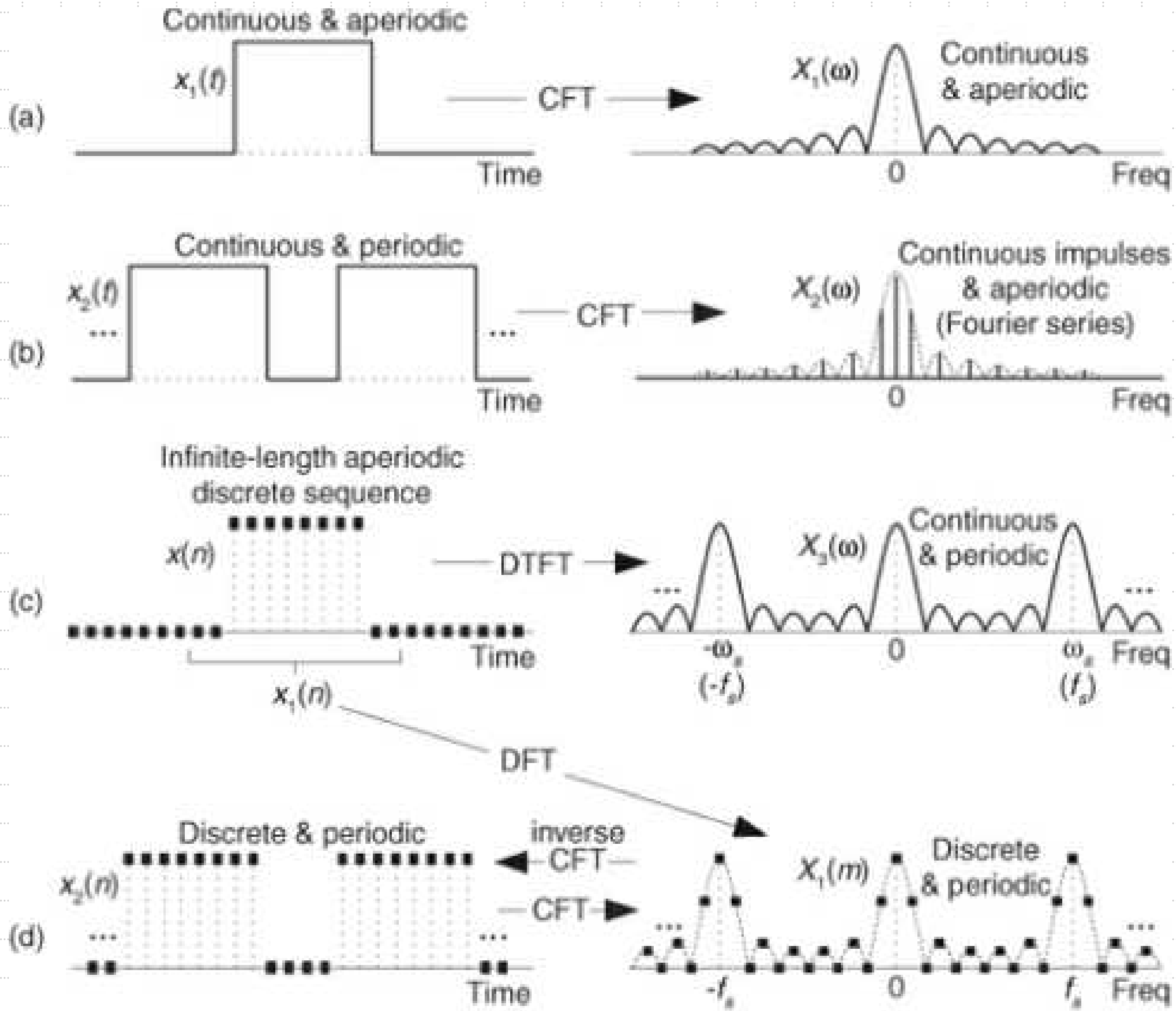
Objetivos: Transformada discreta de Fourier

- Motivação: Sinais discretos de duração finita
- objetivo: representar extensões periódicas como combinações de exponenciais complexas.
  - "Ingrediente": termos na forma $e^{j\omega n}$ com período dado

Motivações:

- Funciona para sinais de duração finita, caso de quase todos os sinais práticos
- Pode ser calculada exatamente e para qualquer sinal, e não apenas sinais como $\alpha^n u[n]$ e outros parecidos e tabelados.
- Pode ser calculada com baixa complexidade computacional. (FFT)



fonte: Richard Lyons, Understand DSP

Vantagem: não preciso calcular $X(e^{jw})$ para <u>todo</u> w entre $-\pi$ e π, o que é impossível para um computador.

Pergunta: Se e^{jwn} tem período de N amostras, determine a forma geral de w

a) $w = \frac{2\pi}{N}$ b) $w = 0$ c) $w = \frac{2\pi k}{N}$

Solução: Para ter período N, devemos ter que $e^{jw(N+n)} = e^{jwn} \Leftrightarrow e^{jwN} = 1 \Leftrightarrow wN = 2\pi k$

$\Leftrightarrow w = \frac{2\pi k}{N}$

Pergunta: Quantos sinais diferentes na forma $e^{j\omega n}$ possuem período N?

a) N b) 1 c) 0 d) ∞

e) $N/2$

Solução: Veja o que acontece quando $k=N$. Nesse caso, $\omega = \frac{2\pi N}{N} = 2\pi$, que resulta num sinal igual ao com $\omega=0$. Portanto temos N sinais distintos.

