

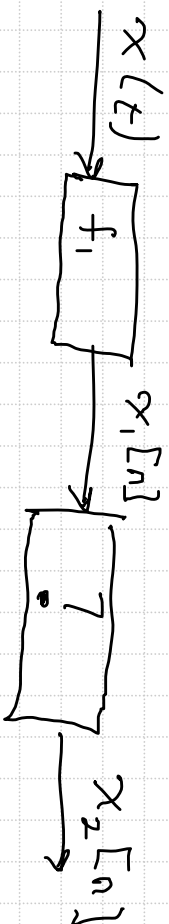
Aumentando a taxa de amostragem: interpolação



$$f_2 = L f_1$$



Como obter $x_2[n]$ diretamente de $x_1[n]$?



Pergunta: Exemplo de CD, $f_1 = 44100$, $f_2 = 88200$.

Qual a maior frequência de sinal presente em $x_2[n]$?

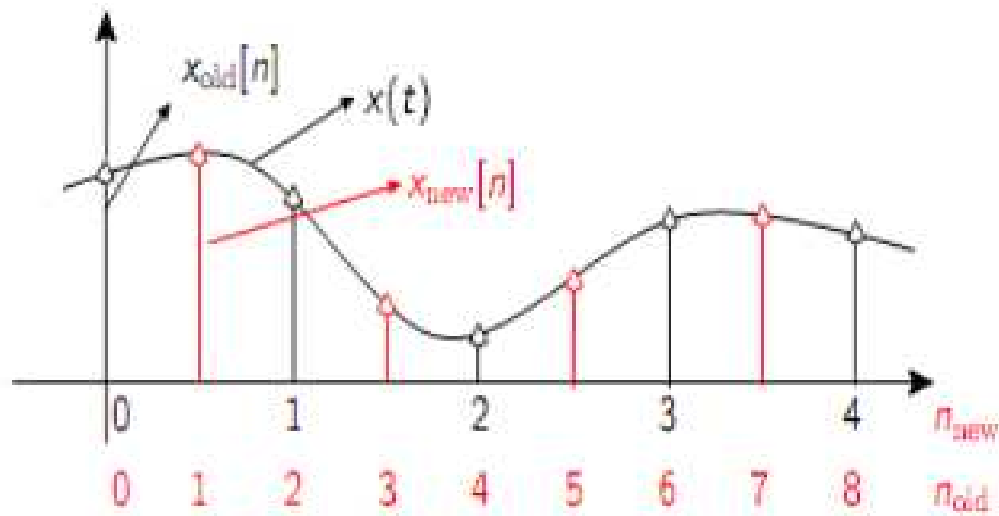
$$a) \pi$$

$$b) \pi/2$$

$$c) \pi/4$$

$$d) 3\pi/2$$

Conclusão: $x_2[n]$ só pode conter as componentes em frequência presentes em $x_1[n]$. Como $x_1[n]$ foi amostrado a uma taxa mais baixa, isso quer dizer que $x_2[n]$ vai necessariamente conter uma faixa de frequências sem nenhum sinal de interesse. Nesse problema, com $L = 2$, a faixa de $\pi/2$ a π não vai ter sinal.



Pergunta: Matematicamente, qual a relação entre $x_2[n]$ e $x_1[n]$?

a) $x_2[n] = x_1[n/2]$

b) $x_2[n] = x_1[nL]$

Erro: Se $L=2$, quanto vale $x_2[1] = x_1[1/2]$?

Alternativa correta: $x_2[n] = \begin{cases} x_1[n/L] & \text{se } n = kL \\ ? & \text{C.C.} \end{cases}$

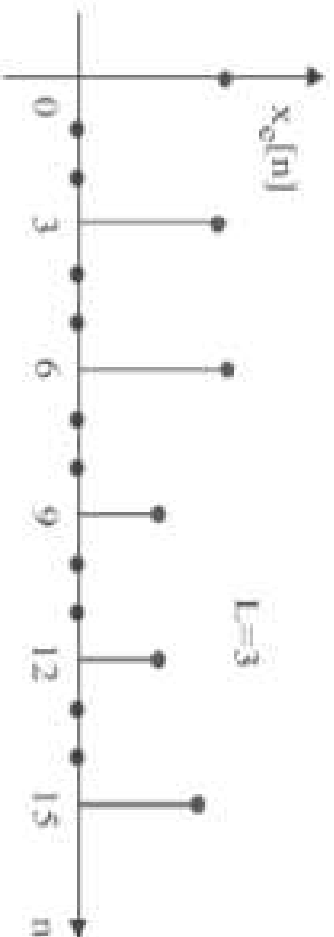
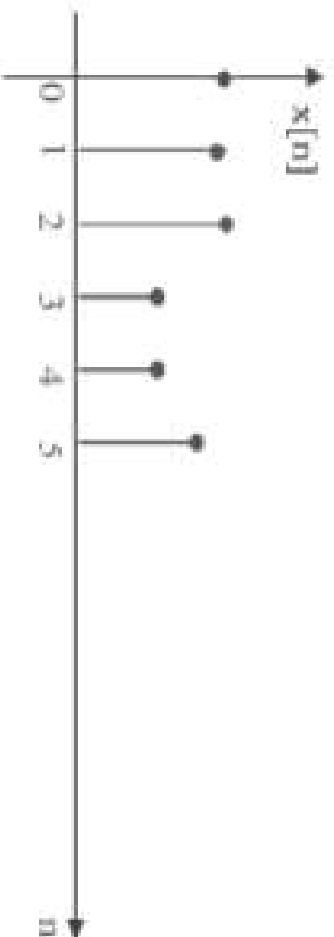
Como determinar amostras interme diárias?

