

Objetivos:

Compreender aliasing.

Determinar o efeito da amostragem e da reconstrução sobre frequências

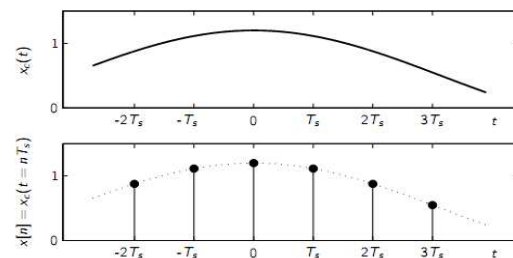
Especificar filtros antes de AP e depois da DA



AD ou ADC:

conversor
analógico-digital

- $x[n] = x_c(nT_s)$
- T_s : Período de amostragem.
- Como relacionar $X(\omega)$ com $X_c(\Omega)$?



Fonte: Sanjiv Mahajan

<http://web.mit.edu/6.003/F07/www/recitations/recitations.pdf>

Perco informação?

Tenho que fazer hipóteses sobre variação de $x(t)$ entre amostras

Variação $\Rightarrow$ frequência $\Rightarrow$ hipótese sobre conteúdo de frequência de $x(t)$.

Exemplo: $x(t) = \cos(t)$



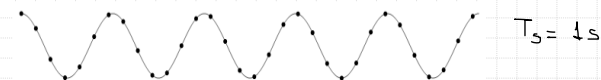
Pergunta: Qual a unidade do erro x ?

a) Segundo

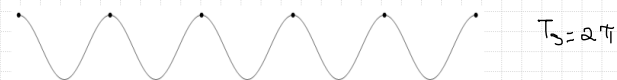
b) Amostra

c) Nada

d) Hz



Ainda recupero se assumir que maior frequência é $\omega = 1 \text{ rad/s}$



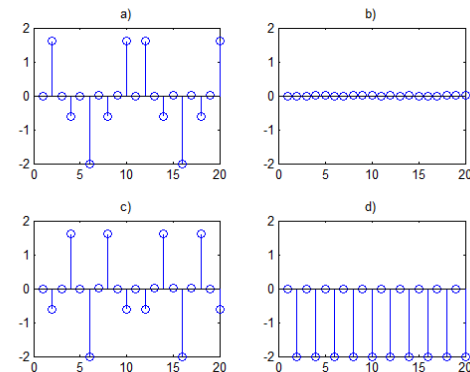
Pergunta: Quais frequências menor que 1 podem gerar o sinal acima?

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1
d) 0 ou $\frac{1}{2}$ e) 0 ou 1



Problema: Vendo de outro ponto de vista.

Seja $x(t) = \cos(2\pi t) - \cos(2\pi \times 6t)$ e
 $x[n] = x(nT_s)$ com $T_s = 0,25$. Esboce $x[n]$



No futuro, escolher valores para dar seno de π , $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/4$, etc.

Caso geral:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{j\omega_1 t} & x_2(t) &= e^{j\omega_2 t} & \omega_2 &= \omega_1 + 2\pi k f_s \\ \Rightarrow x_1[n] &= x_1(nT_s) = e^{j\omega_1 nT_s} \\ x_2[n] &= e^{j\omega_2 nT_s} = e^{j(\omega_1 + 2\pi k f_s)nT_s} = e^{j\omega_1 nT_s} e^{j2\pi k n} \stackrel{!}{=} e^{j\omega_1 nT_s} \\ &= x_1[n] \end{aligned}$$

Lembrete: $\omega = 2\pi f$, ω em rad/s e f em Hz = $1/s$

Conclusão: frequências separadas de $f_s = 1/T_s$ são indistinguíveis após a amostragem

Videos de efecto estroboscópico.

https://www.youtube.com/watch?v=uENITui5_jU https://www.youtube.com/watch?v=rVSh-au_9aM

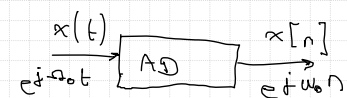
Relacionando as frequências

$$S_{ejd} x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

Pergunta: Qual a unidade de w ?

a) rad/s b) Hz c) rad

d) rad / amostra



Notação:

