Objetivos:

Definir transformadas racionais

Definir polos e zeros,

Relação destes com ROC

Polos para sistemas causais e estáveis

Definição: Transformadas racionais

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Numerador: $N(z)$ é polinômio em z

Denominador: $D(z)$ é polinômio em z.

Zeros: raízes de $N(z)$, ou seja, valores de z que fazem $N(z) = 0 \Rightarrow H(z) = 0$

Polos: raízes de $D(z)$, ou seja, valores de z que fazem $D(z) = 0 \Rightarrow H(z) = \infty$

Nota: se $z \in ROC$, vemos que $|H(z)| < \infty$.

Num polo, $D(z) = 0 \Rightarrow |H(z)| = \infty$

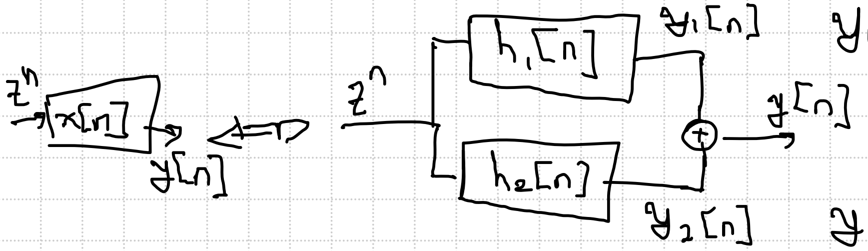
$\Rightarrow$ polo $\notin ROC$.

Veremos que polos ditam comportamento do sistema.

Polos e ROC.

Exemplos: $x[n] = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{h_1[n]} - \underbrace{2^n u[-n-1]}_{h_2[n]}$

$H_1(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2z}}$ $\quad |z| > \frac{1}{2}$ $\qquad H_2(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{z}}$ $\quad |z| < 2$



$$y_1[n] = \begin{cases} H_1(z)\, z^n & |z| > \frac{1}{2} \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

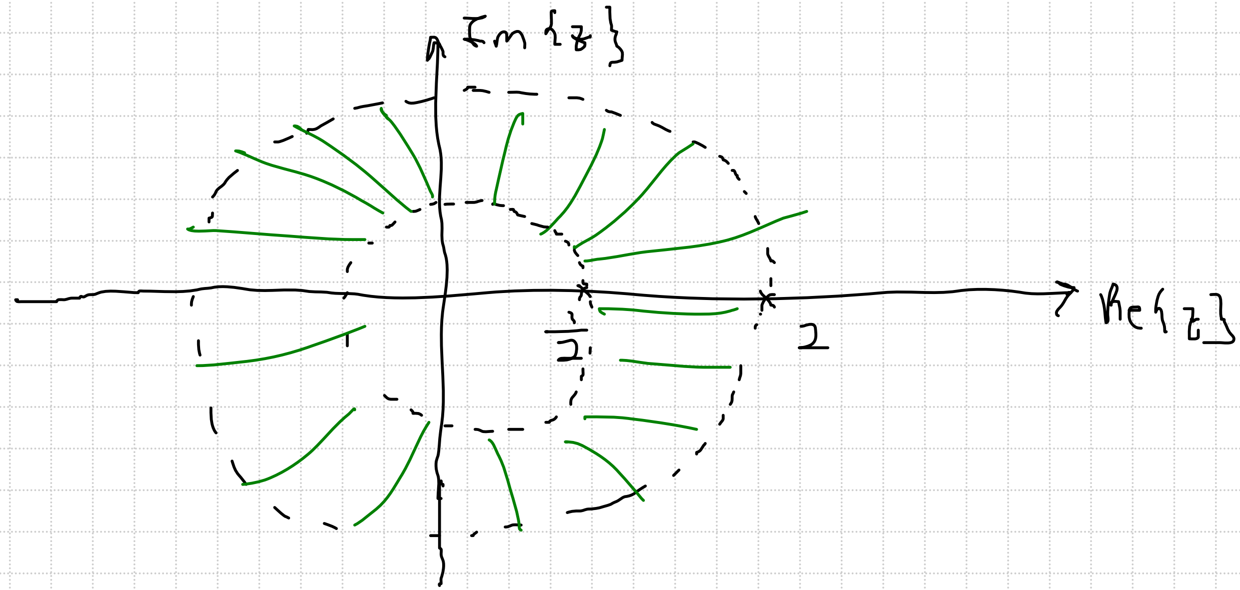
$$y_2[n] = \begin{cases} H_2(z)\, z^n & |z| < 2 \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} z^n \left(H_1(z) + H_2(z) \right) & \frac{1}{2} < |z| < 2 \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} + \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1 - \frac{5}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - 2 z^{-1}\right)}$$

