Processamento Digital de Sinais

Renato da Rocha Lopes e Amauri Lopes
rlopes@decom.fee.unicamp.br

DECOM - Departamento de Comunicações - DECOM
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Conteúdo da Aula

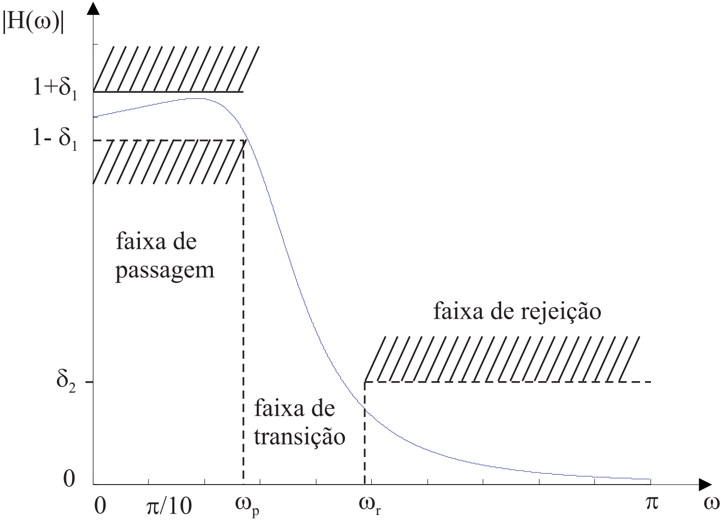
Conteúdo da Aula

Introdução

- Especificação da resposta em freqüência desejada
- Especificação da estrutura:
  - FIR ou IIR
  - Número de coeficientes
- Determinação dos coeficientes
- Representação com precisão finita
- Mudar Estrutura se necessário

Especificação

Máscara da Resposta em Amplitude



Conteúdo da Aula

Conteúdo da seção

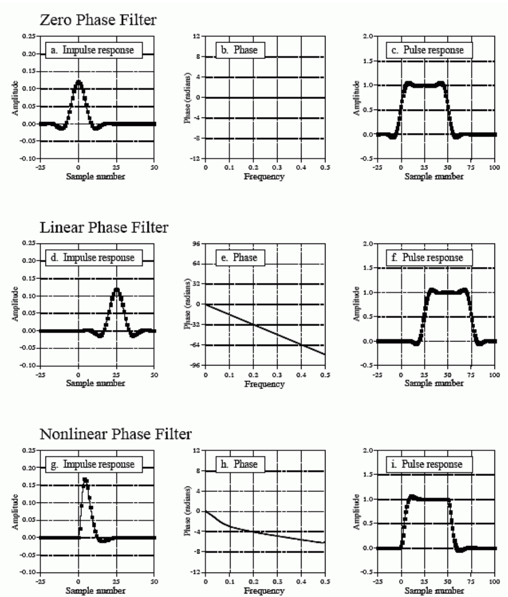
Filtros FIR

- Fase Linear
- Estáveis
- Baixa sensibilidade a erros de arredondamento.
- Resposta ao impulso $h[n]$ diretamente ligada a coeficientes.

Desafio:

- Resposta desejada $H_d(\omega)$ leva a resposta temporal $h_d[n]$ de duração infinita.
- Que $h[n]$ **finito** melhor aproxima $h_d[n]$?

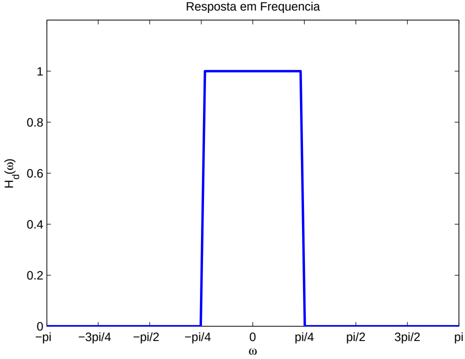
Fase Linear

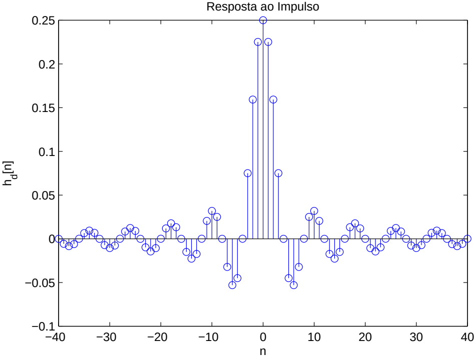


Fonte: `www.dspguide.com/ch19/4.htm`

- Não causa distorção de fase, só atraso
- Simetria na resposta.
  - Exigido por comunicações e processamento de imagem
- Implementado com metade das multiplicações

Exemplo: filtro passa-baixas ideal





Problemas

- Resposta de duração infinita
- Não causal

Característica Desejável:

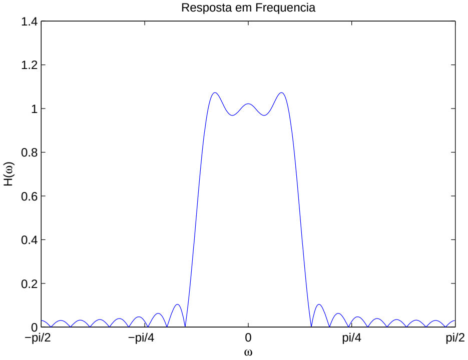
- Fase zero

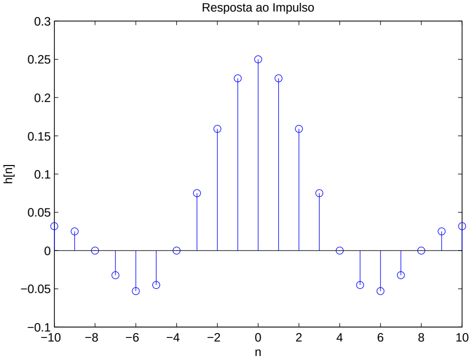
Conteúdo da seção

Truncando a Resposta

Idéia para resposta ao impulso finita:

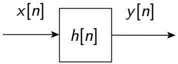
$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & |n| < N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$





Causalidade

Truncamento ainda não é causal:



$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-10}^{10} x[n-k]h[k] \\
&= x[n+10]k[-10] + x[n+9]h[-9] + \cdots x[n-10]h[10]
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $y[n]$ depende de valores futuros de $x[n]$

$\Rightarrow$ não pode ser implementado em tempo real

Atraso e causalidade

- Solução causal:
  - Desloca $h[n]$ de 10 amostras para a direita:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n-10], & 0 \leq n \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H(\omega) = \mathrm{e}^{-j\omega 10} H_{\text{truncado}}(\omega)$$

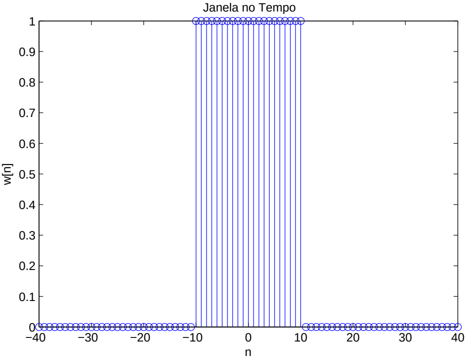
$\Rightarrow$ mesma magnitude

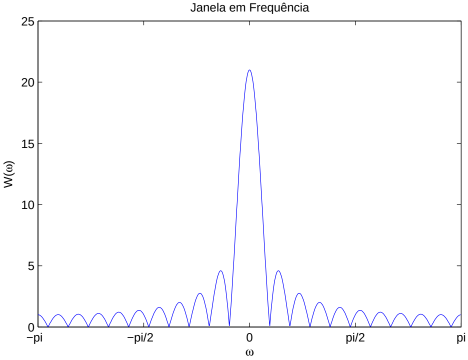
$\Rightarrow$ fase linear: -10ω

Explicando Transição e Oscilações

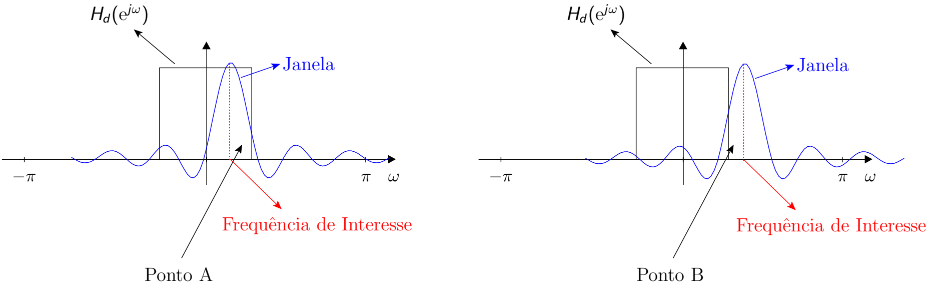
$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$$





