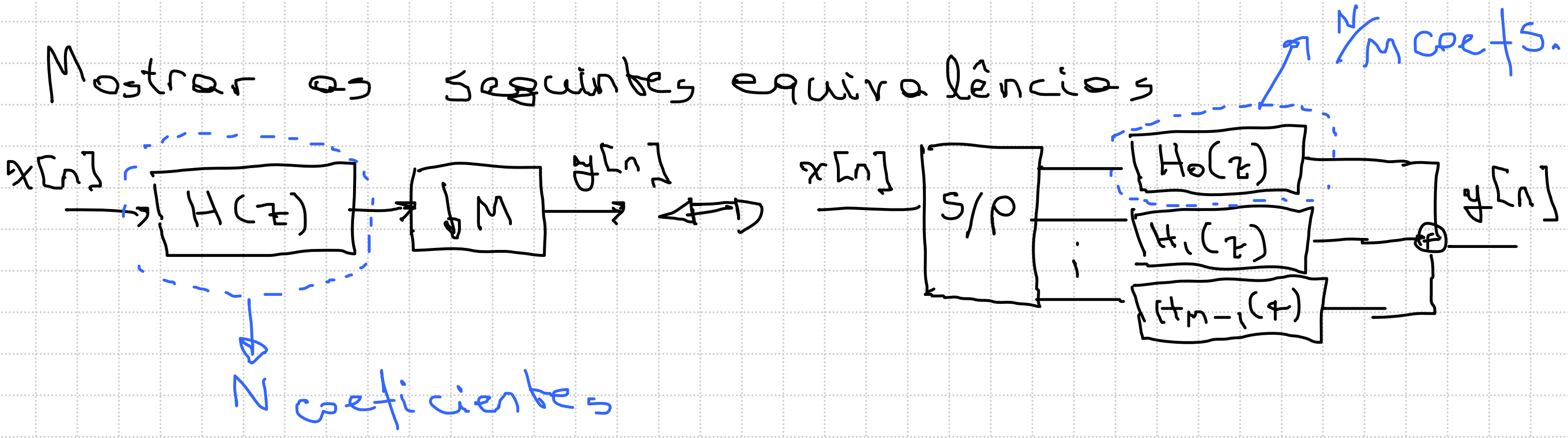
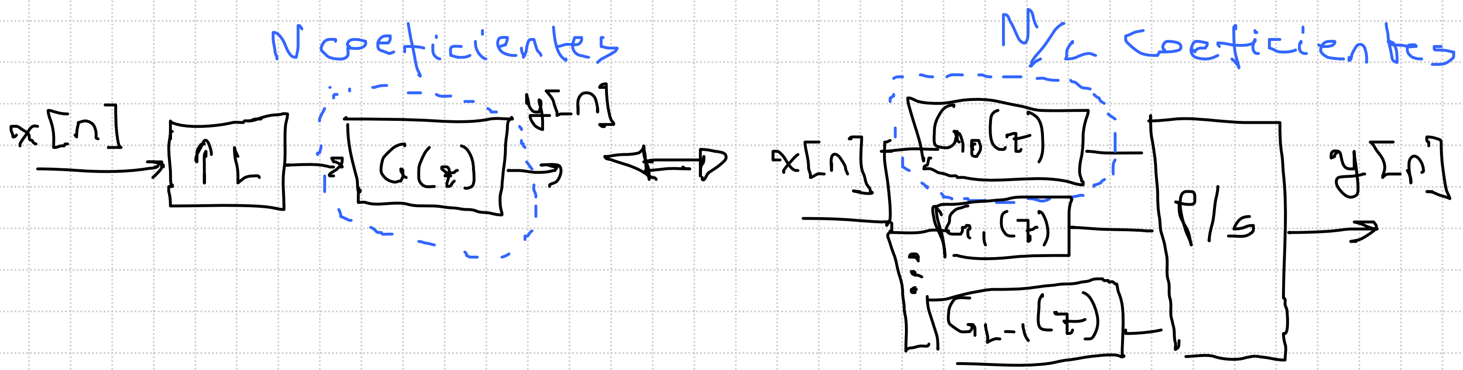
Objetivos:

Identidades nobres

Implementação eficiente de upsampling e downsampling

Mostrar as seguintes equivalências





Como determinar esses filtros?