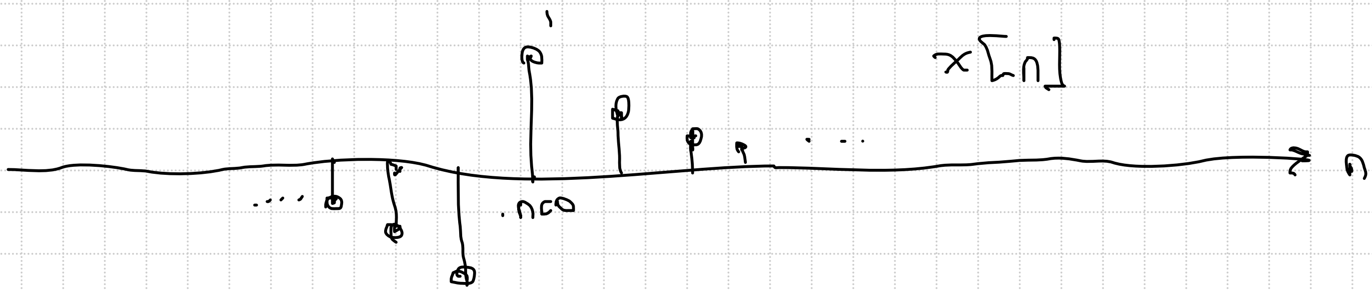
Polos: $z = \frac{1}{2}$ e $z = 2$

ROC: entre os polos



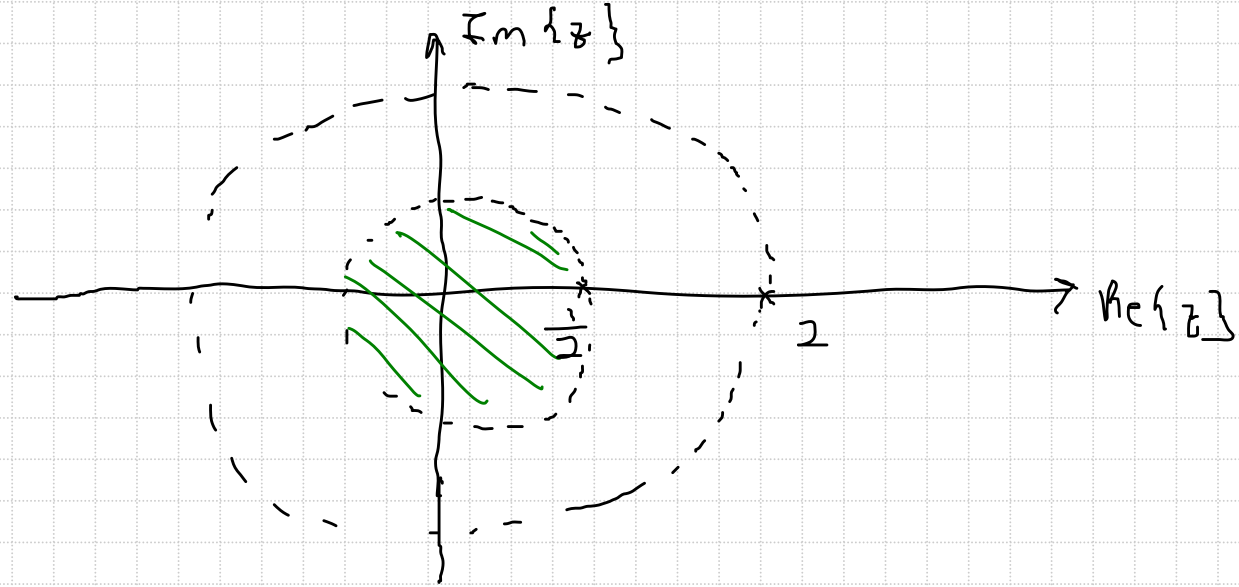
Nota: sistema é estável, $z=1 \in$ RoC

Não é causal, $z=\infty \notin$ RoC



Exemplo: $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2^n u[-n-1]$