① duas etapas:

1. "Burramento" joga o sinal para um mundo com taxa de amostragem f_2 , inserindo zeros

$$x_e[n] = \begin{cases} x_1[n/L] & \text{se } n = kL \\ 0 & \text{C.C.} \end{cases}$$

Notação:



Pg. fazer isso? Relação entre espectros é simples

Problema: Dado $X_1(e^{j\omega})$, determine $X_e(e^{j\omega})$, lembrando que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n}$$

a) $X_1(e^{j\omega/L})$ b) $X_1(e^{j\omega L})$ c) $\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L X_1(e^{j(\omega - 2k\pi)/L})$

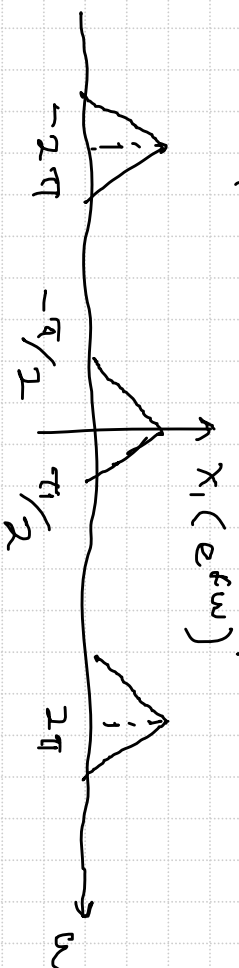
$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] e^{j\omega n} = \dots + x_e[-L] e^{j\omega L} + x_e[0] e^{j\omega 0} + x_e[L] e^{j\omega L} + \dots$$

$$= \dots + x_1[-L] e^{j\omega L} + x_1[0] e^{j\omega 0} + x_1[L] e^{j\omega L} + \dots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] e^{j\omega L n} = X_1(e^{j\omega L})$$

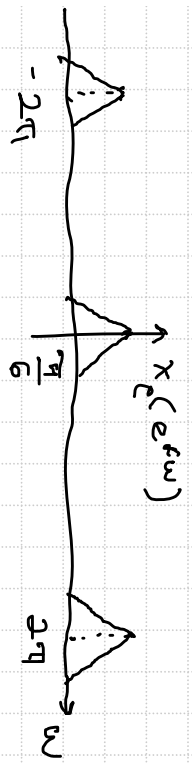
$\Rightarrow$ A frequência π de $x_1[n]$ vai para π/L de $x_e[n]$

Pergunta: $x[n]$ tem o espectro abaixo:

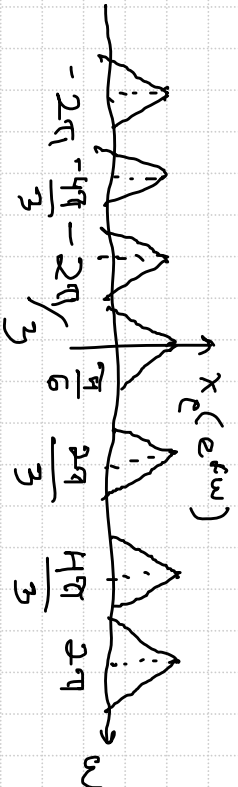


Esboce $X_e(e^{j\omega})$

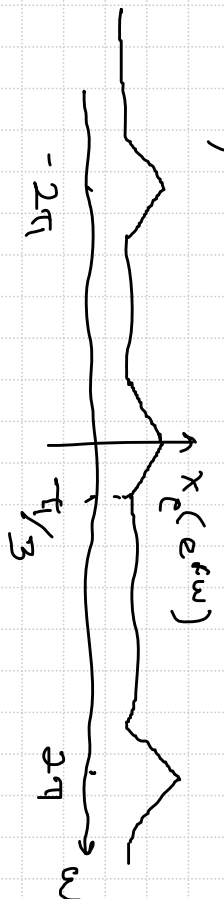
a)



b)



c)



Exemplo: $x_1[n] = 1 \Rightarrow X_1(e^{j\omega}) =$

Usando $L=2$,

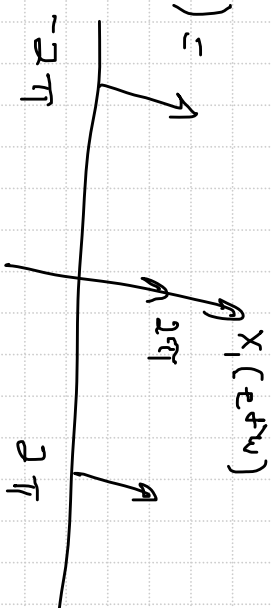
$$x_e[n] = \dots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

