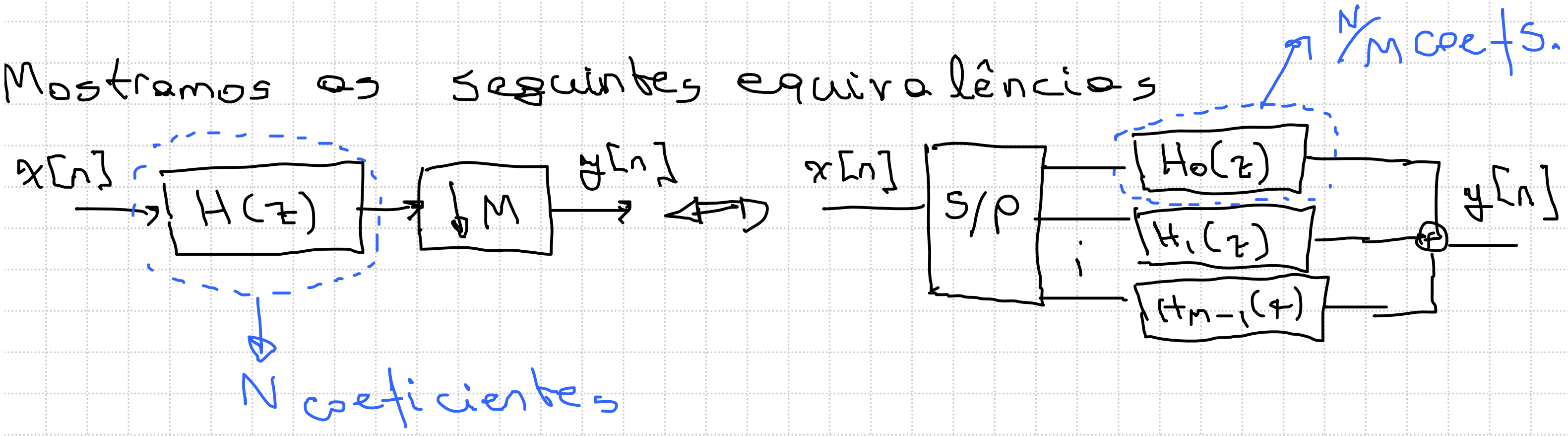
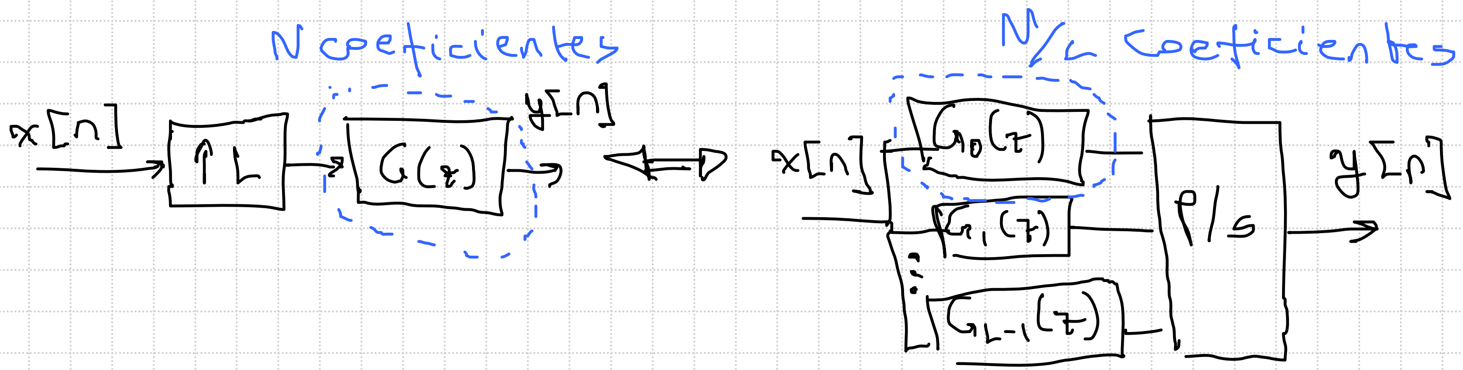
Objetivos:

- Relação entre a implementação eficiente de upsampling e downsampling e a transformada de Fourier.
- A DFT

Mostramos as seguintes equivalências

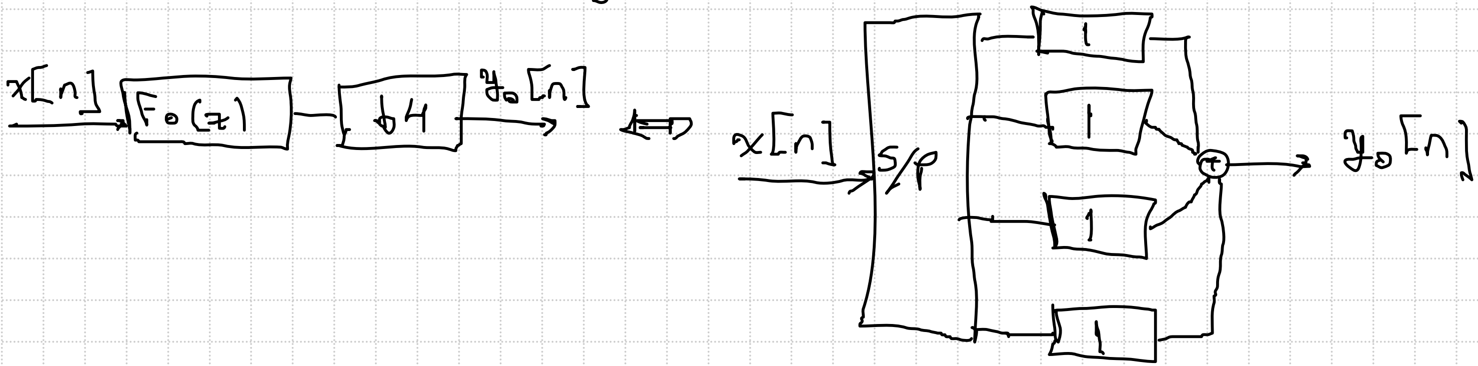




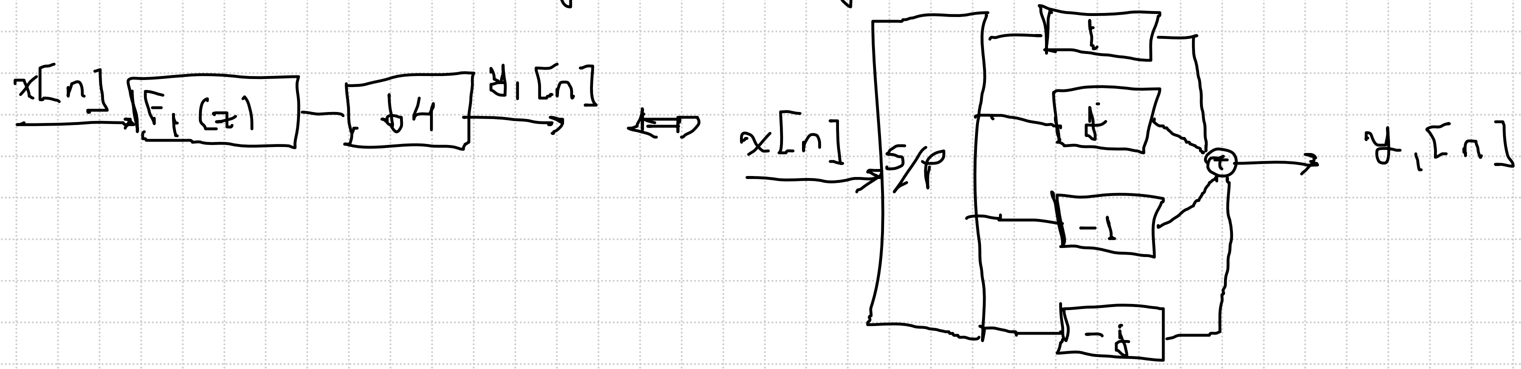
Exemplo: $M = 4$. Vamos usar 4 filtros anti-aliasing, que chamaremos $F_0(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, para não confundir com $H_0(z)$, $H_1(z)$, ... no lado direito da implementação eficiente.