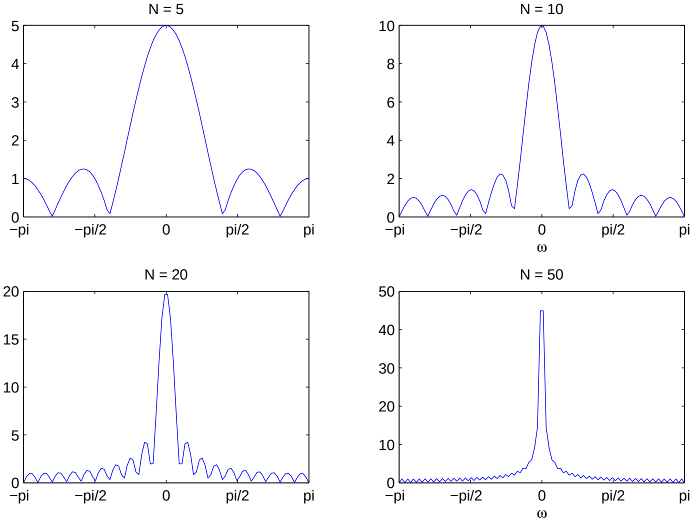
Explicando Transição



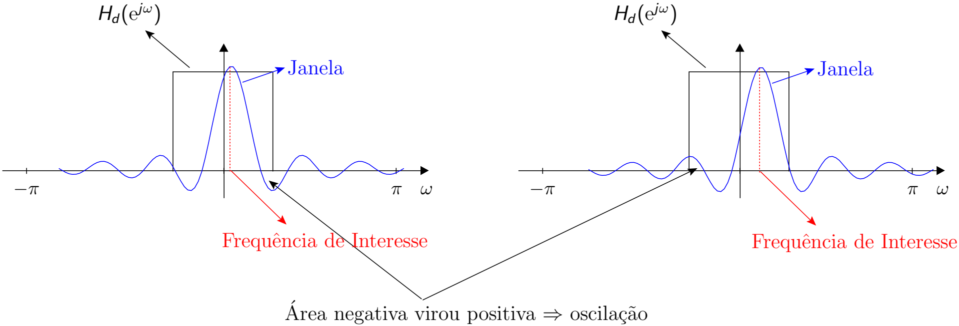
- Ponto A: área começa a diminuir
  - Começo da transição
- Ponto B: área termina da diminuir
  - Fim da transição
- Largura da faixa de transição depende da do lóbulo central $\approx 2\pi/N$
- $H(\omega_c) \approx 1/2$
  - Usa $\omega_c = (\omega_p + \omega_r)/2$

Melhorando Transição

Aumenta tamanho da janela, diminui transição



Explicando Oscilações



- Oscilação depende da área dos lóbulos laterais
  - Igual nas faixas de passagem e rejeição.
- Para janela retangular, não depende de N
- Solução: Outras janelas

Conteúdo da seção

Outras Janelas: Definição

Bartlett (triangular) $w[n] = \begin{cases} 2n/M; & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M; & M/2 \leq n \leq M \\ 0; & c.c. \end{cases}$

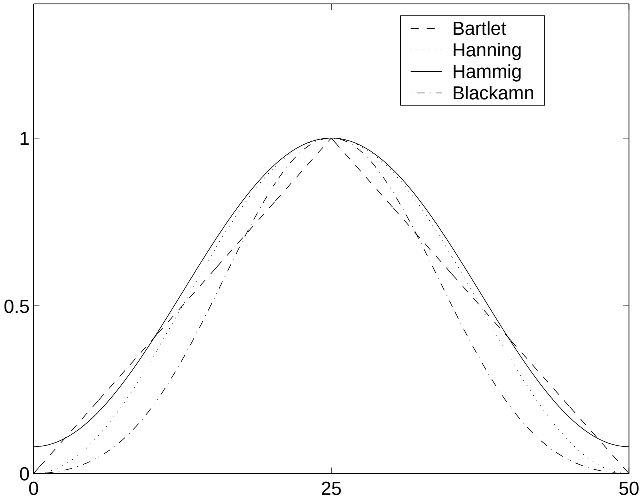
Hanning $w[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5\cos(2\pi n/M); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & c.c. \end{cases}$

Hamming $w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46\cos(2\pi n/M); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & c.c. \end{cases}$

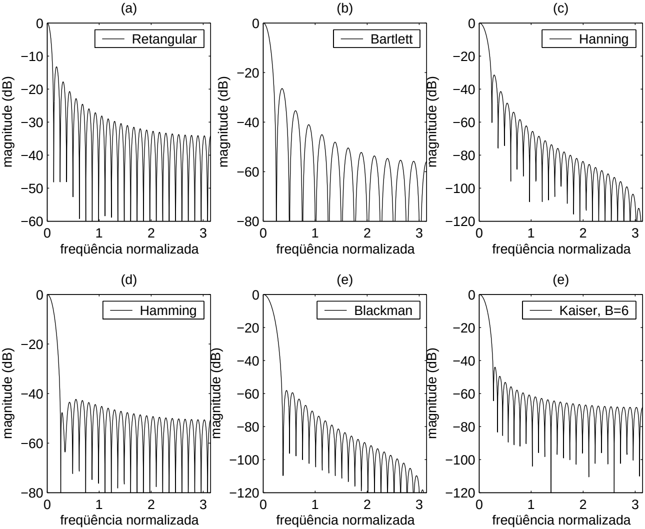
Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0,08\cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

Outras Janelas: Tempo



Outras Janelas: Freqüência



Outras Janelas: Características

Tipo de janela	Amplitude do lóbulo lateral (dB)	Largura aproximada do lóbulo central	Oscilação máxima aprox. (dB)
Retangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74

Exemplo

Projetar um filtro passa-baixas com:

- Freqüência de corte $\omega_c = \pi/2$,
- largura da região de transição $\triangle\omega \leq 0{,}2\pi$,
- erro máximo na faixa de passagem de $0,02$,
- erro máximo na faixa de rejeição de $0,01$.

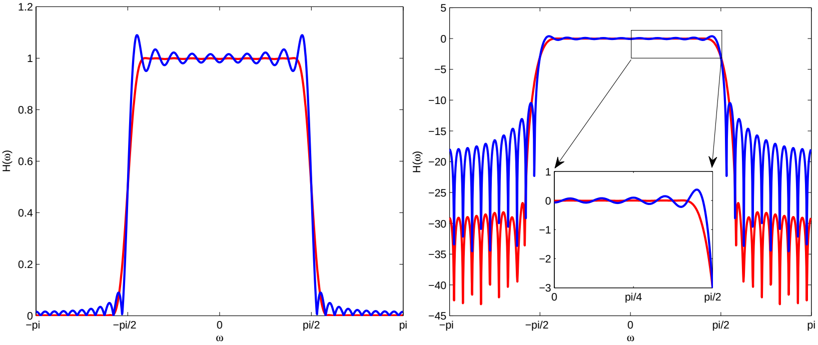
Faixa de passagem $\Rightarrow$ oscilação $< 20 * \log_{10}(0{,}02) = -34\,\text{dB}$

Faixa de rejeição $\Rightarrow$ oscilação $< 20 * \log_{10}(0{,}01) = -40\,\text{dB}$

Janela com menor transição que satisfaz oscilação: **Hamming**

Exemplo

$$8\pi/M \leq 0{,}2\pi \quad \Rightarrow \quad M \geq 40$$



Conteúdo da seção

Janela de Kaiser

Projeto com janelas tradicionais envolve tentativa e erro.