Ω : freq. analogica
 ω : freq. discreta

$$x[n] = x(nT_s) = e^{j\Omega_0 n T_s} \Rightarrow \omega_0 = \Omega_0 T_s = \Omega_0 / f_s$$

Casos particulares:

1) $f = 0 \Rightarrow \omega = 2\pi f T_s = 0$

2) $f = \frac{f_s}{2} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{f_s}{2} T_s = \pi$

3) $f = f_s \Rightarrow \omega = 2\pi f_s T_s = 2\pi$

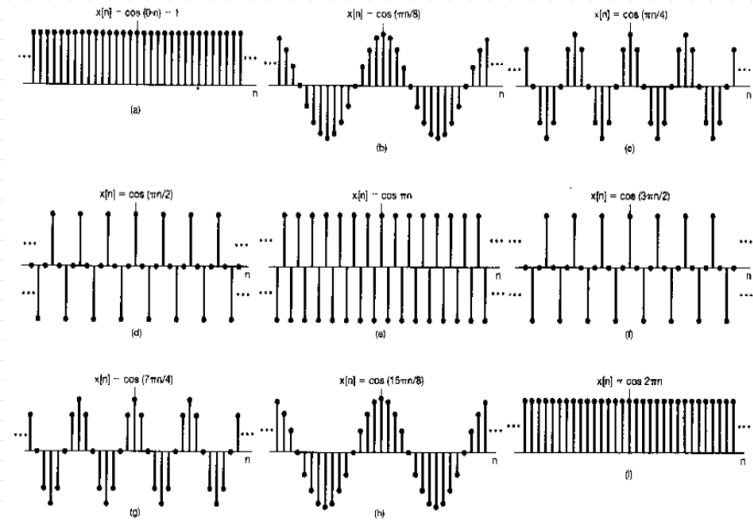
4) f_1 e f_2 separados de $f_s \Rightarrow f_2 = f_1 + f_s$

$$\Rightarrow \omega_2 = 2\pi f_2 T_s = 2\pi (f_1 + f_s) T_s = 2\pi f_1 T_s + 2\pi = \omega_1 + 2\pi$$

$$\Rightarrow \omega_1 \text{ e } \omega_2 \text{ separados de } 2\pi$$

Conclusão: como maior frequência digital é π (ver próxima página), maior freq. que eu posso representar é $f_s/2$. Por exemplo, $\pm f_s$ se confunde com $-f_s/2$.

Gerar figura mostrando que um mesmo sinal amostrado a taxas diferentes gera freqs digitais diferentes, e que o gráfico do sinal amostrado não tem que ajustar a distância entre amostras para casar com o sinal analógico original.



Exemplo de sinais se misturando:

$$x(t) = e^{j2\pi 440t} + 2e^{j2\pi 44590t}$$

$$f_s = 44100 \text{ Hz} \Rightarrow T_s = 1/44100 \text{ s}$$

$$x[n] = x(nT_s)$$

$$= e^{j2\pi \frac{440}{44100}n} + 2e^{j2\pi \frac{44590}{44100}n}$$

$$= e^{j2\pi 0,01n} + 2e^{j2\pi (1,01)n}$$

$$= 3e^{j2\pi 0,01n}$$

E para um sinal $x(t)$ geral?

Sei que $x[n]$ é combinação de exponenciais

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

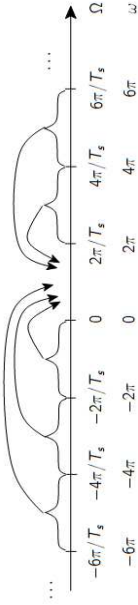
$X(e^{j\omega})$: magnitude e fase com que $e^{j\omega}$ aparece na composição de $x[n]$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$X(j\Omega)$: magnitude e fase com que $e^{j\Omega t}$ aparece na composição de $x(t)$



Considere um ω fixo. O que aparece aí vem de $\frac{\omega}{T_s}, \frac{\omega + 2\pi}{T_s}, \dots$



$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\omega + 2k\pi}{T_s}\right)\right)$$

Termo $1/T_s$ mais difícil de explicar intuitivamente
Problema:

O sinal abaixo será amostrado a 7 kHz. Quais frequências serão afetadas por aliasing?