Escolha dos filtros ficará clara adiante

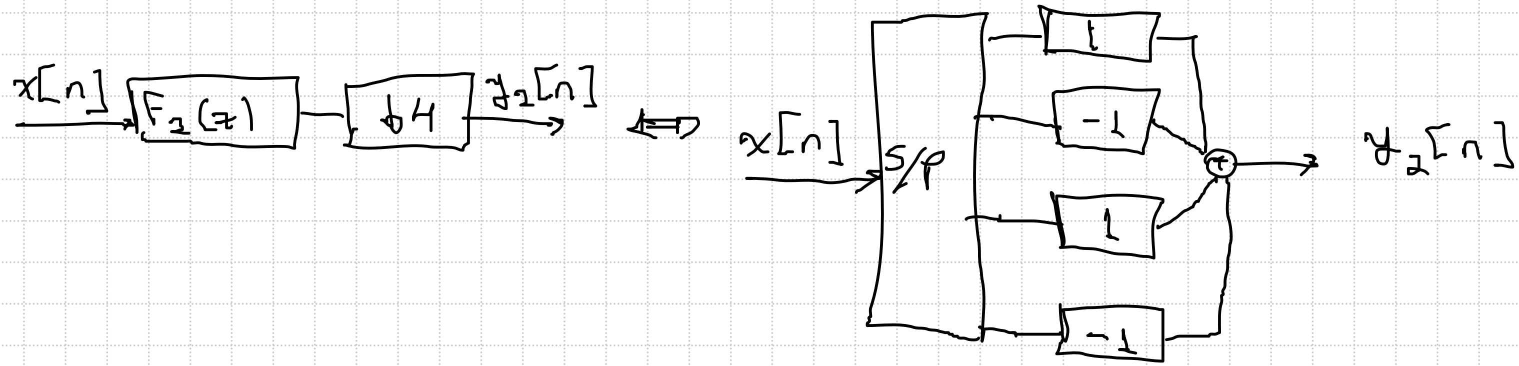
$$F_0(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$



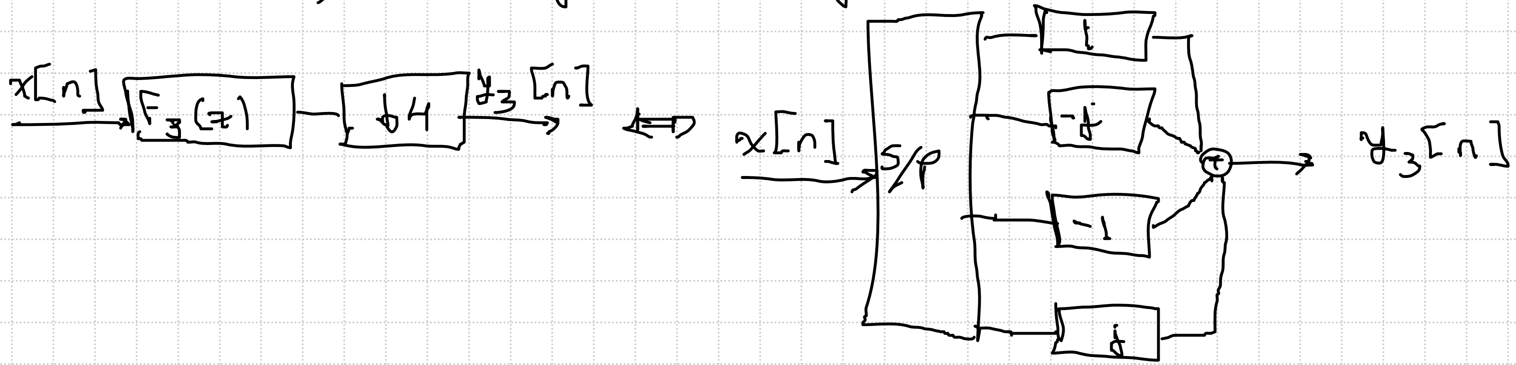
$$F_1(z) = 1 + j z^{-1} - z^{-2} - j z^{-3}$$