Alternativa: Janela de Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left\{\beta\left[1-\left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Parâmetros:

- $\alpha = M/2$
- $I_0(x)$: função de Bessel Modificada de 1ª espécie e ordem zero
- M: largura da janela
- β: altera a forma da janela, podendo até aproximar outras janelas

Janela de Kaiser: Características

β escolhido para a mesma oscilação

Tipo de janela	Amplitude do lóbulo lateral (dB)	Largura aprox. do lóbulo central	Osc. máxima aprox. (dB)	Janela de Kaiser equiv. β	Transição janela Kaiser equiv.
Retangular	-13	$\frac{4\pi}{M+1}$	-21	0	$1{,}81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1,33	$2{,}37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3,86	$5{,}01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4,86	$6{,}27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7,04	$9{,}19\pi/M$

Kaiser tem transição menor

Projeto com Janela de Kaiser

Sejam $A = -20\log\delta$ e $\triangle\omega = \omega_r - \omega_p$

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A-8,7), & A > 50 \\ 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,07886(A-21), & 21 \le A \le 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A-8}{2,285\triangle\omega}$$

Exemplo

Projetar um filtro passa-baixas com:

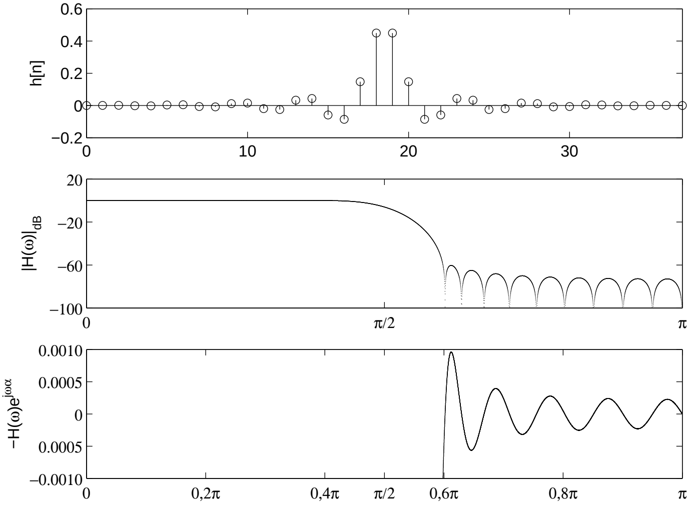
- Faixa de passagem até $\omega_c = 0{,}4\pi$,
- Freqüência de rejeição $\omega_r = 0{,}6\pi$,
  - largura da região de transição $\triangle\omega \leq 0{,}2\pi$
- erro máximo na faixa de passagem de 0,01,
- erro máximo na faixa de rejeição de 0,001.

Menor oscilação: $20 * \log_{10}(0{,}001) = -60\,\text{dB}$

$\triangle\omega = \omega_r - \omega_p = 0{,}2\pi$

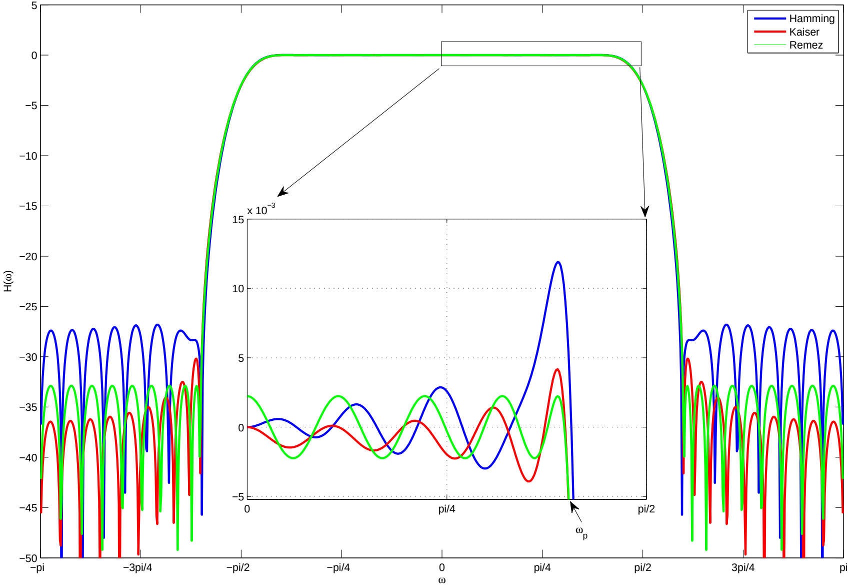
$$\Rightarrow \beta = 5,653, \quad M = 37.$$

Resultado


0.6
0.4
0.2
0
−0.2
h[n]
0
10
20
30
20
−20
−60
−100
|H(ω)|dB
0
π/2
π
0.0010
0.0005
0
0.0005
−0.0010
−H(ω)e^jωα
0
0,2π
0,4π
π/2
0,6π
0,8π
π