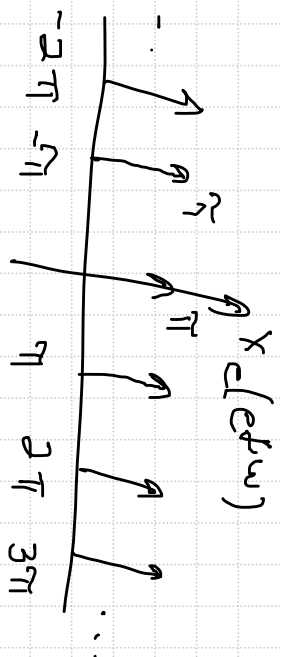
$$= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) = \frac{1}{2} (e^{j0n} + e^{j\pi n})$$

Na frequência, $X_1(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_k \delta(\omega - 2k\pi)$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(2\pi \sum_k \delta(\omega - 2k\pi) + 2\pi \sum_k \delta(\omega - \pi - 2k\pi) \right)$$

$$= \pi \sum_k \delta(\omega - k\pi)$$





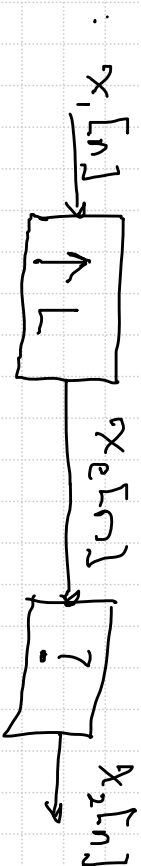
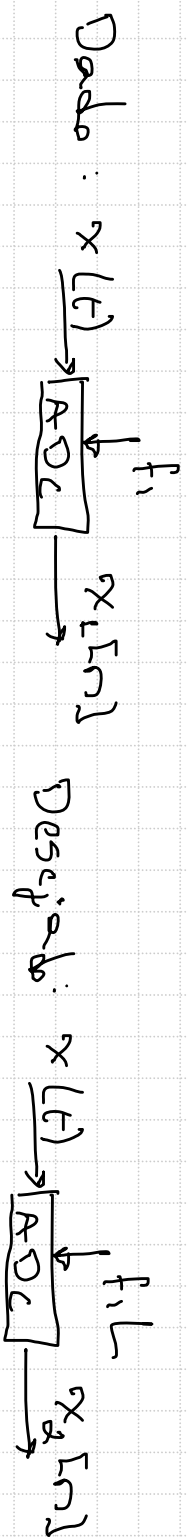
$$X_c(e^{j\omega}) = X_1(e^{j2\omega}) = 2\pi \sum_k \delta(2\omega - 2k\pi) = 2\pi \sum_k \delta(\omega - k\pi)$$

$$= \pi \sum_k \delta(\omega - k\pi)$$

Nota: $\delta(2\omega) = \frac{1}{2} \delta(\omega)$, pois

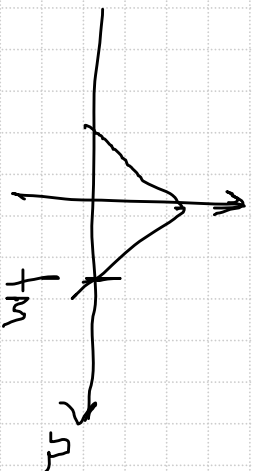
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2\omega) d\omega \stackrel{v=2\omega}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}$$

Resumindo:

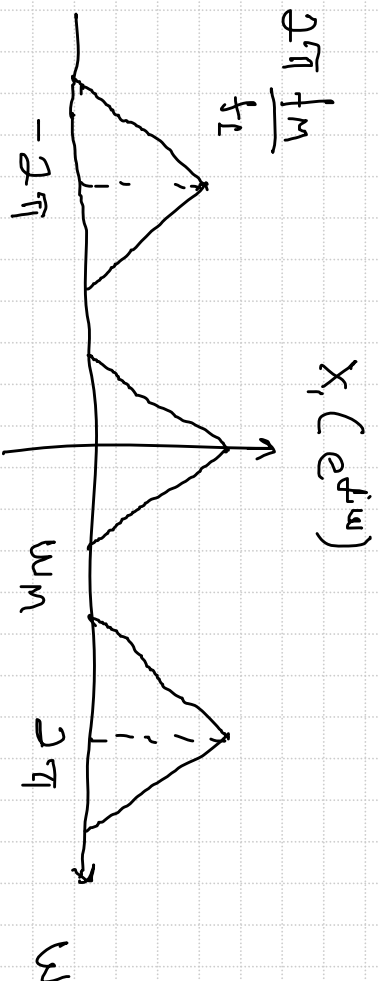


Esfectos:

$$X_c(f_n)$$

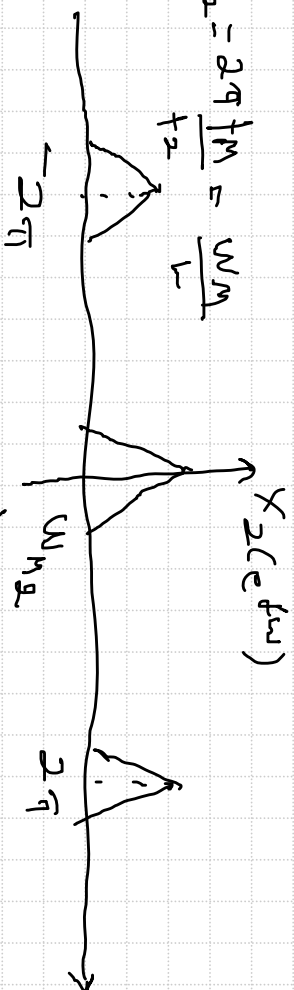


$$w_m = 2\pi \frac{f_m}{f_s}$$

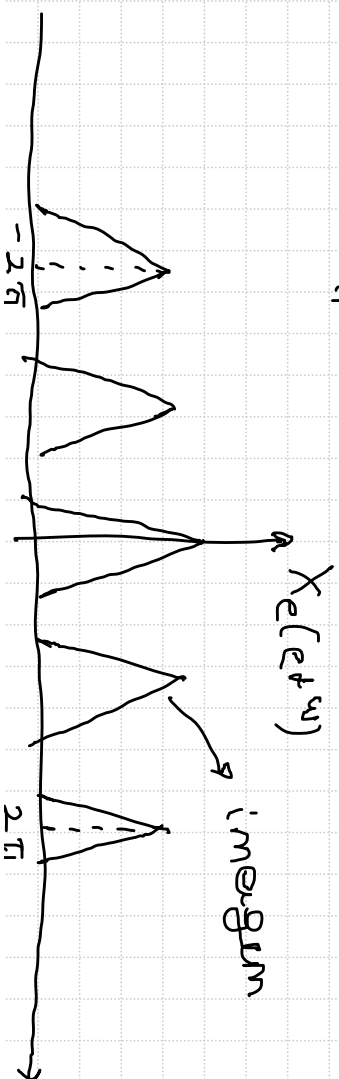


Desafío:

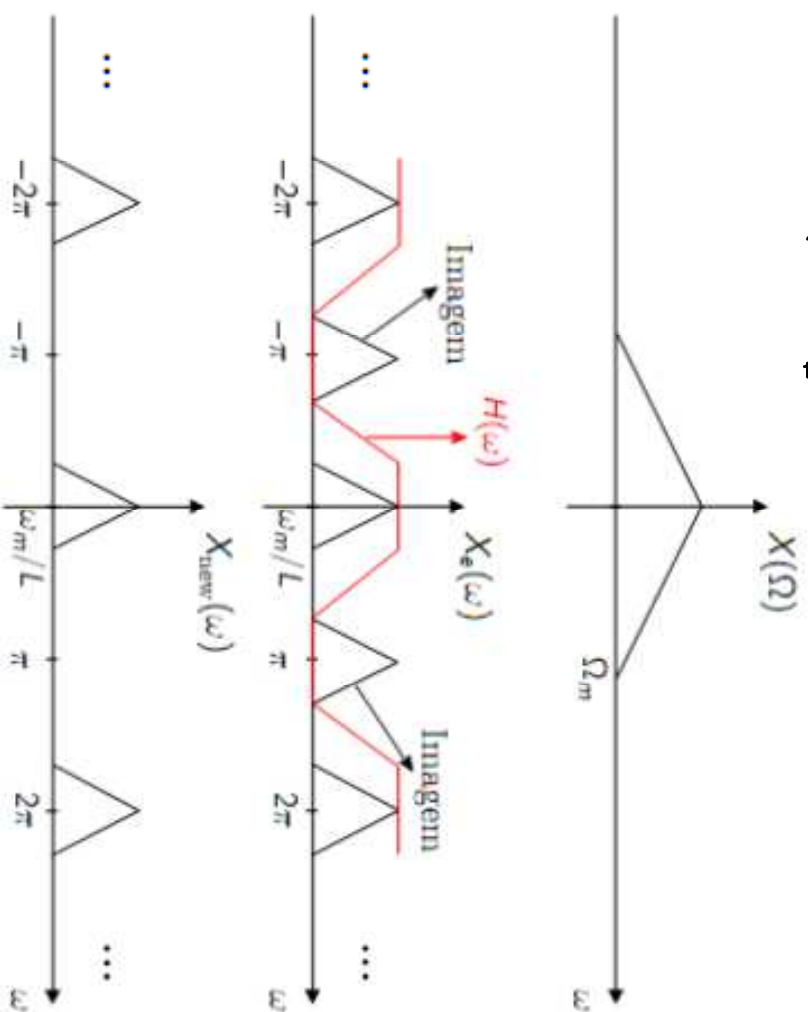
$$w_{m2} = 2\pi \frac{f_m}{f_s} = \frac{w_m}{L}$$