Ingredientes da DFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k} X[k] \, e^{j \frac{2\pi}{N} k n}$$

$e^{j \frac{2\pi}{N} k n}$: frequência $\frac{2\pi}{N} k$

Como (quantidade e fase) eu uso cada ingrediente?

$$X[k] = \sum_{n} x[n] \, e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}$$

Analogia com vetores:

Um sinal de duração finita com N amostras ou um sinal periódico com período N é completamente especificado pelos N valores $x[0], \ldots x[N-1]$.

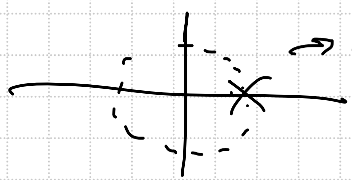
Defina vetor $\underline{x} = [x[0], \ldots, x[N-1]]^T$.

Transformada também tem N valores, pois temos apenas N ingredientes diferentes.

$\Rightarrow$ Equações da DFT levam N valores no tempo em N valores em frequência. De certa forma, temos N equações com N incógnitas, o que faz sentido

Exemplo das N exponenciais distintas com $N=4$

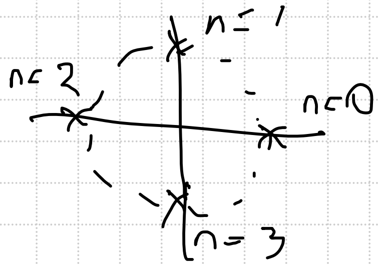
$k=0 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi k}{N} = 0 \Rightarrow e^{j0n} = 1$



$\rightarrow$ não sai daqui

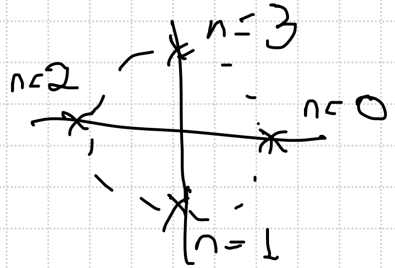
$k=1 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi k}{N} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow e^{j\omega n} = e^{j\frac{\pi}{2}n} = \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^n = j^n$



$k=3 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi\, 3}{N} = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow e^{j\omega n} = e^{j\frac{3\pi}{2}n} = (-j)^n$



$\left(\omega = -\frac{\pi}{2} \text{ dá o mesmo}\right)$

$k=2 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{N}k = \pi \Rightarrow e^{j\omega n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$

Problema: Se $x[n]$ foi obtido de N amostras de $x(t)$ a uma taxa f_s, o termo $X[k]$ corresponde a qual frequência de $x(t)$, em Hz?

Solução:

O termo $X[k]$ está relacionado à frequência digital $\omega = \frac{2\pi}{N} k$. Por outro lado, uma freq. digital ω está relacionada a uma freq. analógica f por $\omega = \frac{2\pi f}{f_s}$

$\Rightarrow k = \frac{f}{f_s} N$ ou $f = \frac{k f_s}{N}$

Exemplo: $k = 0 \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow f = 0$

$k = \frac{N}{2} \Rightarrow \omega = \pi \Rightarrow f = f_s/2$

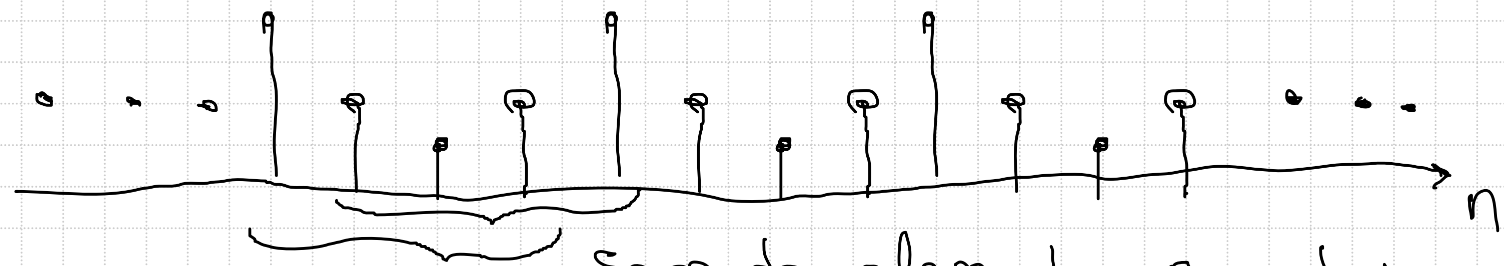
$k = N \Rightarrow \omega = 2\pi \Rightarrow$ aliasing $\Rightarrow f = 0$

Periodicidade: como $e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}$ tem período N, tudo tem período N:

$$x[N+n] = \frac{1}{N}\sum_{k} X[k]\, e^{+j\frac{2\pi}{N}k(N+n)} = x[n]$$

$$X[N+k] = \sum_{n} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = X[k]$$

Por isso, as somatórias são em um período, qualquer período



Soma dos elementos nos dois intervalos é igual.

Se eu não restringir a soma a um período, eu pego um mesmo ingrediente duas vezes:

$e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ e $e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)n}$

Problema: Tenho 100 amostras de um sinal real $x[n]$. Se $X[1] = 1+j$, para qual outro valor de k eu conheço o valor de $X[k]$?

a) 0   b) 2   c) 98   d) 99   e) 100

Solução: Se $x[n] \in \mathbb{R}$, e o termo $(1+j)e^{j\frac{2\pi}{100}n}$ aparece em sua composição, então o termo $(1-j)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$ também deve aparecer

$\Rightarrow X[-1] = 1-j$

Mas $X[k]$ tem período 100 $\Rightarrow X[99] = 1-j$