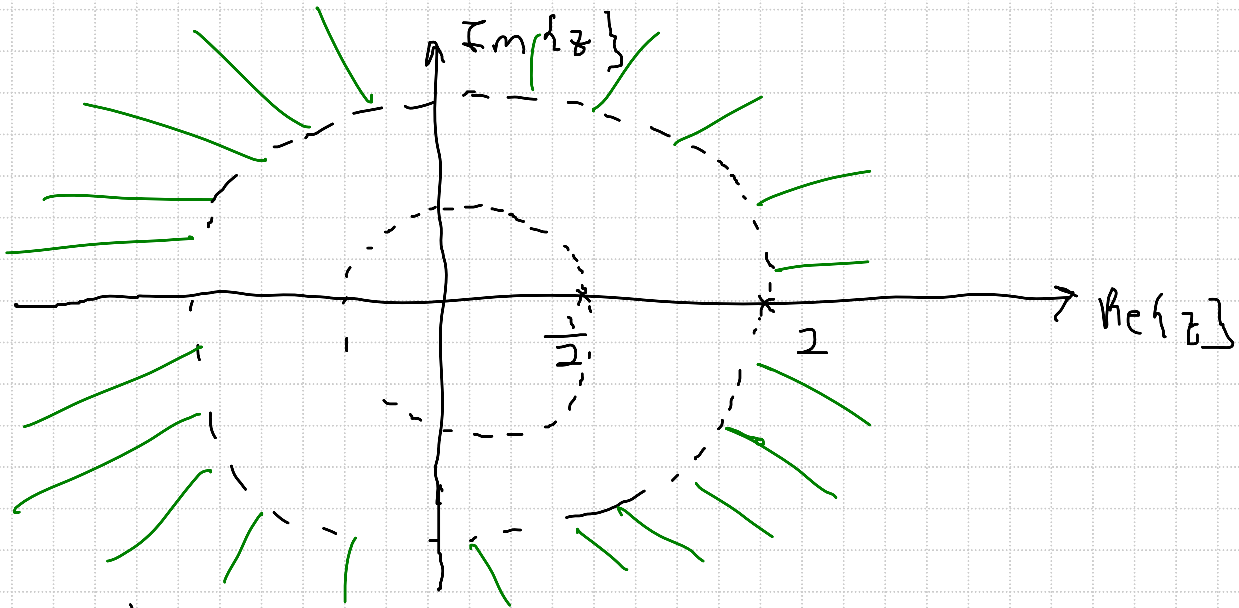
$$X(z) = \frac{1 - \frac{5}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)} \qquad \text{ROC: } |z| < \frac{1}{2}$$



Nota: sistema é instável ($z=1 \notin$ ROC) e anticausal ($z=0 \in$ ROC)