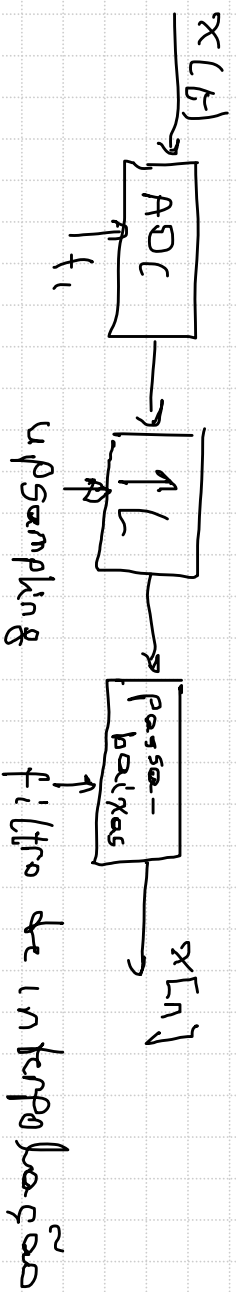


Remos:



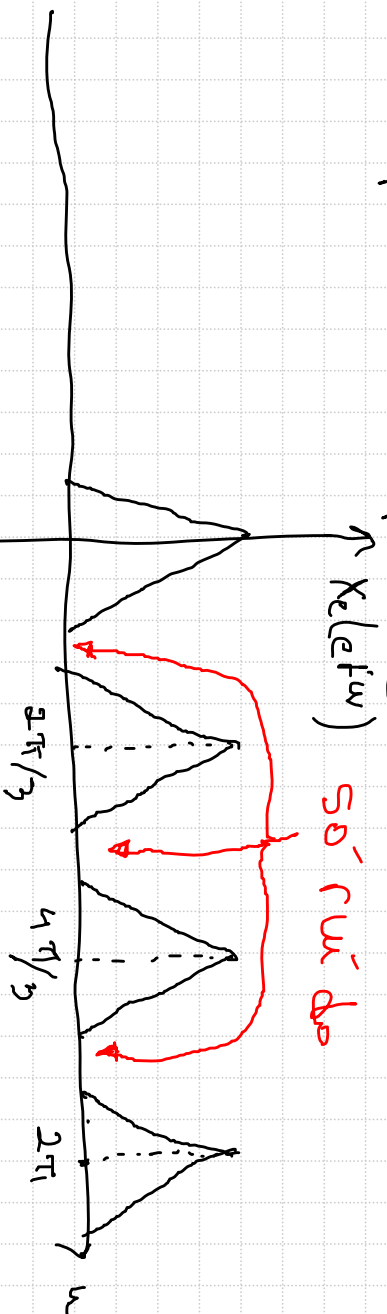
Usa filtro passa-baixas para eliminar
 imagem, fazendo interpolação entre amostras
 não-nulas de $x[n]$





Filtro de interpolação: como no DAC, não pode ser ideal. Interpolação linear e soft mas vai causar distorção na faixa de interesse e passar imagens.

Sobre faixas de passagem



faixas onde só tem ruído não precisam ser faixa de rejeição do filtro (a rigor, já devem ter sido filtradas em algum momento anterior) $\Rightarrow$ filtros mais simples

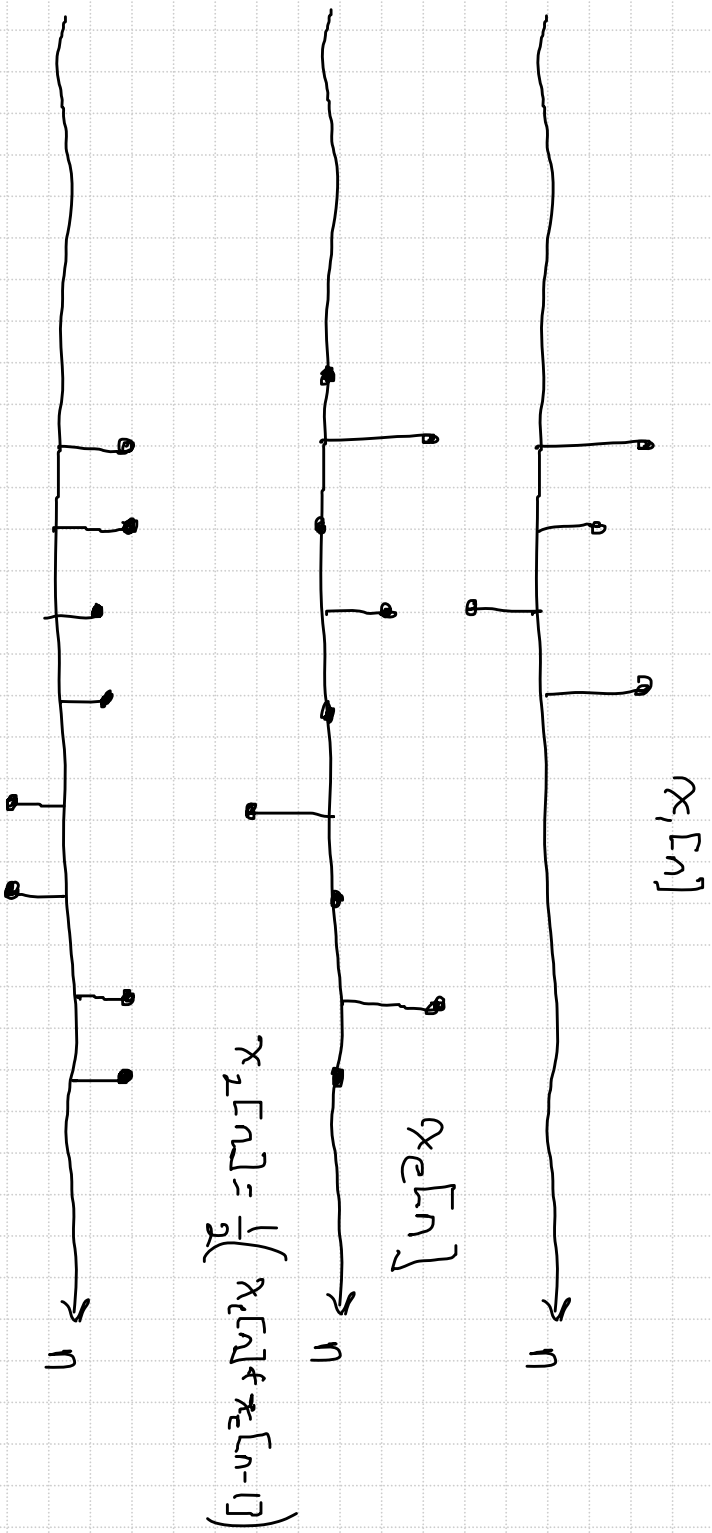
Filtro de interpolação tem que fazer muitas multiplicações e somas de zeros, e operam no mundo de maior taxa $\Rightarrow$ ineficiente



