

Objetivos: Estudar relação de ROC com os conceitos de estabilidade e causalidade.

Definição mais precisa de ROC:

$$\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty\}$$

Notas:

1. Se $z \in \text{ROC}$,

$$|H(z)| = \left| \sum h[n]z^{-n} \right| \leq \sum |h[n]z^{-n}| < \infty$$

$$\Rightarrow |H(z)| < \infty$$

2. Seja z na forma polar, $z = re^{j\omega}$, com

$$r = |z|, \quad w = |z|$$

$$\Rightarrow |h[n]z^{-n}| = |h[n]| |z^{-n}| = |h[n]| r^{-n}$$

o fato de z pertencer à ROC só depende de $|z|$.

Estabilidade e ROC.

Definição:

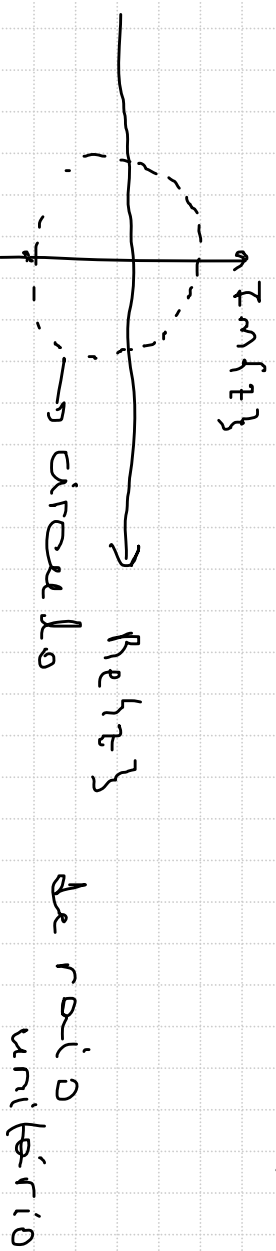
Sistema é estável se entradas limitadas levam

a saídas limitadas (saída não "explode")

$\Rightarrow \sum |h[n]| < \infty$ (prova, ver Openheim)

ROC: $\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \sum |h[n]| r^{-n} < \infty\}$

Conclusão: estável se e somente se $r=1 \in \text{ROC}$

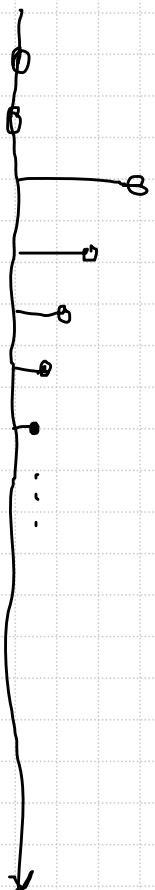


Example: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ $g[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}$ $|z| > 1$ $G(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}$ $|z| < 1$

$z=1 \in \text{ROC de } H(z)$ $z=1 \notin \text{ROC de } G(z)$

$h[n]$:

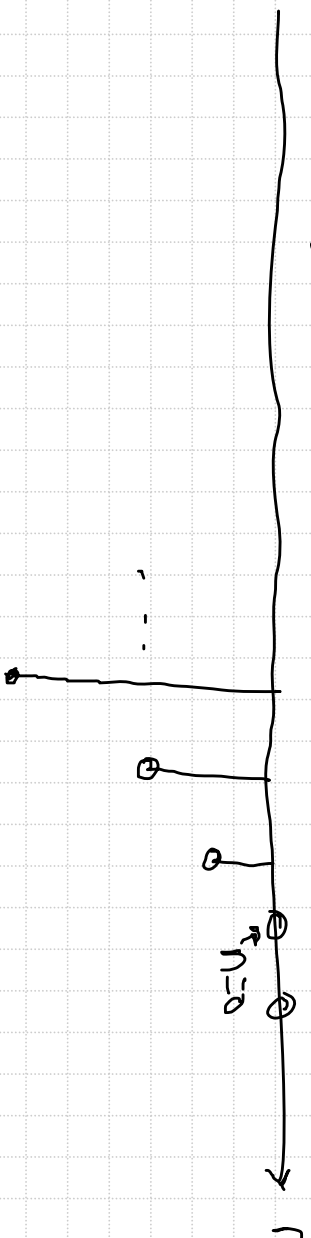


$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Note: $H(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n](1)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$

$\Rightarrow H(1) = \text{nível d.c.}$ se $z=1 \in \text{ROC}$

$$g[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] = \infty$$

$$G(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} \quad |z| < 1$$

$$G(z)|_{z=1} = 2 \neq \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]$$

Como $z=1 \notin \text{ROC}$, $G(1)$ não é nível dc.

Causalidade e ROC:

Sistemas causais: saída só depende da entrada no presente e no passado.

Se entrada é $x[n]$, saída só pode começar a aparecer depois da aplicação do impulso

$$\Rightarrow h[n] = 0 \quad n < 0$$

Por outro lado, se $h[n] = 0, n \leq 0$, então

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

$\Rightarrow y[n]$ só depende de $x[n]$ ($k=0$), $x[n-1]$ ($k=1$), $x[n-2]$ ($k=2$), ...

$\Rightarrow$ Causal

Propriedade:

Para sistemas causais, ROC vai até ∞

Para sistemas anticausais ($h[n] = 0, n \geq 0$)

ROC inclui a origem