Exemplo: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[n]$

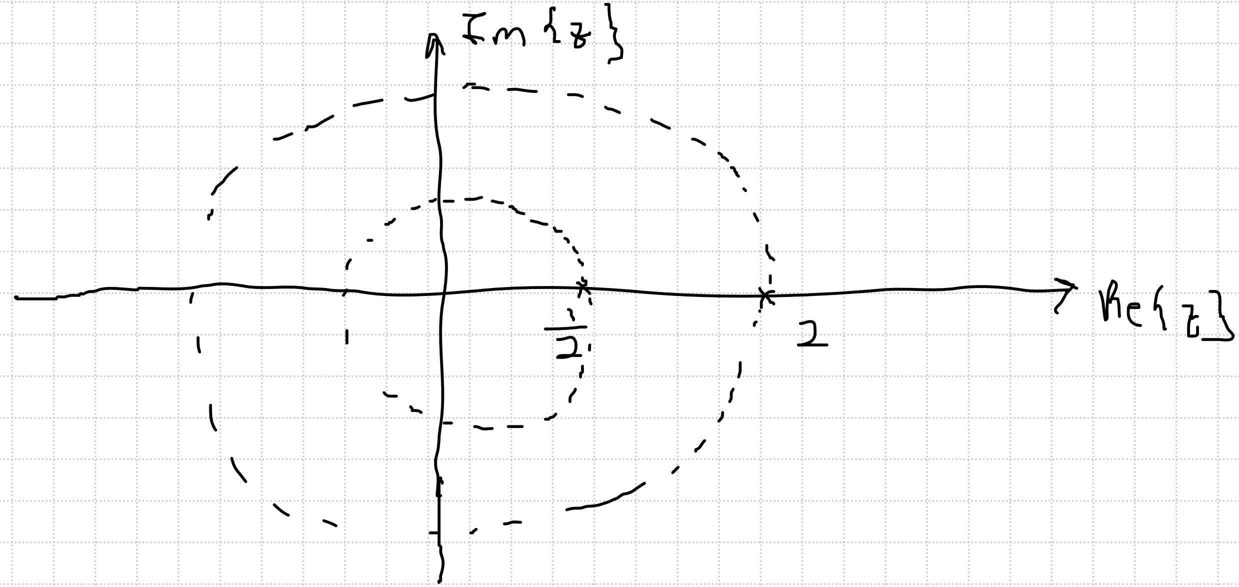
$$X(z) = \frac{1 - \frac{5}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} \qquad \text{ROC: } |z| > 2$$



Nota: sistema é instável ($z = 1 \notin$ ROC) e causal ($z = \infty \in$ ROC)

Exemplo: $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + 2^n u[n]$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{5}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - 2 z^{-1}\right)} \qquad \text{ROC}: \emptyset$$



Nota: sistema é instável ($z = 1 \notin$ ROC) e não é causal ($z = \infty \notin$ ROC)

Conclusão, que vale em geral: transformadas racionais possuem 4 tipos de ROC:

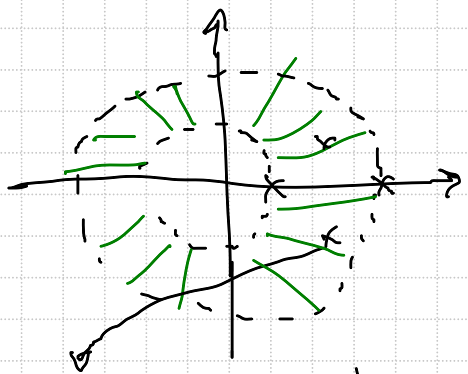
i) Vazio

ii) Do zero até polo de menor módulo

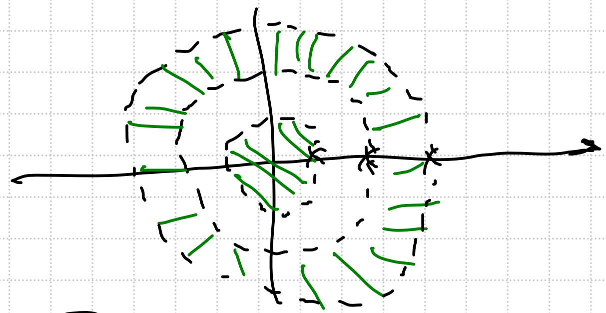
iii) Para fora do polo de maior módulo

iv) Entre dois pólos.

Nota: ROC nunca "atravessa" polo e sempre é conexa. Exemplos que nunca acontecem.



atravessando polos



Desconexo.

Problema: Onde estão os polos de um sistema causal e estável?