$$