Sobre o ganho de L na interpolação:

$x(t) = e^{j0t} = 1 \Rightarrow X(j\Omega) = 2\pi\,\delta(\Omega)$

→ Taxa T_1 → $x_1[n] = 1 \Rightarrow X_1(e^{j\omega}) = 2\pi \sum \delta(\omega - 2k\pi)$

→ Taxa T_2 → $x_2[n] = 1 \Rightarrow X_2(e^{j\omega}) = 2\pi \sum \delta(\omega - 2k\pi)$

Pelas regras de 3, Ω vai a $\omega = \Omega T_s$

$\Rightarrow X_1(e^{j\omega})$ deveria conter $\delta(\omega/T_1) = T_1\,\delta(\omega)$

$\Rightarrow X_2(e^{j\omega})$ deveria conter $\delta(\omega/T_2) = T_2\,\delta(\omega)$

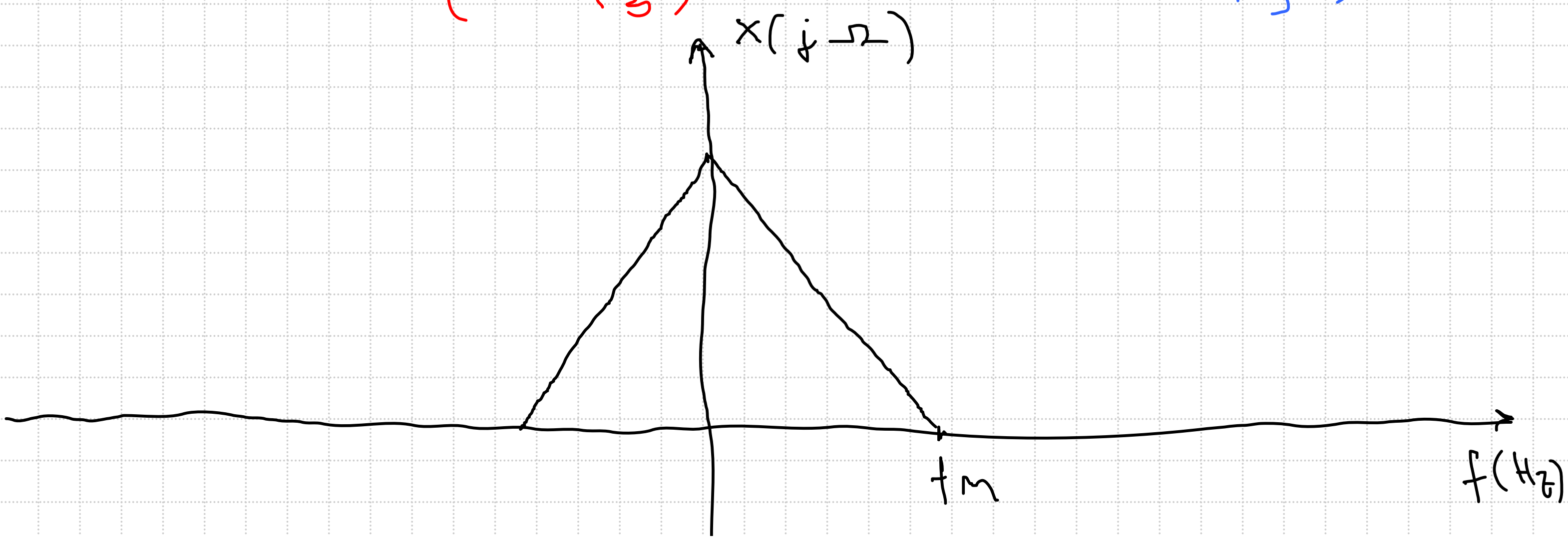
Porque não aparece T_1 e T_2?

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum X\left(j\,\frac{\omega - 2k\pi}{T_s}\right)$$