De onde surgem mux/demux?

<u>Identidades nobres</u>

1) A simples: upsampling

↳ simples usando propriedades da transf. z

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow L} \xrightarrow{v_1[n]} \boxed{H(z^L)} \rightarrow y[n] \iff x[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \xrightarrow{v_2[n]} \boxed{\uparrow L} \rightarrow y[n]$$

$$Y(z) = H(z^L)V_1(z)$$

$$= H(z^L)X(z^L)$$

$$Y(z) = V_2(z^L)$$

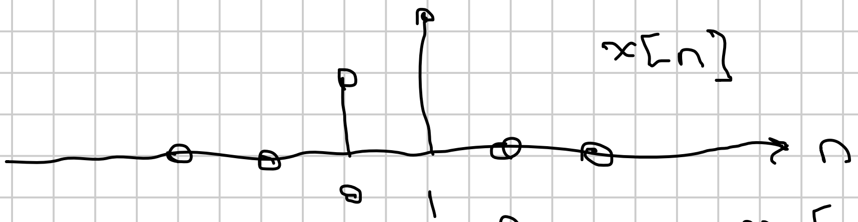
$$V_2(z) = X(z)H(z)$$

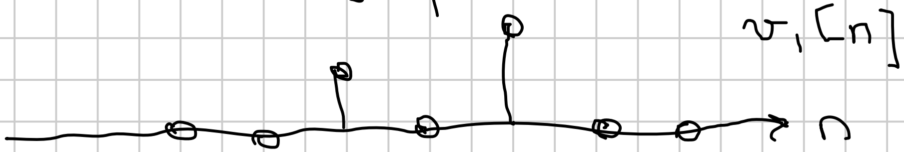
$$\Rightarrow Y(z) = X(z^L)H(z^L)$$

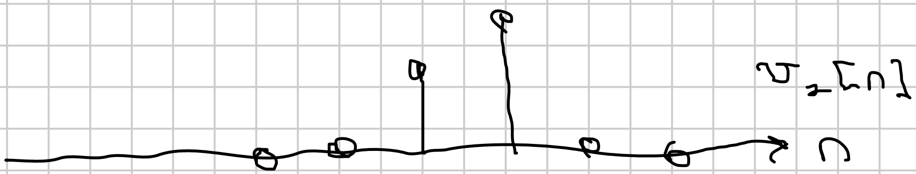
Exemplo: $H(z) = z^{-1}$ $\quad x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$ $\quad L = 2$

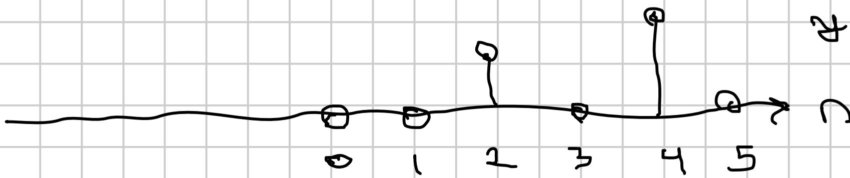
Esboce $v_1[n]$, $v_2[n]$ e $y[n]$

Solução:







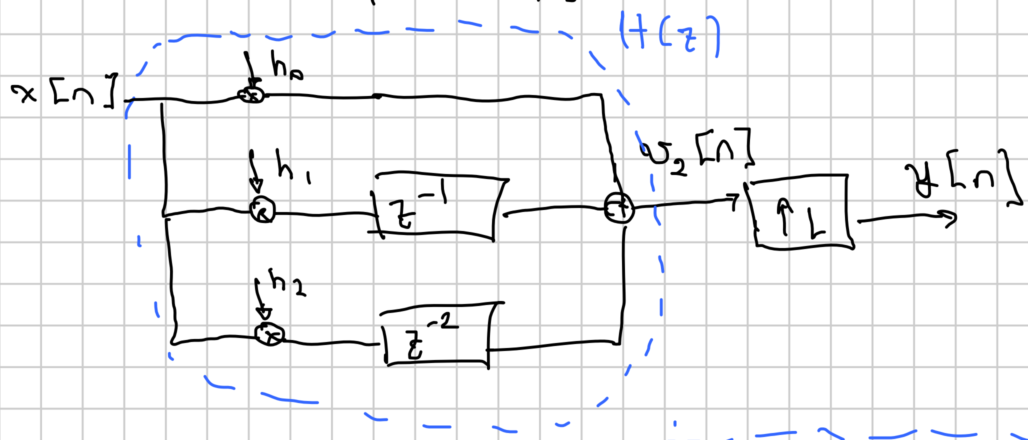


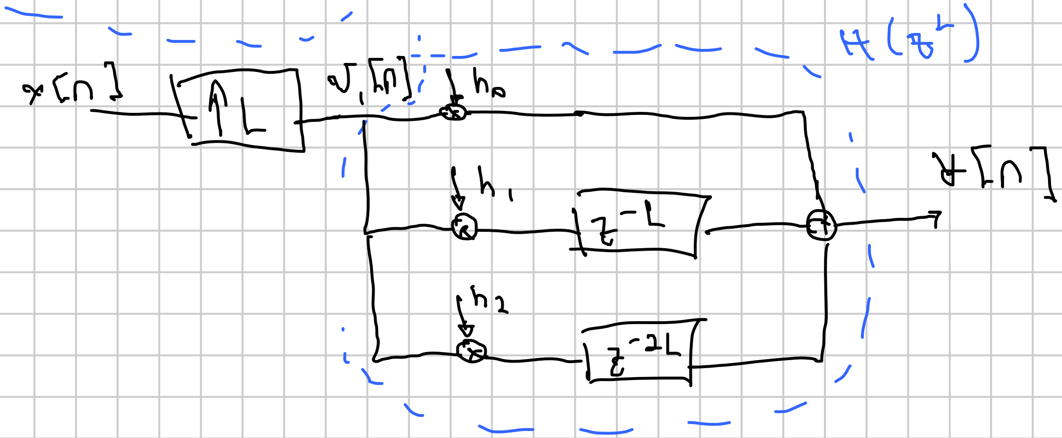
$y[n] = v_1[n-2]$

ou $v_2[n]$ com zeros no meio.

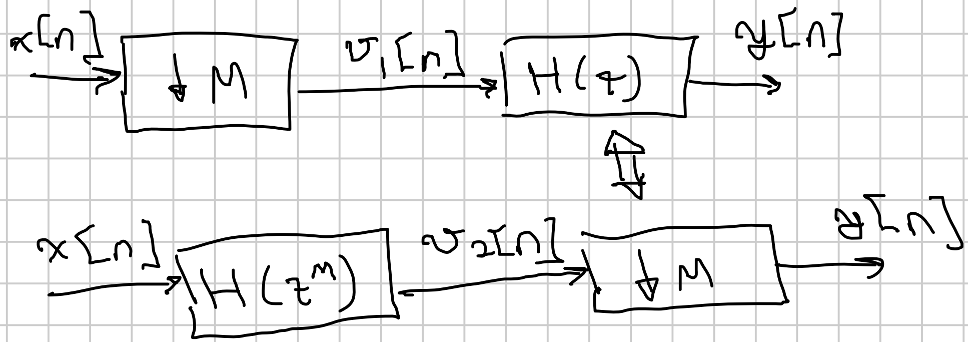
Identidade nobre é consequência desse exemplo pela linearidade das operações envolvidas