$$F_2(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}$$



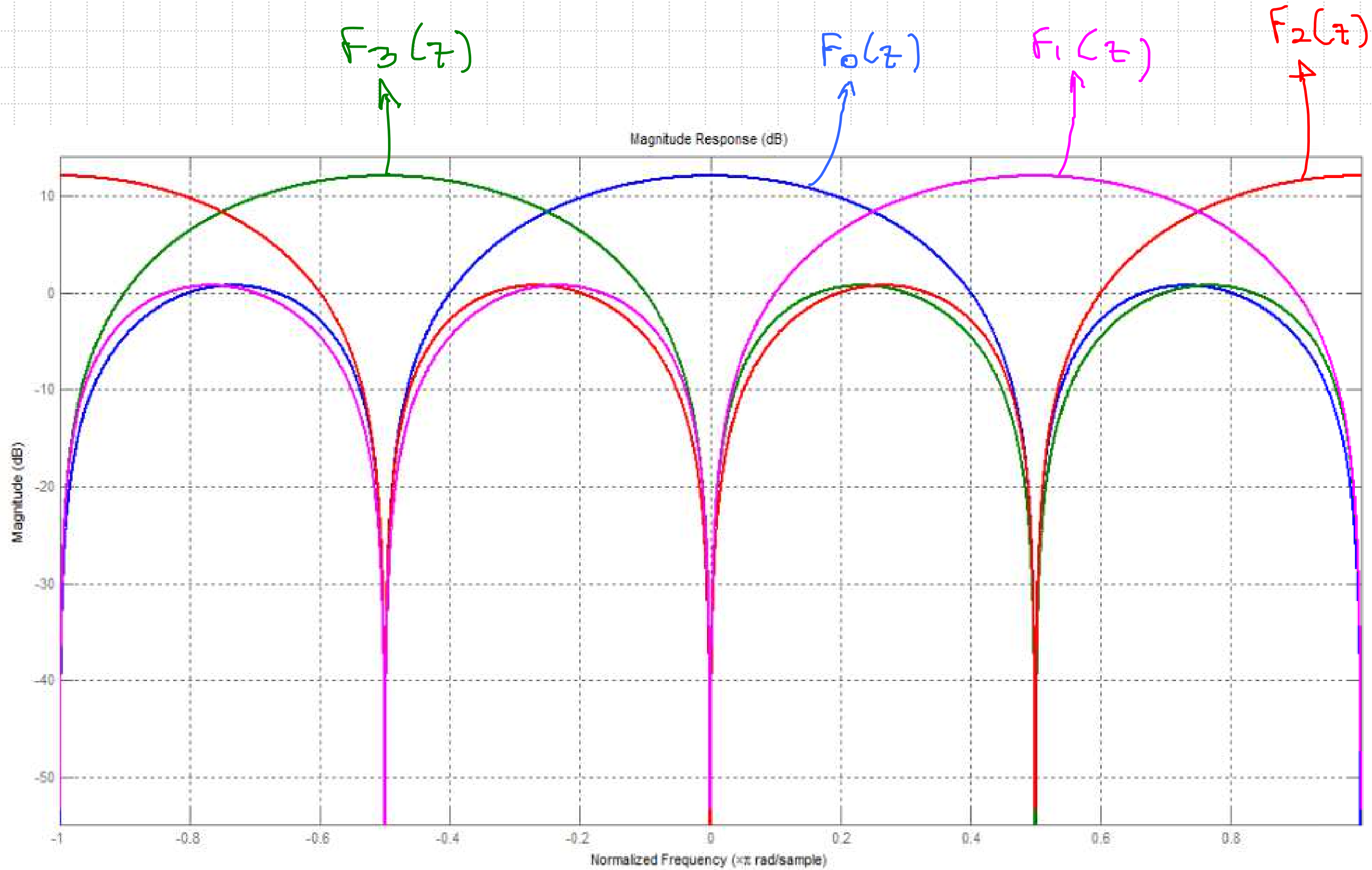
$$F_3(z) = 1 - j z^{-1} - z^{-2} + j z^{-3}$$



