Objetivos: entender intuitivamente algumas propriedades da transformada Z, através de exemplos

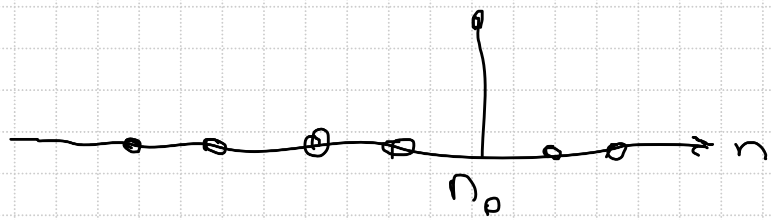
Por que propriedades?

- Permitem calcular transformadas de vários sinais a partir de outros.
- Usadas na análise e implementação de sistemas
- Aplicações como modulação, mudança de taxa de amostragem, projeto de filtros, etc.

Lembrando: $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$

Problema:

Problema: Seja $h[n] = \delta[n-n_0]$ como mostrado abaixo



$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Determine $H(z)$

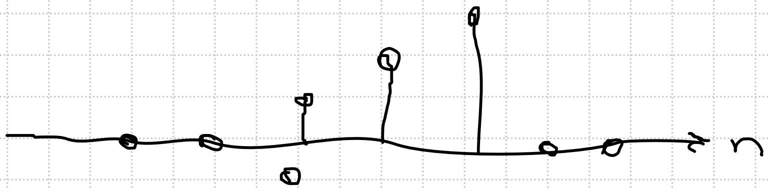
Solução:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \cdots h[-1] z + h[0] + h[1] z^{-1} + \cdots$$

$$= z^{-n_0}$$

único termo não nulo é $h[n_0] = 1$

Problema: Seja $h[n]$ como mostrado abaixo



$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esboce o sinal $g[n]$ com $G(z) = H(z^{-1})$.

Solução: $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

Nota: outra forma de obter $H(z)$:

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

Mas $\mathcal{Z}\{\delta[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0}$

$$\Rightarrow H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

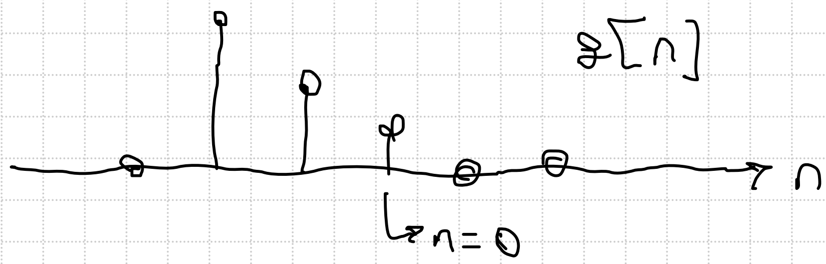
Voltando ao exercício, $G(z) = H(z^{-1}) = 1 + 2z + 3z^2$

Mas $G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] z^{-n} = \dots + g[-2] z^2 + g[-1] z + g[0] z^0 + \dots$

Fato: para dois polinômios serem iguais, eles devem ser iguais em todos os coeficientes

$\Rightarrow$ Como $G(z) = 1 + 2z + 3z^2$, concluo que $g[1] = 0$, pois esse é o coeficiente de z^{-1}.

$$g[n] = \begin{cases} 3, & n = -2 \\ 2, & n = -1 \\ 1, & n = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Caso geral: Se $G(z) = H(z^{-1})$, $g[n] = h[-n]$

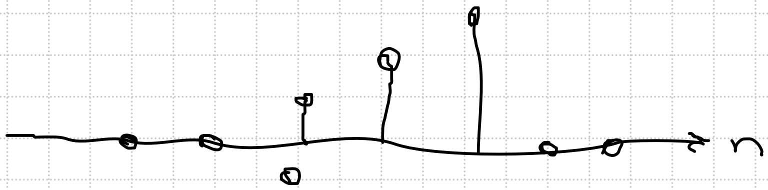
Espelhamento

$$G(z) = H(z^{-1}) = \sum h[n] (z^{-1})^{-n} = \sum h[n] z^{n}$$

$$\parallel \quad m = -n$$

$$G(z) = \sum g[n] z^{-n} \qquad \sum h[-m] z^{-m}$$

Problema: Seja $h[n]$ como mostrado abaixo

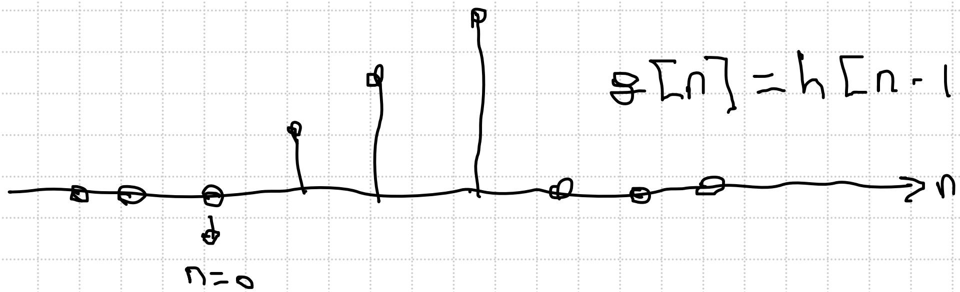


$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Esboce o sinal $g[n]$ com $G(z) = z^{-1} H(z)$