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$



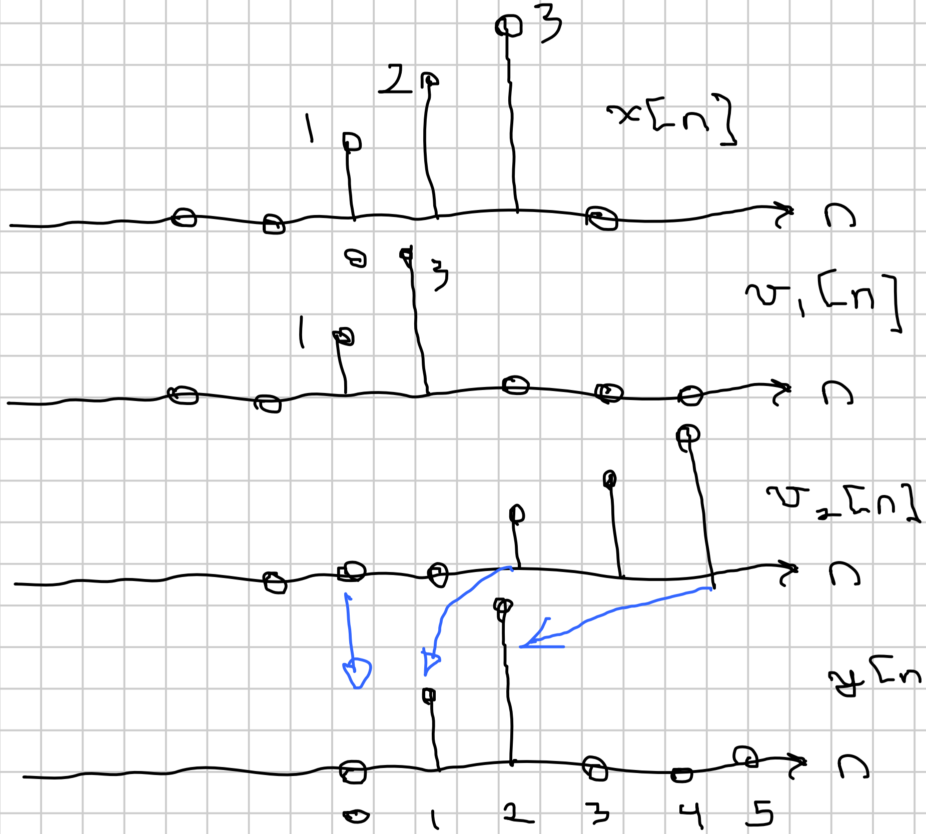


A complexa:



"Prova": Seja $H(z) = z^{-1}$ e $x[n]: \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$ $M = 2$

Esboce $v_1[n]$, $v_2[n]$ e $y[n]$



$v_2[n] = x[n-2]$

$y[n] = v_1[n-1]$

ou $v_2[2n]$

Como no caso do upsampling, esse resultado para $H(z) = z^{-1}$ pode ser estendido, usando a linearidade do downsampler, para qualquer filtro $H(z)$

Upsampling geral.

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow L} \rightarrow \boxed{G(z)} \rightarrow y[n]$$

elimina imagem, $G(z)$ é dado.

Identidade nobre:

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow L} \xrightarrow{v_1[n]} \boxed{H(z^L)} \rightarrow y[n] \iff x[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \xrightarrow{v_2[n]} \boxed{\uparrow L} \rightarrow y[n]$$

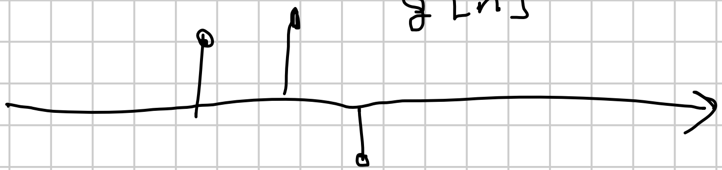
Para aplicar é só fazer $\boxed{\uparrow L}$ no final, preciso fazer aparecer termos como $G_0(z^L)$, para algum $G_0(z)$. Posso fazer $G_0(z) = G(z^L)$?