Conteúdo da seção

Comparação

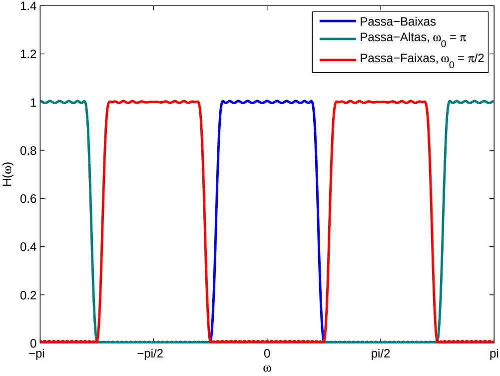

Hamming
Kaiser
Remez
H(ω)
ω
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−35
−40
−45
−50
−pi
−3pi/4
−pi/2
−pi/4
0
pi/4
pi/2
3pi/4
pi
x 10^−3
15
10
5
0
−5
0
pi/4
pi/2
ω_p

Outros filtros

Deslocamento em freqüência: $h[n]e^{j\omega_0 n} = H(\omega - \omega_0)$

$$\Rightarrow 2h[n]\cos(\omega_0 n) = H(\omega - \omega_0) + H(\omega + \omega_0)$$

Para passa-faixas ou passa-altas, usa w_0 adequado



Conteúdo da Aula

Conteúdo da seção

Método Geral

- Poderíamos calcular a Transformada de Fourier inversa da resposta desejada.
  - Resposta resultante tem duração infinita $\Rightarrow$ IIR
  - Desvantagem da idéia: ausência de método para mapear $h[n]$ em polos e zeros.
- Três métodos:
  - $\boxed{\text{Filtros Analógicos + Transformação Bilinear}}$
  - Filtros Analógicos + Invariância ao Impulso
  - Otimização direta dos coeficientes.

Conteúdo da seção

Transformada de Laplace

- Como tranformada Z, mas para sistemas analógicos
- Entrada do sistema: $x(t) = \mathrm{e}^{st}$
  - Saída do sistema: $y(t) = H(s)\mathrm{e}^{st}$.

Definição

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Propriedades

Linearidade: $\mathcal{L}\left\{ax(t) + by(t)\right\} \longleftrightarrow aX(s) + bY(s)$

Diferenciação: $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{\mathrm{d}t}x(t)\right\} \longleftrightarrow sX(s)$

Laplace e Sistemas

Sistemas analógicos são descritos por equações diferenciais.

- Exemplo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + 2x(t)$
- Laplace: $sY(s) + Y(s) = sX(s) + 2X(s)$
- Função de Transferência: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s+1}$

Polos e Zeros

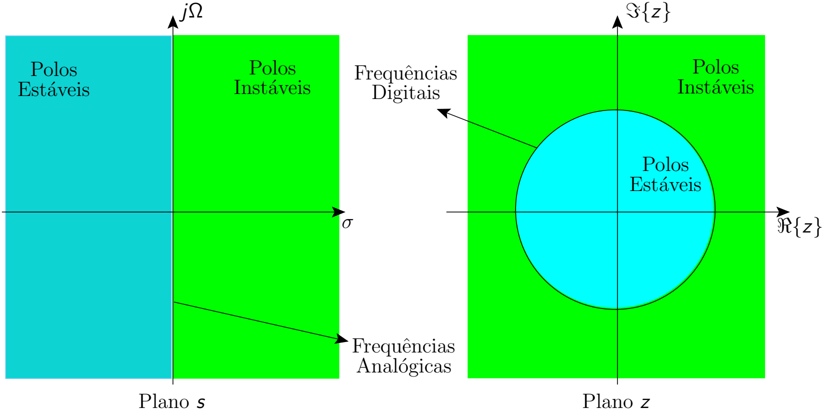
- Determinam comportamento do sistema
- Permitem cálculo da resposta em freqüência: $H(j\omega)$
- Estabilidade:
  - $\Leftrightarrow$ Polos estão no semi-plano esquerdo
  - $\Leftrightarrow$ Parte real dos polos < 0.

Conteúdo da seção

Transformação bilinear: Introdução

Objetivo: mapear polos e zeros analógicos em polos e zeros digitais de forma que

- Polos estáveis, $\Re\{s\} < 0$, viram polos estáveis, $|z| < 1$.
- Freqüências analógicas, $s = j\Omega$, viram freqüências digitais, $z = e^{j\omega}$