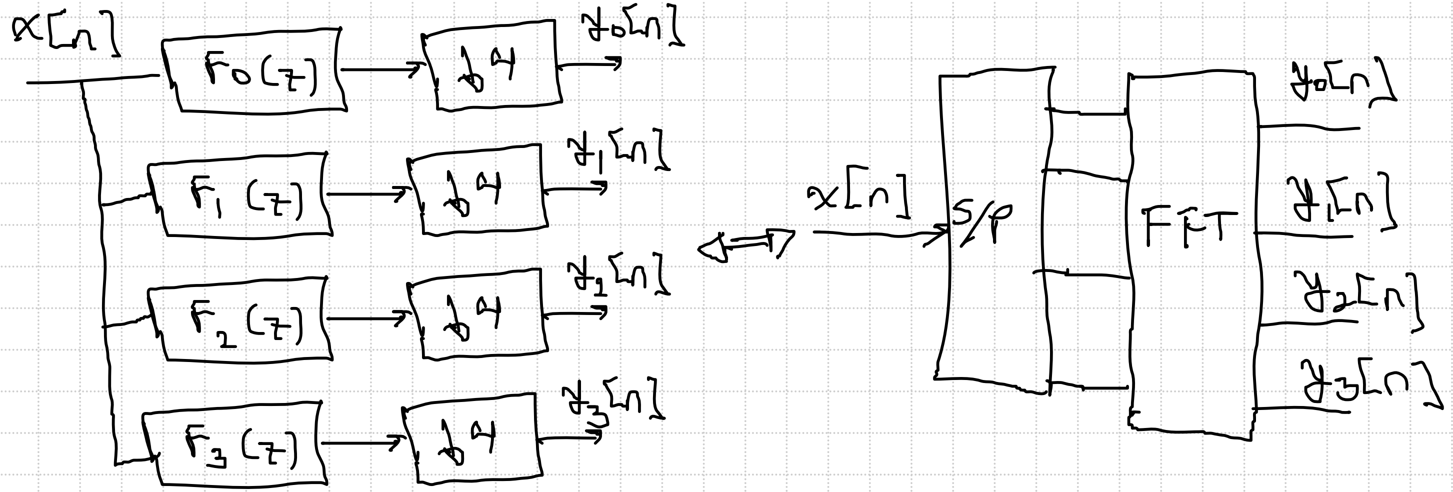
Notas:

- $f_1[n] = j^n f_0[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n} f_0[n] \Rightarrow F_1(e^{j\omega}) = F_0\left(e^{j\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$
- $f_2[n] = (-1)^n f_0[n] = e^{j\pi n} f_0[n] \Rightarrow F_2(e^{j\omega}) = F_0\left(e^{j(\omega - \pi)}\right)$
- $f_3[n] = (-j)^n f_0[n] = e^{-j\frac{\pi}{2}n} f_0[n] \Rightarrow F_3(e^{j\omega}) = F_0\left(e^{j\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)}\right)$

$$= F_0\left(e^{j\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right)}\right)$$