Exemplo de como corrigir:

Problema: Seja $L=2$ e $x_2[n] = \frac{1}{2} (x_1[n] + x_1[n-1])$

$\Rightarrow$ filtro faz uma média. Determine $x_2[n]$ em função de $x_1[n]$.



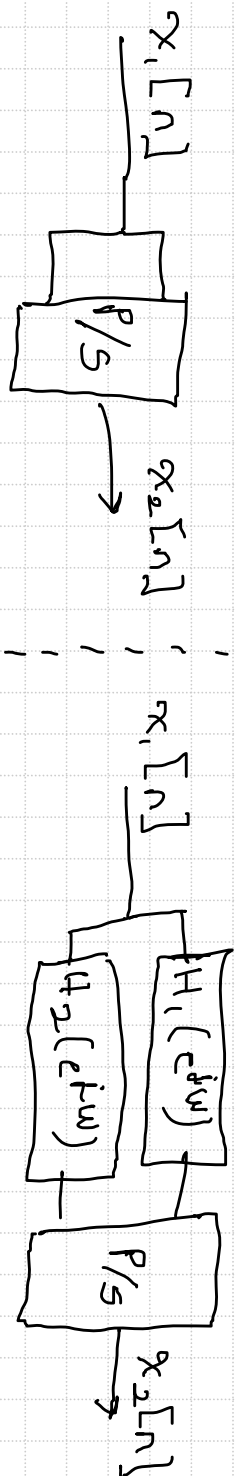
$\Rightarrow$ SET, division amplitude for 2

Solucao: $x_e[n] = \begin{cases} x_1[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$

$$\Rightarrow x_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} x_e[n] & n \text{ par} \\ \frac{1}{2} x_e[n-1] & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} x_1[n/2] & n \text{ par} \\ \frac{1}{2} x_1[(n-1)/2] & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \text{Soz}$$

Implementação



Com filtro mais geral

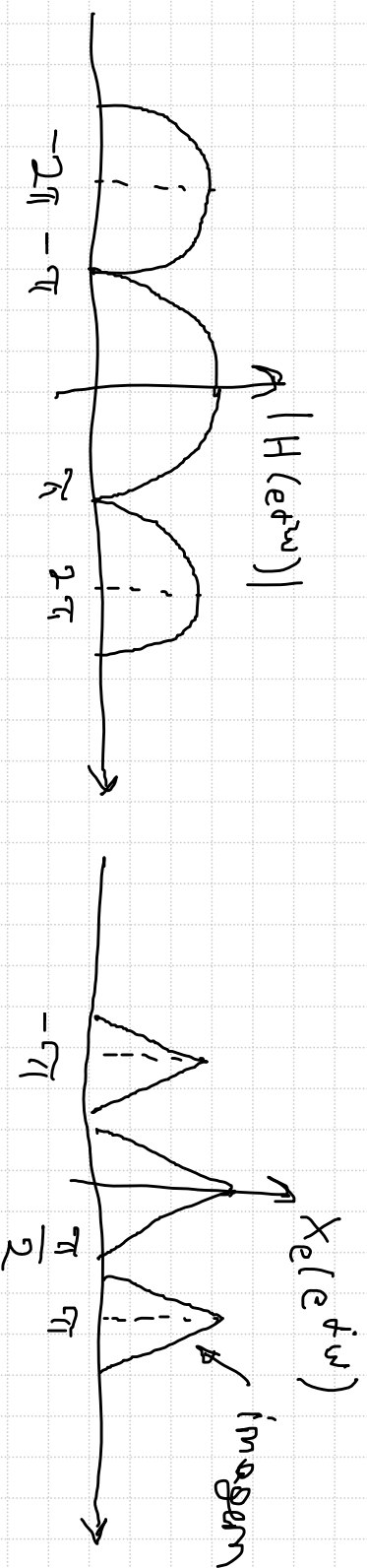
Esse resultado permite interpretar Soz na freq.