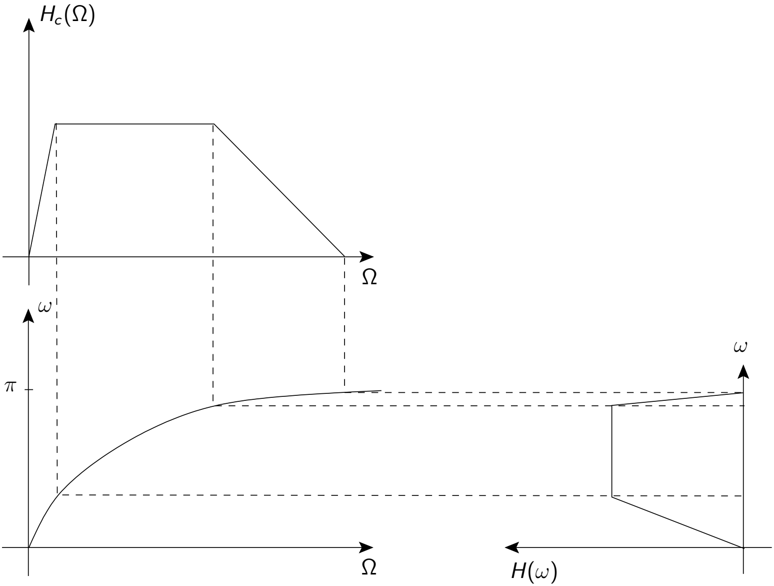


Transformação bilinear: Definição e Propriedades

$$s = c\,\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\,; \quad z = \frac{1 + s/c}{1 - s/c}$$

- $\Re\{s\} < 0 \leftrightarrow |z| < 1$
  - Polos estáveis levam em polos estáveis
- c: constante em geral 2.
- $s = j\Omega \leftrightarrow = e^{j\omega}$
  - $\omega = 2\arctan(\Omega/c) \leftrightarrow \Omega = c\tan(\omega/2)$
  - Toda freqüência analógica é mapeada em uma freqüência digital.
  - Mapeamento é não linear $\Rightarrow$ distorção na resposta em freqüência
- Para $|\Omega| \ll 1$ temos $|\omega| \simeq 2\Omega/c$

Transformação Bilinear em Freqüência



Resumo

1. Comece com uma máscara em freqüências discretas
2. Obtenha máscara analógica fazendo $\Omega = c\tan(\omega/2)$
   - Para filtro passa-baixas, freqüências de passagem e corte:
   - $\Omega_p = c\tan(\omega_p/2), \quad \Omega_r = c\tan(\omega_r/2)$
3. Projete $H_c(s)$
4. Faça $H(z) = H(s)\big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

Conteúdo da seção

Filtro de Butterworth Analógico

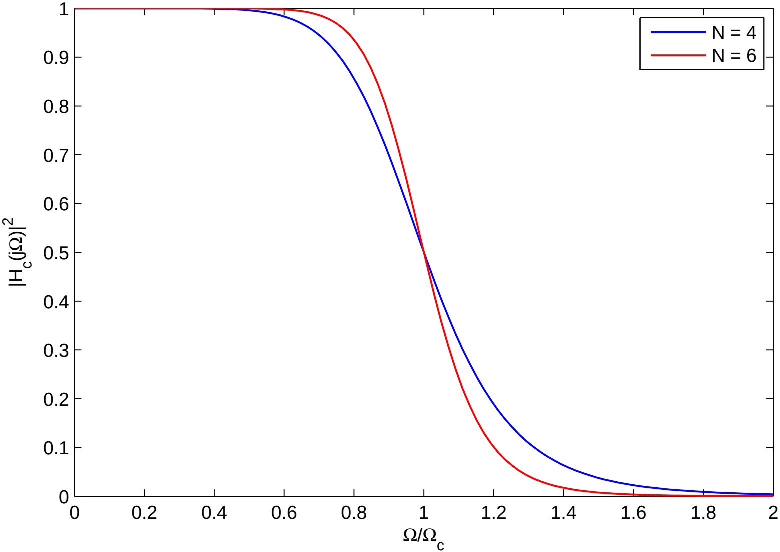
- $H_c(s)$ é maximamente plano em $s = 0$
  - Muitas derivadas nulas na origem.
- $|H_C(j\Omega)|$ diminui quando Ω aumenta.
- N: número de polos.

$$|H_c(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

Resultado: $H_c(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)}$,

com $s_k = \Omega_c \exp\left(j\frac{2k+1}{2N}\pi + j\frac{\pi}{2}\right)$

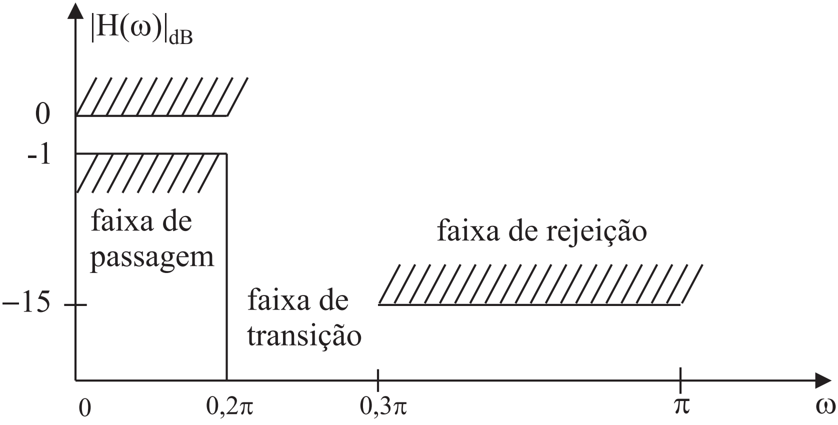
Resposta em Freqüência



Filtro de Butterworth Digital

$$
\begin{aligned}
H(z) &= H_c(s)\Big|_{s = c\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\
&= \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}\left(c\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - s_k\right)} \\
&= \frac{\Omega_c^N (1+z^{-1})^N}{\prod_{k=0}^{N-1}\left[c - s_k - (c+s^k)z^{-1}\right]}
\end{aligned}
$$

