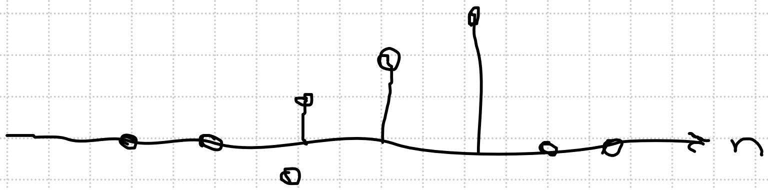
Objetivos: entender intuitivamente algumas propriedades da transformada Z, através de exemplos

Por que propriedades?

- Permitem calcular transformadas de vários sinais a partir de outros.
- Usadas na análise e implementação de sistemas
- Aplicações como modulação, mudança de taxa de amostragem, projeto de filtros, etc.

Lembrando: $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$

Problema: Seja $h[n]$ como mostrado abaixo



$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esboce o sinal $g[n]$ com $G(z) = H(z^{-1})$.

Solução: $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

Nota: outra forma de obter $H(z)$:

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

Mas $\mathcal{Z}\{\delta[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0}$

$$\Rightarrow H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

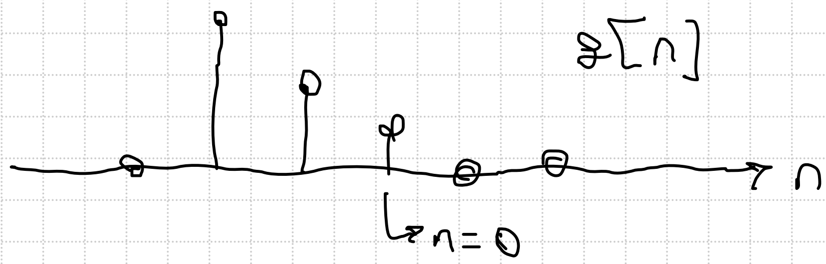
Voltando ao exercício, $G(z) = H(z^{-1}) = 1 + 2z + 3z^2$

Mas $G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] z^{-n} = \dots + g[-2] z^2 + g[-1] z + g[0] z^0 + \dots$

Fato: para dois polinômios serem iguais, eles devem ser iguais em todos os coeficientes

$\Rightarrow$ Como $G(z) = 1 + 2z + 3z^2$, concluo que $g[1] = 0$, pois esse é o coeficiente de z^{-1}.

$$g[n] = \begin{cases} 3, & n = -2 \\ 2, & n = -1 \\ 1, & n = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Caso geral: Se $G(z) = H(z^{-1})$, $g[n] = h[-n]$

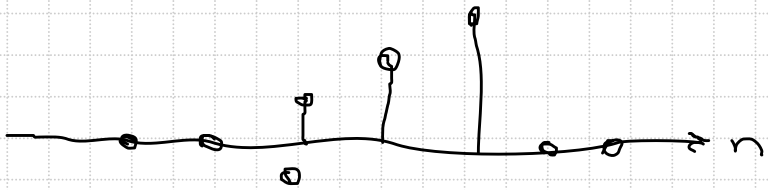
Espelhamento

$$G(z) = H(z^{-1}) = \sum h[n] (z^{-1})^{-n} = \sum h[n] z^{n}$$

$$\| \quad m = -n$$

$$G(z) = \sum g[n] z^{-n} \qquad\qquad \sum h[-m] z^{-m}$$

Problema: Seja $h[n]$ como mostrado abaixo

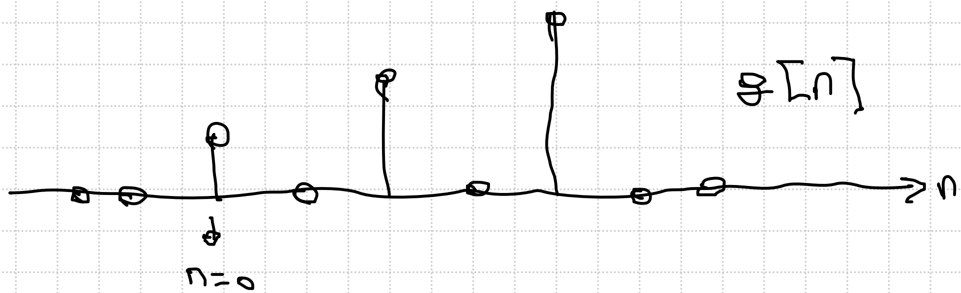


$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esboce o sinal $g[n]$ com $G(z) = H(z^2)$