Solução: $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \Rightarrow G(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$

$$\Rightarrow g[n] = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \\ 3, & n=3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



$g[n] = h[n-1]$

Caso geral: $G(z) = z^{-n_0} H(z) \Rightarrow g[n] = h[n-n_0]$

$$G(z) = z^{-n_0} H(z) = z^{-n_0} \sum h[n] z^{-n} = \sum h[n] z^{-(n+n_0)}$$

$$\overset{m=n+n_0}{=} \sum h[m-n_0] z^{-m} \overset{n=m}{=} \sum \underbrace{h[n-n_0]}_{g[n]} z^{-n}$$

Imagine um sistema com resposta ao impulso

$h[n] = \delta[n-n_0]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n-n_0] = x[n] * \delta[n-n_0]$$

Interpretação desse resultado.

Seja $h[n] = \delta[n]$

comutatividade

$x[n] \longrightarrow \boxed{\delta[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n]$

$\delta[n] \longrightarrow \boxed{x[n]} \longrightarrow y[n] = x[n]$ por definição de resposta ao impulso

$\Downarrow$ por invariância no tempo

$\delta[n-n_0] \longrightarrow \boxed{x[n]} \longrightarrow x[n-n_0]$

$\Rightarrow x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$

Voltando à propriedade de

Autofunção

$$z_0^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow H(z_0)\, z_0^n$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\delta[n-n_0]} \rightarrow x[n-n_0]$$

$$z_0^n \rightarrow \boxed{\delta[n-n_0]} \rightarrow z_0^{n-n_0} = z_0^{-n_0}\, z_0^n$$

$$= H(z_0)\, z_0^n$$

$$\Rightarrow H(z_0) = z_0^{-n_0}$$

Propriedade da convolução:

$$\mathcal{Z}\{x[n] * y[n]\} = X(z)\,Y(z)$$

Aplicação quando $x[n] = z_0^n$ (autofunção)

Lembrando: $x[n] = \dfrac{1}{2\pi j} \oint \dfrac{X(z)}{z} z^n \, dz$

onde o contorno é formado com $z = re^{j\theta}$, $r \in ROC$

$$x[n] = z_0^n \Rightarrow X(z) = 2\pi j\, z_0\, \delta(z - z_0)$$

pois $z_0^n = \dfrac{1}{2\pi j} \oint \dfrac{2\pi j\, z_0\, \delta(z - z_0)}{z} z^n \, dz$

$$= z_0 \oint \frac{\delta(z - z_0)}{z} z^n \, dz = z_0 \frac{z_0^n}{z_0} = z_0^n$$

Assim, se $x[n] = z_0^n$,

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z)\, 2\pi j\, z_0\, \delta(z - z_0)$$

$$= H(z_0)\, 2\pi j\, z_0\, \delta(z - z_0)$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z_0)\, 2\pi j\, z_0\, \delta(z - z_0)\}$$

$$= H(z_0)\, \mathcal{Z}^{-1}\{2\pi j\, z_0\, \delta(z - z_0)\}$$

$$= H(z_0)\, z_0^n$$

Chegando à propriedade da convolução usando autofunções.

$$\alpha_0 z_0^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow \alpha_0 H(z_0) z_0^n \qquad \alpha_1 z_1^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow \alpha_1 H(z_1) z_1^n$$

$$\alpha_0 z_0^n + \alpha_1 z_1^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \alpha_0 H(z_0) z_0^n + \alpha_1 H(z_1) z_1^n$$

$$\sum_k \alpha_k z_k^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \sum \alpha_k H(z_k) z_k^n$$

Para qualquer $x[n]$ que possa ser escrito como combinação de autofunções, calcular saída é fácil, basta conhecer $H(z)$.

Mas eu posso escrever qualquer sinal como combinação de autofunções:

$$x[n] = \oint \frac{X(z)}{2\pi j \, z} z^n dz$$

autofunção

α, peso com que z^n aparece em $x[n]$

Qual a resposta a $x[n]$?

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = ?$$

Cada termo $\frac{X(z)}{2\pi j z} z^n$, para cada um dos valores de z, produz na saída $\frac{X(z)}{2\pi j z} H(z) z^n$.

Combino esses termos para criar $y[n]$ da mesma forma que combino para criar $x[n]$

$$\left.\begin{aligned} y[n] &= \oint \frac{X(z)H(z)}{2\pi j z} z^n \, dz \\ &= \oint \frac{Y(z)}{2\pi j z} z^n \, dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$