Filtro de Butterworth Exemplo



Filtro de Butterworth Exemplo

$$\Omega_p = 2\tan(0,1\pi), \quad \Omega_r = 2\tan(0,15\pi)$$

$|H_c(\Omega)|^2$ deve satisfazer

$$10\log|H_c(\Omega_p)|^2 \geq -1 \quad \text{e} \quad 10\log|H_c(\Omega_r)|^2 \leq -15,$$

ou seja,

$$10\log\frac{1}{1+\left[\dfrac{2\tan(0,1\pi)}{\Omega_c}\right]^{2N}} \geq -1 \tag{1}$$

$$10\log\frac{1}{1+\left[\dfrac{2\tan(0,15\pi)}{\Omega_c}\right]^{2N}} \leq -15. \tag{2}$$

Filtro de Butterworth Exemplo

$\Rightarrow N > 5,304 \Rightarrow N = 6$
$\Rightarrow \Omega_c = 0{,}76622$

$H_c(s) =$

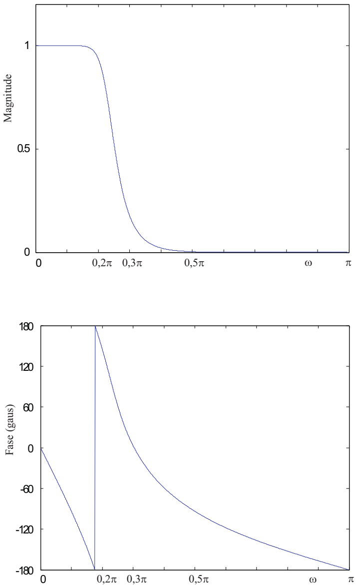
$$\frac{0{,}20238}{(s^2 + 0{,}396s + 0{,}5871)(s^2 + 1{,}083s + 0{,}5871)(s^2 + 1{,}4802s + 0{,}5871)}$$

$H(z) =$

$$\frac{0{,}0007378(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1{,}2686z^{-1} + 0{,}7051z^{-2})(1 - 1{,}0106z^{-1} + 0{,}3583z^{-2})} \times$$

$$\frac{1}{(1 - 0{,}9044z^{-1} + 0{,}2155z^{-2})}$$

Resultado

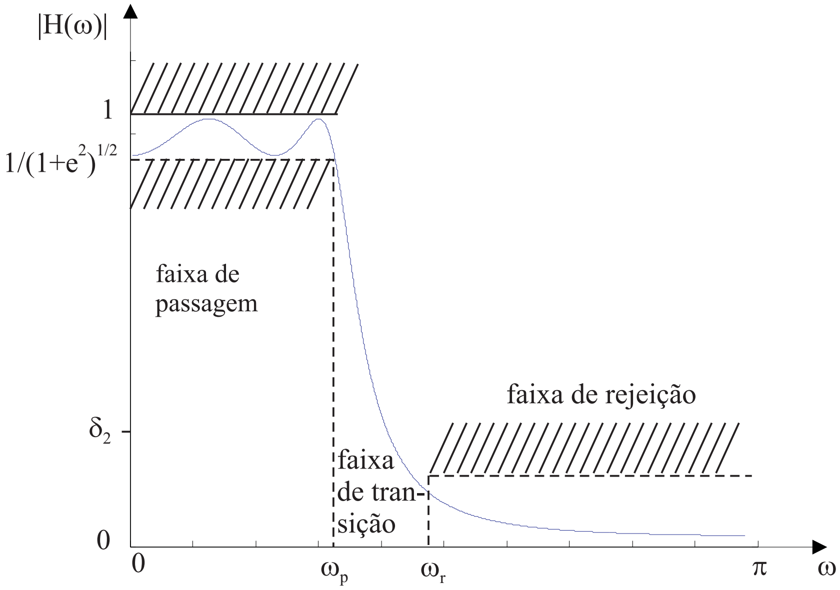

Magnitude
1
0.5
0
0
0,2π
0,3π
0,5π
ω
π
Fase (gaus)
180
120
60
0
-60
-120
-180
0
0,2π
0,3π
0,5π
ω
π

Conteúdo da seção

Introdução

- Butterworth decresce monotonicamente:
  - Máscara é satisfeita exatamente em ω_p e ω_r
  - Folga nas outras freqüências.
- Chebyshev distribui erros na faixa:
  - Tipo I: oscilações na faixa de passagem e monotônico na de rejeição
  - Tipo II: monotônico na faixa de passagem e oscilações na de rejeição.