Magnitude Response (dB)
Magnitude (dB)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
Normalized Frequency (×π rad/sample)
F3(z)
F0(z)
F1(z)
F2(z)

Visão como banco de filtros



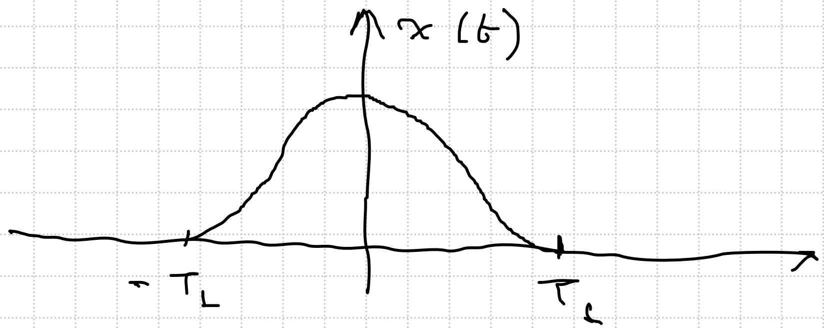
A transformada de Fourier discreta (DFT)

Motivações:

- Funciona para sinais de duração finita, caso de quase todos os sinais práticos
- Pode ser calculada exatamente e para qualquer sinal, e não apenas sinais como $\alpha^n u[n]$ e outros parecidos e tabelados.
- Pode ser calculada com baixa complexidade computacional. (FFT)

Analogia: Série de Fourier

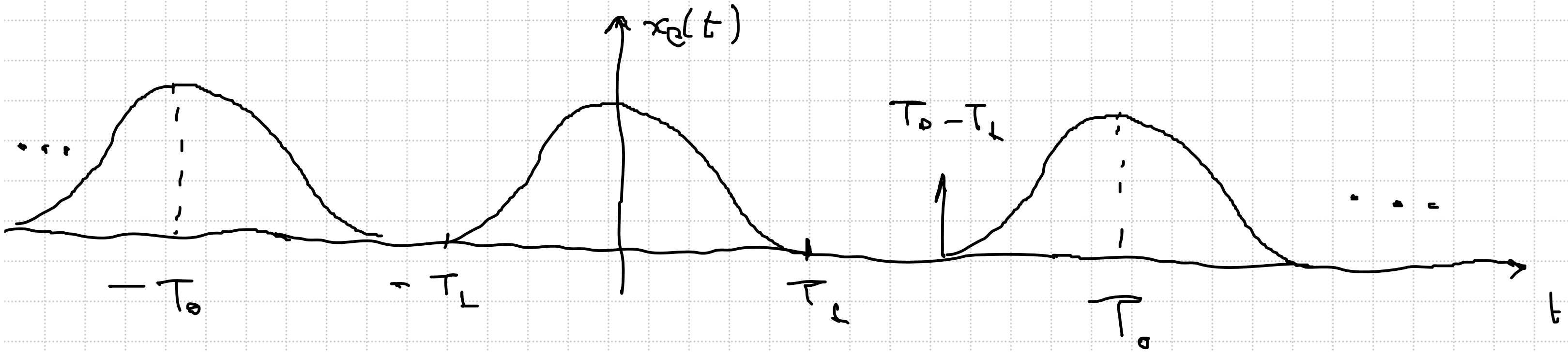
- $x(t)$ tem duração finita, $x(t)=0$ se $|t|>T_1$



$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T_1}^{T_1} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Problema: Esboce o sinal $x_e(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$ para um T_0 dado. Explicite qualquer hipótese feita sobre T_0.