Solução: $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \Rightarrow G(z) = 1 + 2z^{-2} + 3z^{-4}$

$$\Rightarrow g[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=2 \\ 3, & n=4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Caso geral: $G(z) = H(z^L) \Rightarrow$

$$g[n] = \begin{cases} h[n/L], & \text{se } n \text{ é múltiplo de } L \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

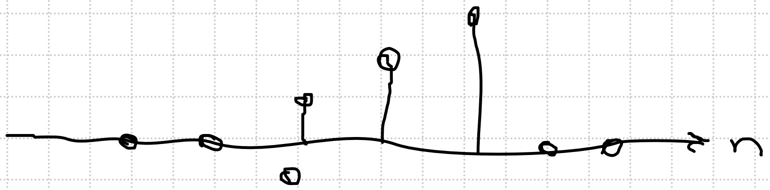
$$G(z) = H(z^L) = \sum h[n] (z^L)^{-n} = \sum h[n] z^{-Ln}$$

$$= \dots + h[-1] z^L + h[0] + h[1] z^{-L} + \dots$$

$$G(z) = \dots + g[-L] z + g[-L+1] z^{(L-1)} + \dots$$

Igualando termo a termo, temos o resultado

Problema: Seja $h[n]$ como mostrado abaixo



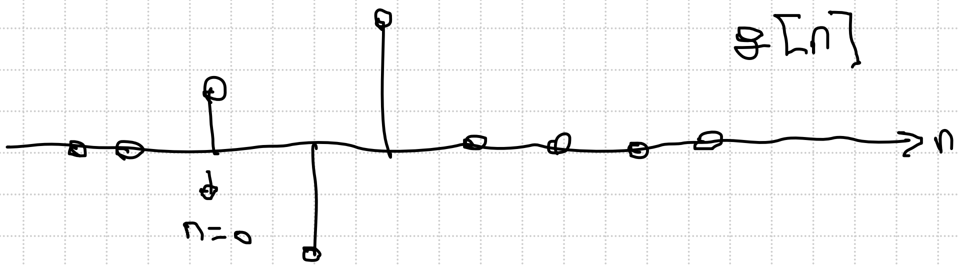
$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esboce o sinal $g[n]$ com $G(z) = H(-z)$

Solução: $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \Rightarrow G(z) = 1 + 2(-z)^{-1} + 3(-z)^{-2}$

$$\Rightarrow G(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$\Rightarrow g[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Caso geral: $G(z) = H(\alpha z) \Rightarrow g[n] = \alpha^{-n}\, h[n]$

(No exemplo, $\alpha = -1$)

$$G(z) = H(\alpha z) = \sum h[n]\,(\alpha z)^{-n} = \sum \underbrace{h[n]\,\alpha^{-n}}_{g[n]}\, z^{-n}$$

E daí?