Introdução


|H(ω)|
1
1/(1+e²)^1/2
faixa de passagem
δ2
0
faixa de transição
faixa de rejeição
0
ωp
ωr
π
ω

Filtro de Chebyshev Analógico - Tipo I

$$|H_c(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

Polinômio de Chebyshev

$$\begin{aligned} V_N(x) &= \cos[N \operatorname{arccos}(x)] \\ V_{N+1}(x) &= 2xV_N(x) - V_{N-1}(x) \\ V_0(x) &= 1; \quad V_1(x) = x \end{aligned}$$

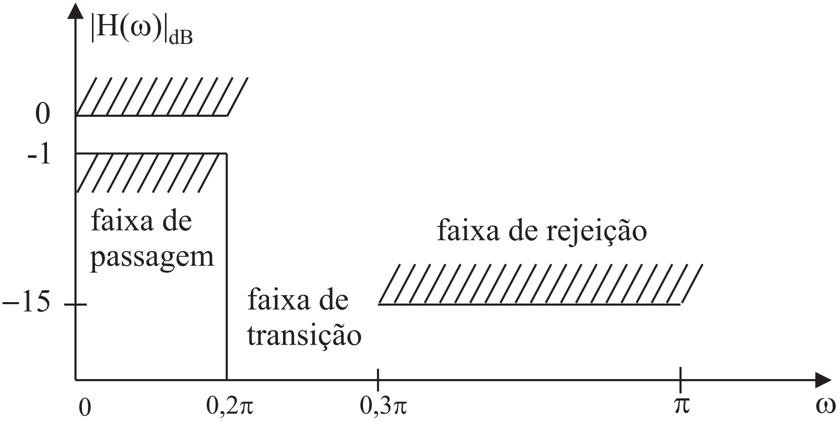
Parâmetros de Projeto

ϵ: Controla oscilações na faixa de passagem: $-10 \log_{10}\left(1 + \epsilon^2\right)$

Ω_c: Igual à faixa de passagem, Ω_p

N: Determina a faixa de rejeição.

Filtro de Chebyshev: Exemplo



Filtro de Chebyshev: Exemplo

$$\Omega_c = \Omega_p = 2\tan(0,1\pi) = 0,6498$$

Determinando ϵ:

$$-10\log(1+\epsilon^2) = -1 \Rightarrow \epsilon = 0,50885$$

Determinando N:

$$-10\log\left[1+\epsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)\right]_{\Omega=\Omega_r} = -15$$

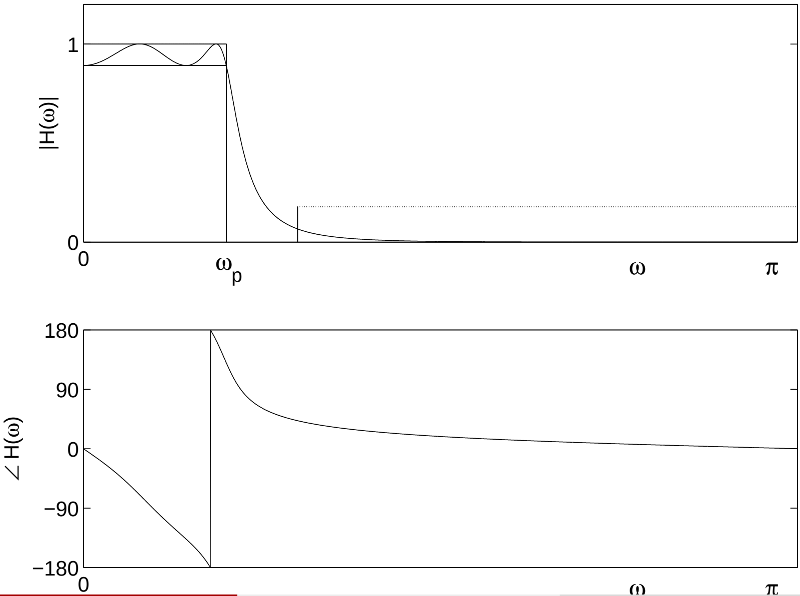
Como $\Omega_r = 2\tan(0,15\pi)$, $N = 4$.
Para Butterworth, $N = 6$.

Resultado

$$H_c(s) = \frac{0,04381}{(s^2+0,1814s+0,4166)(s^2+0,4378s+0,1180)}.$$

$$H(z) = \frac{0,001836(1+z^{-1})^4}{(1-1,4996z^{-1}+0,8482z^{-2})(1-1,5548z^{-1}+0,6493z^{-2})}$$

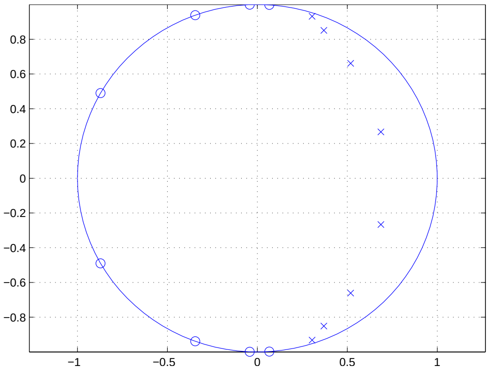
Resultado



Conteúdo da seção

Filtros Elípticos

- Substitui $V_N(x)$ por função racional.
- Introduz oscilações nas duas faixas
- Mais eficiente
  - $N = 3$ no exemplo anterior.
- Intuitivo
  - Espalha polos na faixa de passagem
  - Espalha zeros na faixa de rejeição



Projetando Outros Filtros

Para obter filtros passa-altas ou passa-faixas, é necessário fazer transformação.

- Sejam:
  - θ_p a freqüência de corte de um projeto,
  - ω_p a nova freqüência de corte desejada.
- Passa altas: $H_{\text{new}}(z) = H_{\text{old}}(Z)$, onde:
  - $Z = \dfrac{1 - \alpha z^{-1}}{z^{-1} - \alpha}$
  - $\alpha = \dfrac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$
- Outras transformações levam a outros tipos de filtro