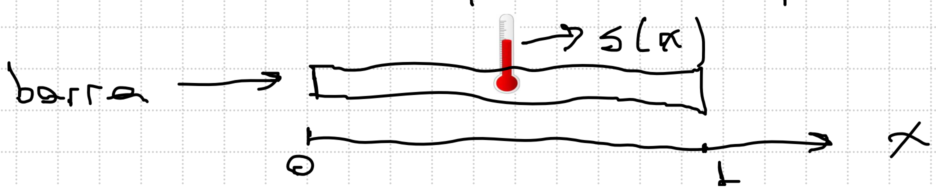
Solução:



Hipótese: $T_0 - T_1 > T_1 \Leftrightarrow T_0 > 2T_1$

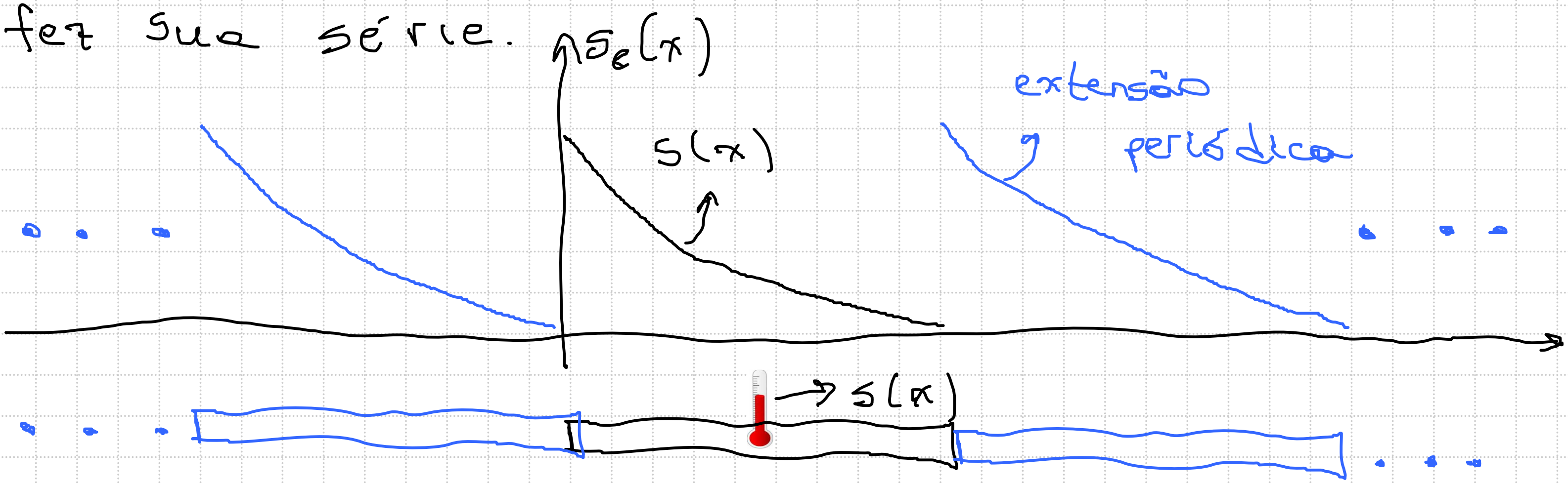
$x_e(t)$ é chamado extensão periódica de $x(t)$

Fourier iniciou seu trabalho com sinais desse tipo: $s(x)$: temperatura numa barra de comprimento $1\,m \Rightarrow$ só defino $s(x)$ para $0 < x < 1$.



Fora desse intervalo, defino como quero. Faz tanto sentido dizer que temperatura em $x = 2$ é $0°$ quanto dizer qq. outra coisa, já que não tem barra em $x = 2$ para medir temperatura.

Fourier definiu $s(x)$ fora do intervalo de interesse como a extensão periódica e fez sua série.



Série de Fourier: seja T o período.