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow L} \rightarrow \boxed{G(z^L)} \rightarrow$$

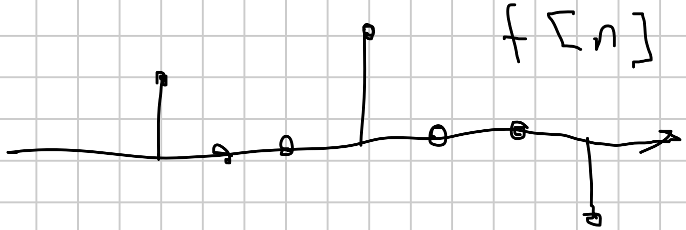
não faz o mesmo que $G(z)$

Duas formas de ver que $G(z)$ e $G(z^L) = F(z)$ não fazem a mesma coisa

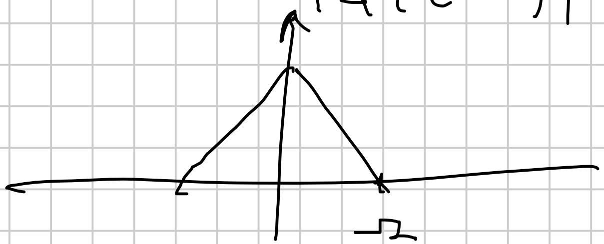
$g[n]$



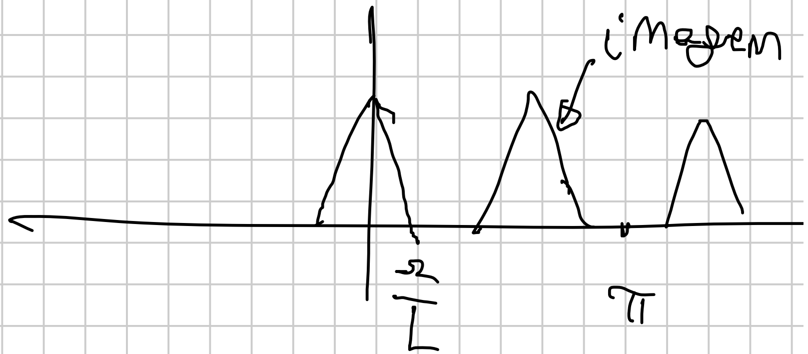
$f[n]$



$|G(e^{jw})|$

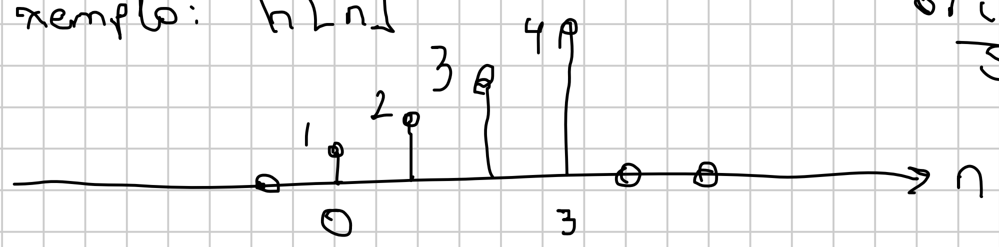


$|F(e^{jw})| = |G(e^{jwL})|$



E daí? Decomposição polifásica (M. Bellanger, orientador do Prof. João Marcos)

Exemplo: $h[n]$



$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \xrightarrow{v_1[n]} \boxed{\downarrow 2} \rightarrow y[n]$$