Se $x_2[n] = \frac{1}{2} (x_e[n] + x_e[n-1])$, qual a resposta ao impulso? Basta fazer $x_e[n] = \delta[n]$

$$\rightarrow h[n] = \frac{1}{2} (\delta[n] + \delta[n-1]) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0, 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

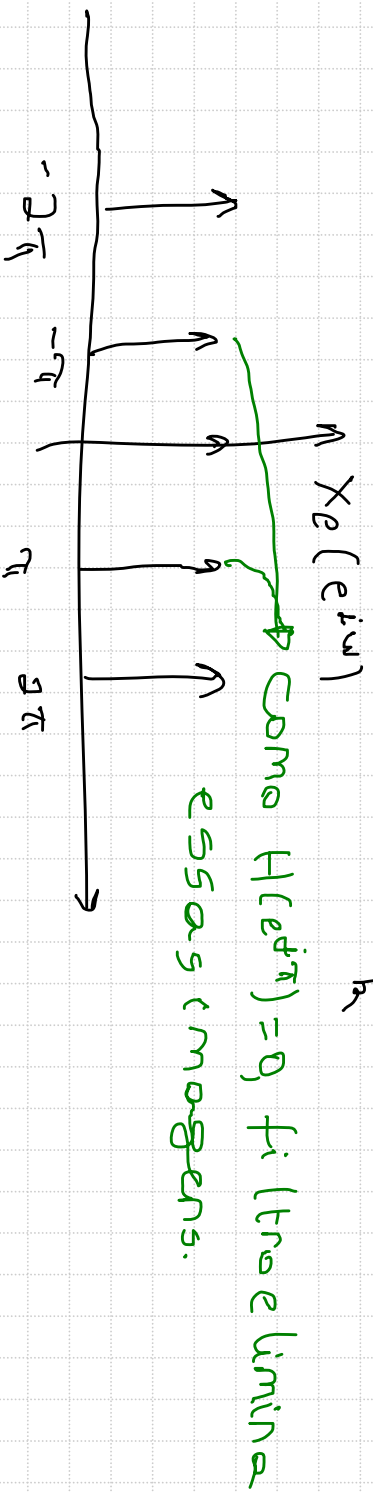
$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum h[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega})$$



Exemplo: $x_1[n] = 1 \Rightarrow x_e[n] = \dots 1 \ 0 \ 1 \ 0 \dots$

$\Rightarrow x_2[n] = 1 \ 1 \ 1 \dots$ (resposta de ganho $1/2$)

O que aconteceu? $X_e(e^{j\omega}) = T \sum_k S(\omega - k\pi)$



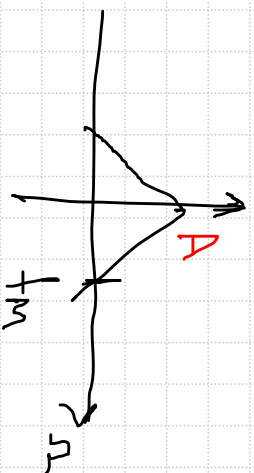
E o fator de $1/2$? Pelo teorema da amostragem,

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum X\left(j\left(\frac{\omega - 2k\pi}{T_1}\right)\right) \quad X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_2} \sum X\left(j\left(\frac{\omega - 2k\pi}{T_2}\right)\right)$$

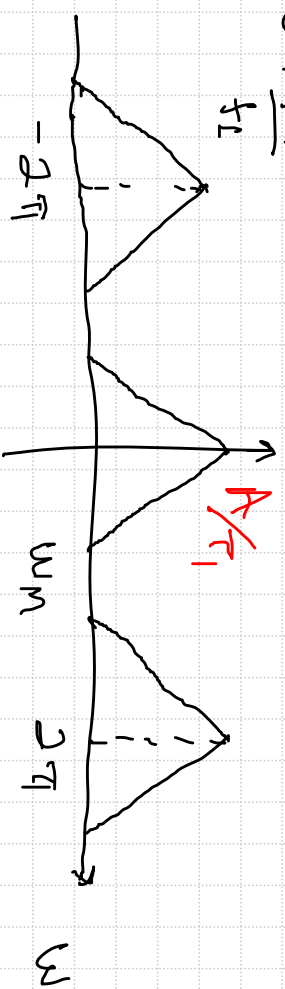
Dessejamos ganhos diferentes, devemos multiplicar $X_1(e^{j\omega})$ por $T_1/T_2 = L$. Isso faz sumir o $1/2$.