1) $\alpha = e^{-j\omega_0} \Rightarrow G(z) = H(e^{-j\omega_0} z)$

$\Rightarrow$ Em frequência, usamos $z = e^{j\omega}$

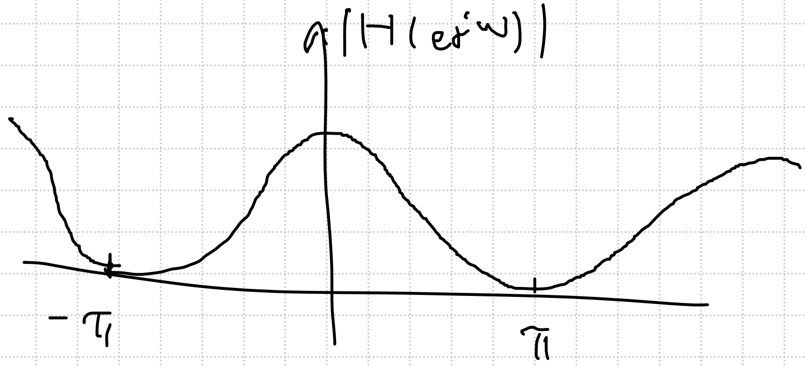
$$G(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega_0}\, e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Exemplo: se $\omega = 0 \Rightarrow G(e^{j0}) = H(e^{-j\omega_0})$

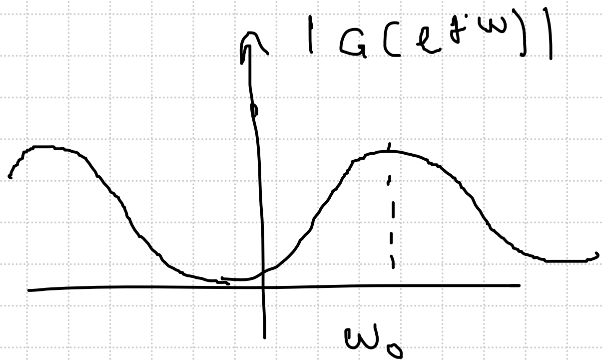
$\Rightarrow$ o que acontece em $\omega = 0$ para g é o que acontece em $\omega = -\omega_0$ para h

Exemplo: se $\omega = \omega_0$, $G(e^{j\omega_0}) = H(e^{j0})$

$\Rightarrow$ o que acontece em $\omega = 0$ para h é o que acontece em $\omega = \omega_0$ para g



$\Rightarrow$

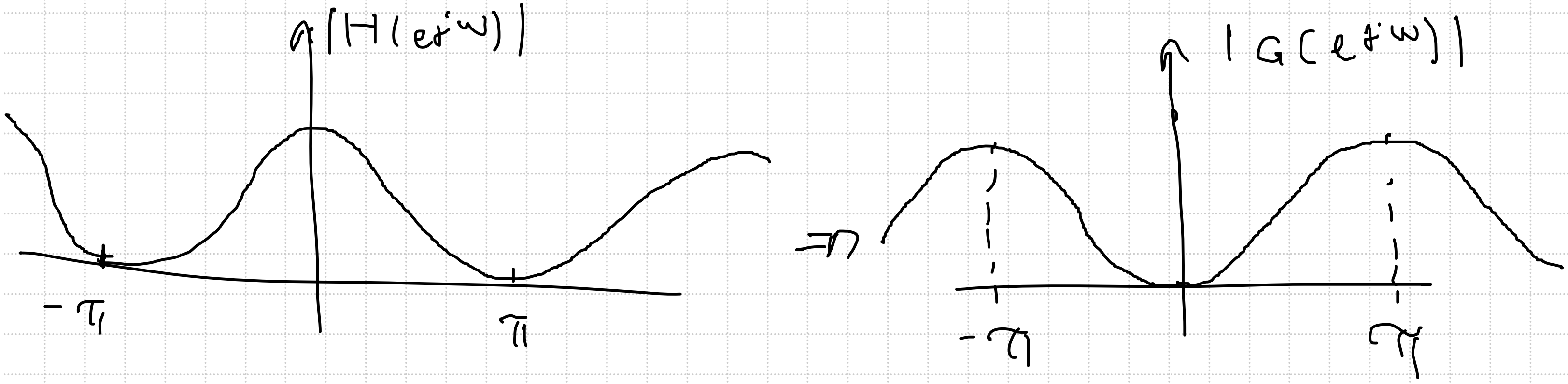


Propriedade é chamada de modulação.

Voltando ao exercício, $\alpha = -1 = e^{j\pi}$. Nesse caso,

$$G(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega - \pi)}) \Rightarrow \text{deslocamento de } \pi$$

$\Rightarrow$ transforma um filtro passa baixas em um passa-altas



Implementação