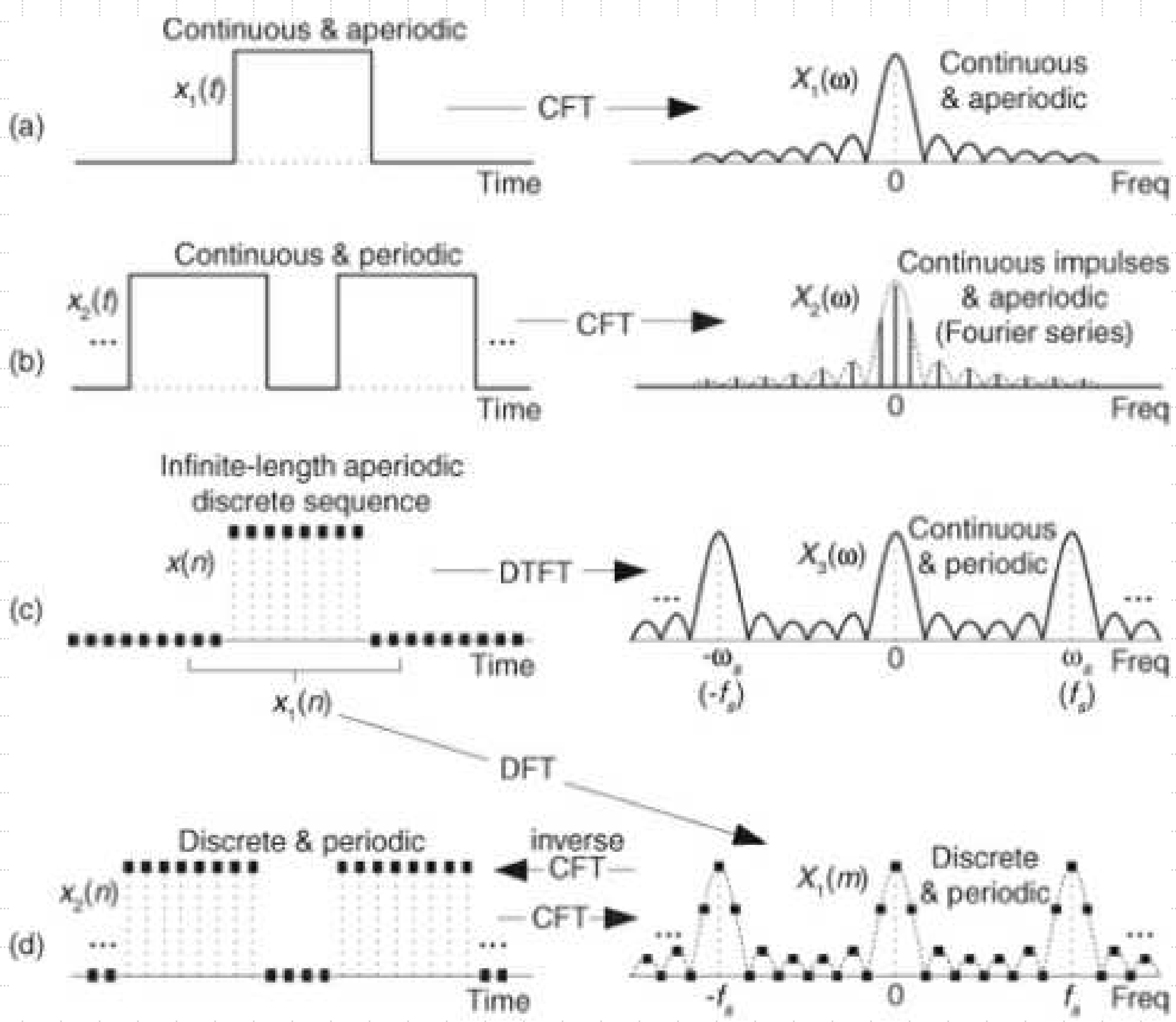
$e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ tem período T $\forall k$

Escreve $x(t)$ como combinações desses termos:

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} x_e(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\, dt = \frac{1}{T} X(jw)\Big|_{w=\frac{2\pi}{T}k}$$

Raciocínio semelhante pode ser seguido para sinais discretos.



fonte:
Richard
Lyons,
Understand
DSP