Espectros:

$$X_c(f_n)$$

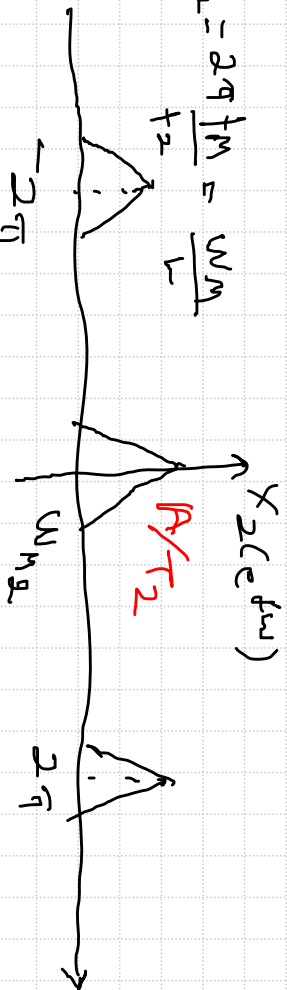


$$w_m = 2\pi \frac{f_m}{T_1}$$

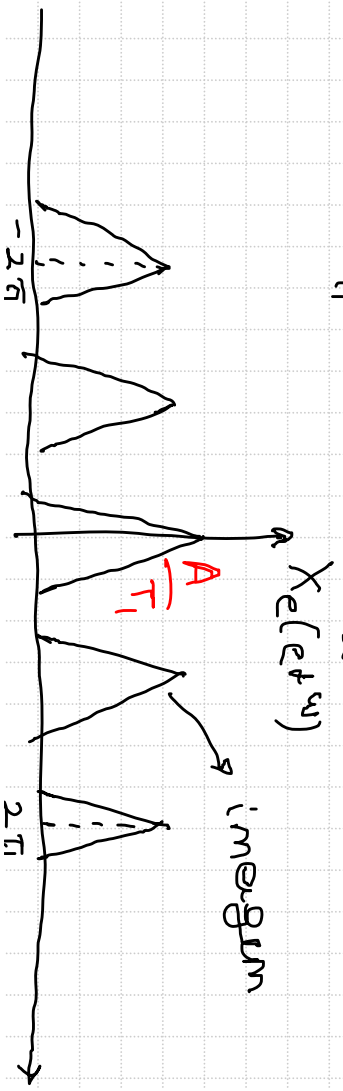


Desafio:

$$w_{m2} = 2\pi \frac{f_m}{T_2} = \frac{w_m}{L}$$



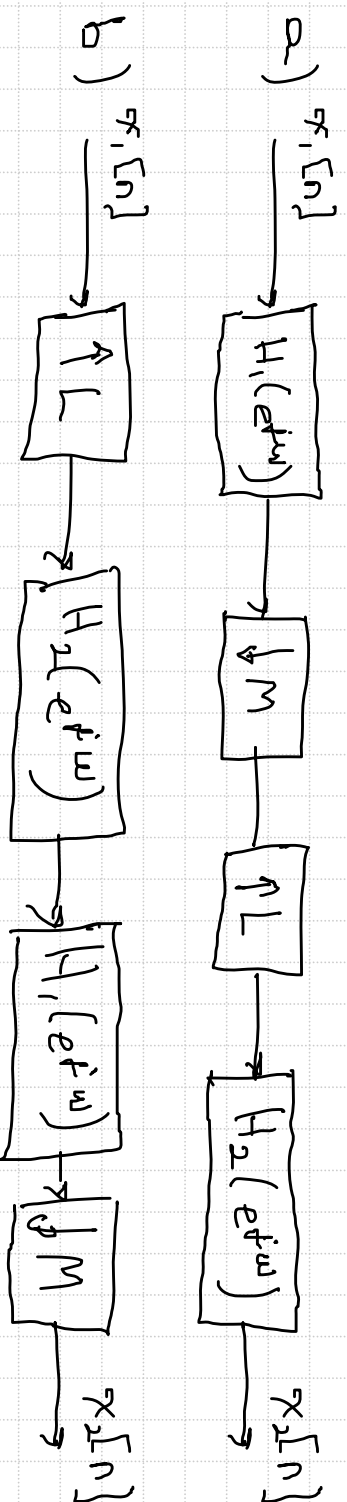
Temos:



Lembre que num filtro passa-baixas $H(e^{j\omega}) = 1$. Assim, filtrando $x[n]$, teremos um sinal com A/τ , na freq. 0. Para ajustar, multiplicamos saída do filtro por $T/\tau_2 = \frac{1/\tau_1}{1/\tau_2}$

Mudando taxa de amostragem por um fator racional.

Pergunta: Em qual ordem devemos aplicar os processos? ① Desconsidere complexidade computacional



Solução: Suponha que desejamos reamostrar a 1,5 vezes a taxa original. Podemos dividir por 2 ($M=2$) depois triplicar ($L=3$) ou vice-versa. Mas se usamos $M=2$ primeiro, devemos fogar fora todas as freqs. de $x_1[n]$ após $\pi/2$. Interpolação não vai conseguir recuperar essas frequências. Na outra ordem esse problema não se coloca.