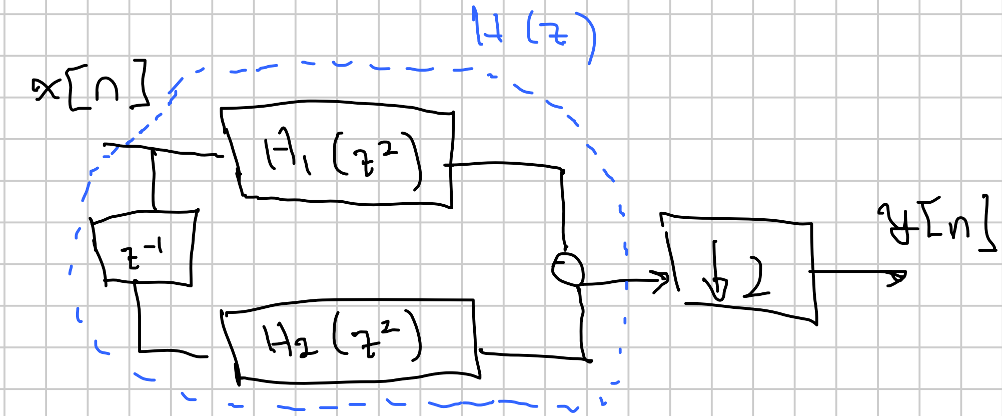
Quero fazer aparecer $G(z^2)$ para usar propriedades.

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$= \underbrace{1 + 3z^{-2}}_{\text{ok, só depende de } z^2} + \underbrace{2z^{-1} + 4z^{-3}}_{\text{não depende só de } z^2}$$

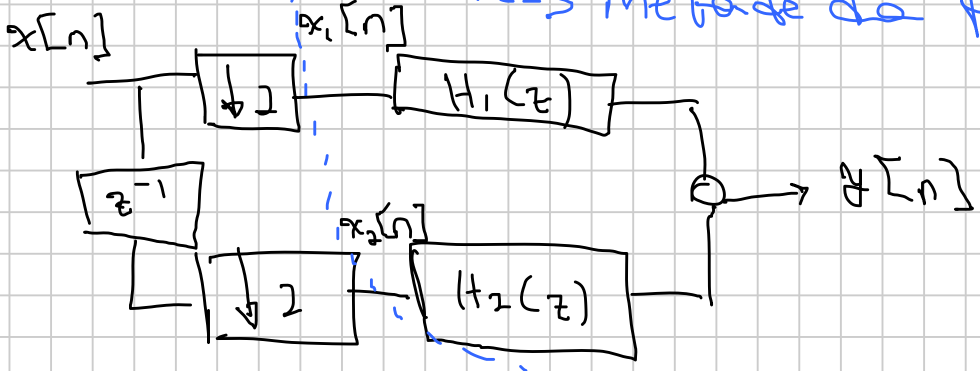
$$H(z) = 1 + 3z^{-2} + z^{-1}\left(2 + 4z^{-2}\right)$$

$$= H_1(z^2) + z^{-1}\, H_2(z^2)$$



$\Downarrow$

- - -> metade da taxa de x[n]



$H_1(z) = 1 + 3z^{-1}$

$H_2(z) = 2 + 4z^{-1}$

Ej. Se $h[n] = \begin{cases} n+1, & n = 0,1,2,3,4,5 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5}$$

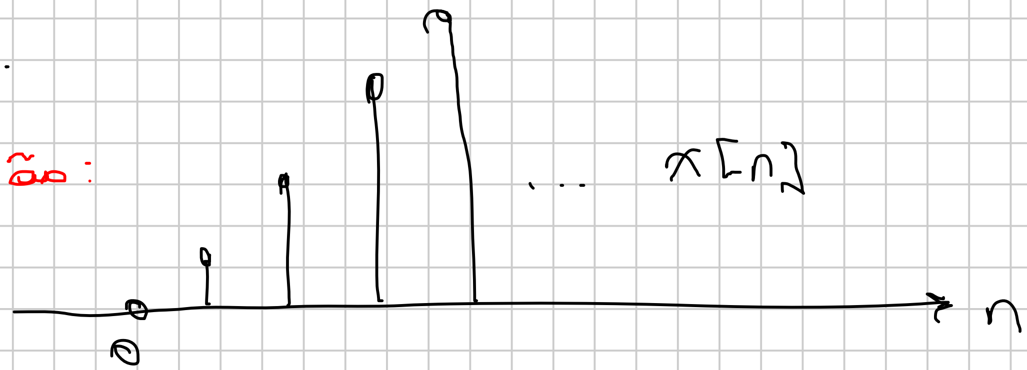
$$= 1 + 3z^{-2} + 5z^{-4} + z^{-1}(2 + 4z^{-2} + 6z^{-4})$$

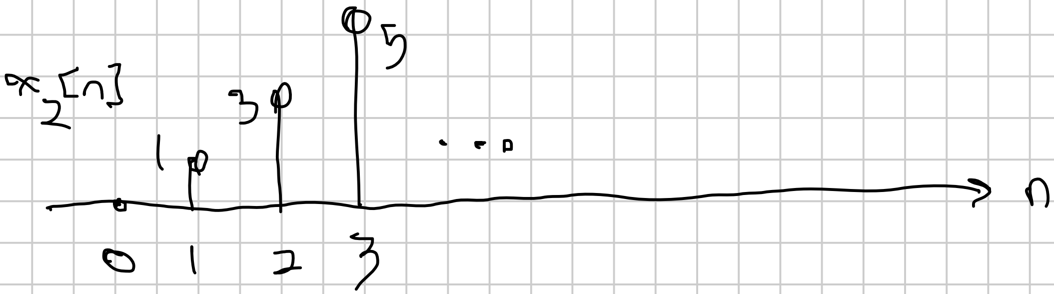
$$= H_0(z^2) + z^{-1} H_1(z^2)$$

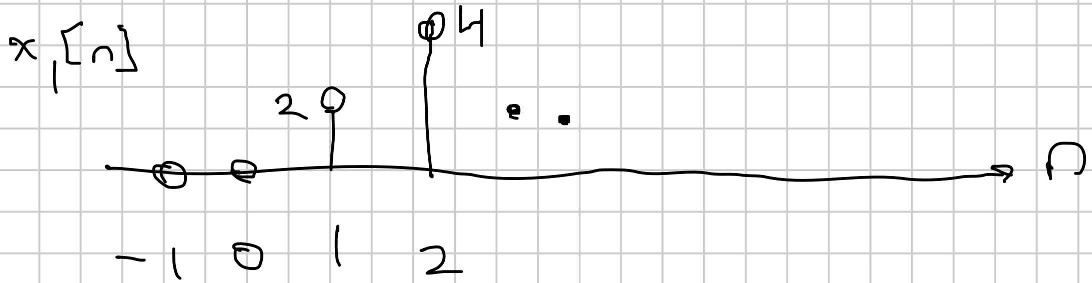
$$H_0(z) = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} \qquad H_1(z) = 2 + 4z^{-1} + 6z^{-2}$$

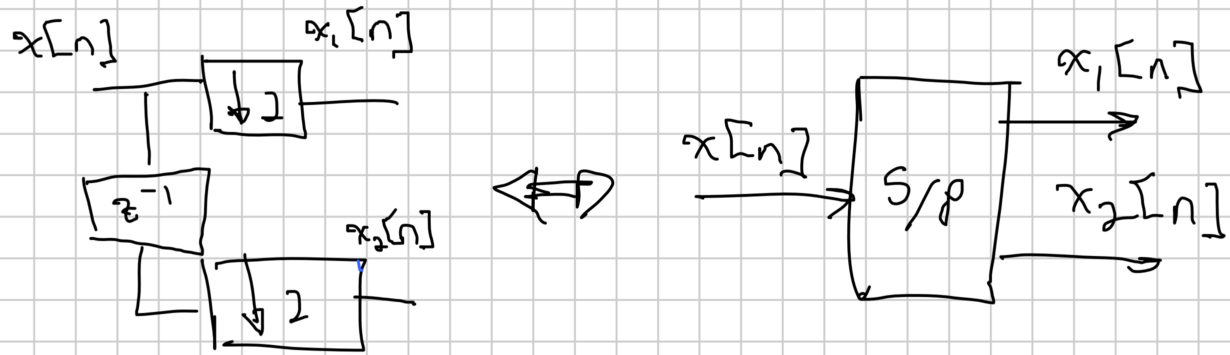
Problema: Se $x[n] = n\,u[n]$, esboce $x_1[n]$ e $x_2[n]$.

Solução:



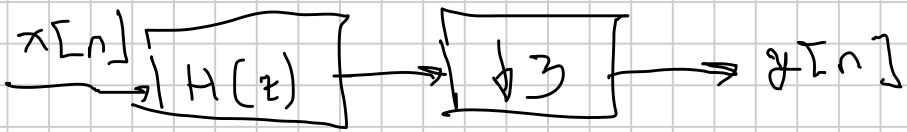






Problema:

h[n]



Pergunta:

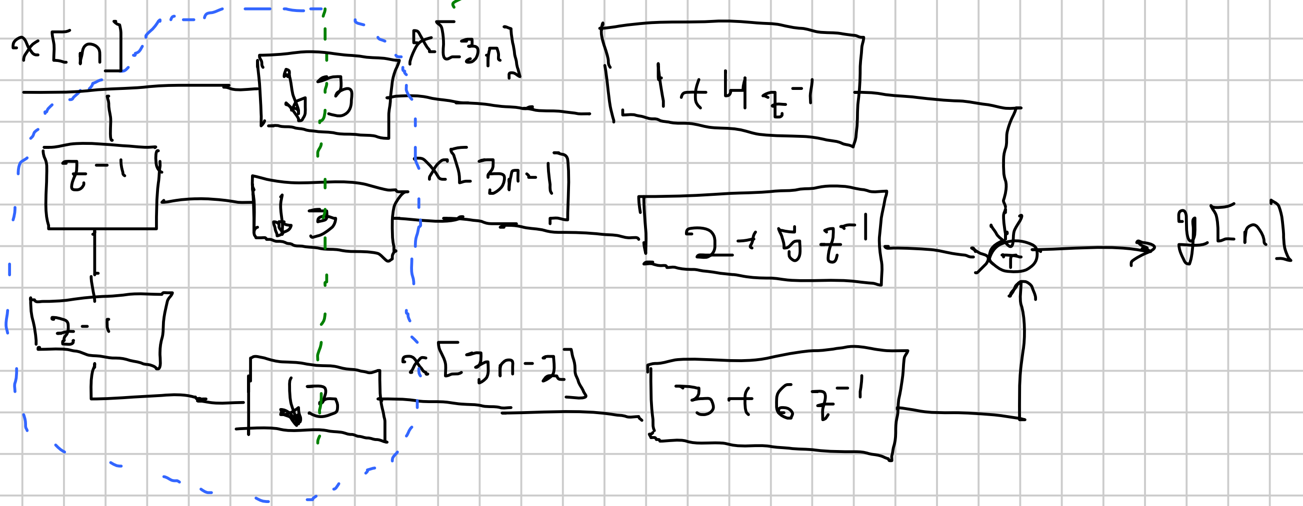
Em quantos filtros devemos particionar $h[n]$?
(Quantos componentes na decomposição polifásica?)

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Pergunta: Determine os filtros que devem ser usados na decomposição eficiente

Solução:

transição entre taxas diferentes.



Conversor série paralelo, ou chave comutativa