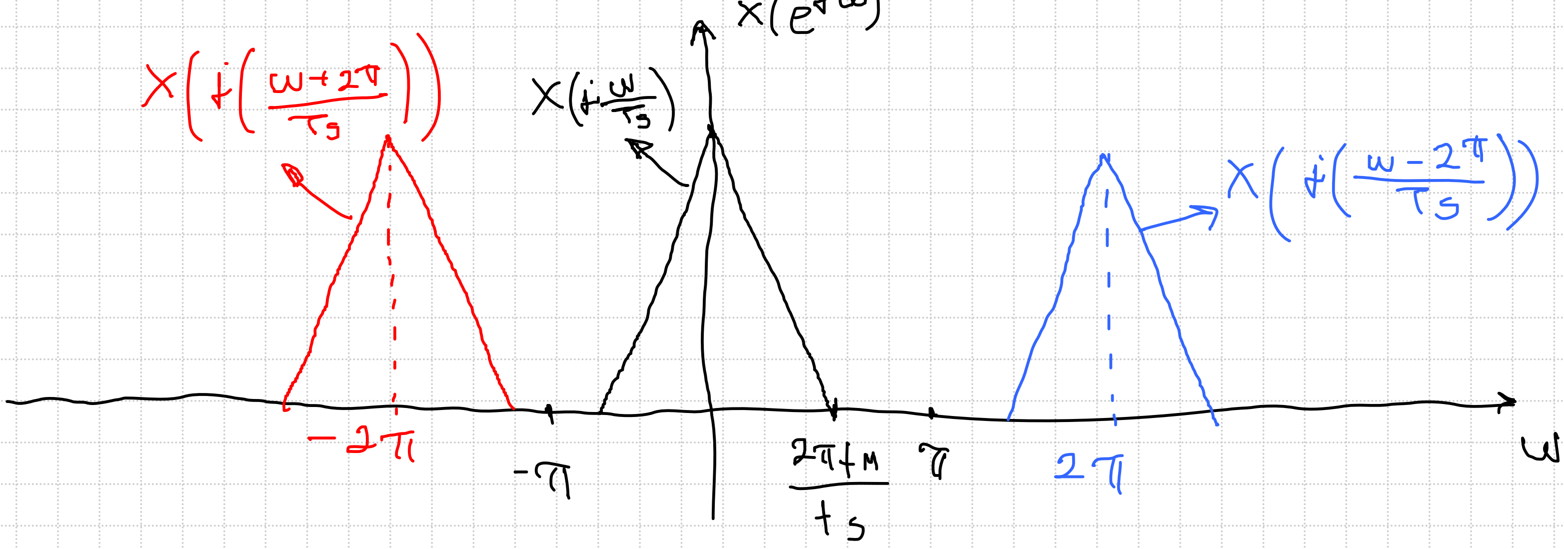
Olhando para um w digital dado, a fórmula diz que $X(e^{jw})$ vai receber contribuições das frequências analógicas $\Omega = w/T_s$, e daquelas separadas de Ω/T_s da frequência de amostragem: $\frac{w}{T_s} + \frac{2\pi}{T_s}$, $\frac{w}{T_s} - \frac{2\pi}{T_s}$, ...

Vamos abrir a somatória:

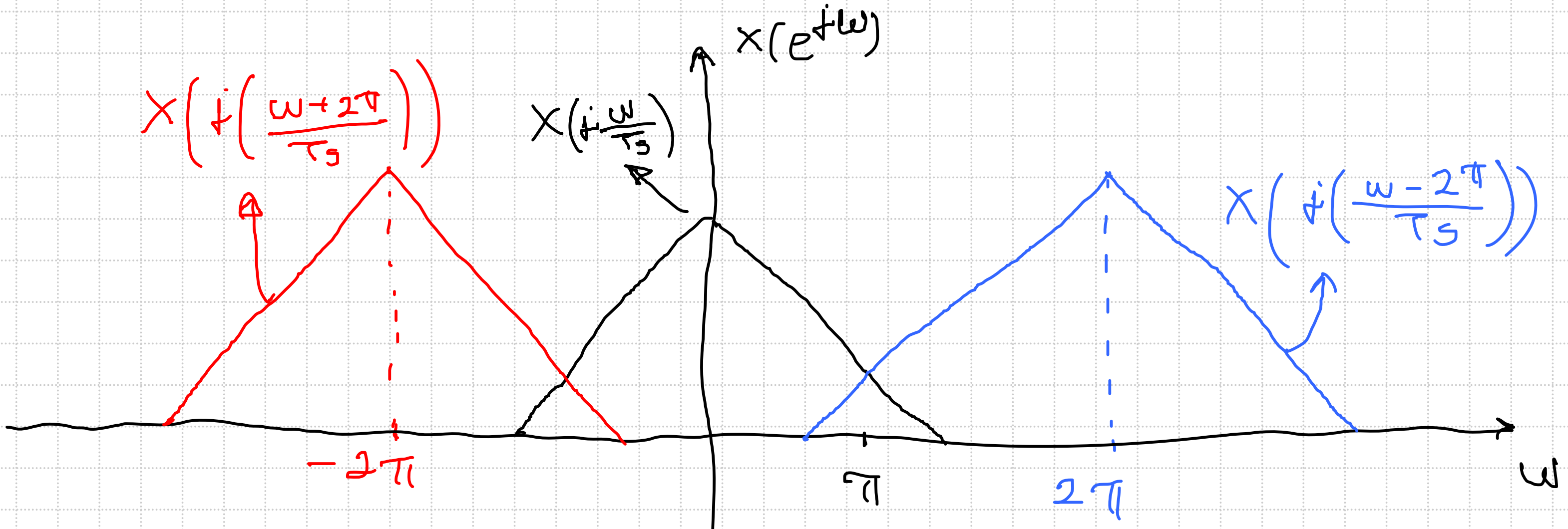
$$X(e^{jw}) = \cdots + X\left(j\,\frac{w+2\pi}{T_s}\right) + X\left(j\,\frac{w}{T_s}\right) + X\left(j\,\frac{w-2\pi}{T_s}\right) + \cdots$$



$$f_s > 2f_m \Rightarrow \frac{2\pi f_M}{f_s} < \pi$$



$$f_s < 2f_m \Rightarrow \frac{2\pi f_m}{f_s} > \pi$$



Inserir zeros não introduz esse ganho.

Sobre o filtro de interpolação. São dados $N+1$ coeficientes $h_0, \ldots, h_N \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N} h[n] e^{-j\omega n}$

Uma técnica de projeto de filtros:

minimizar erro entre $H(e^{j\omega})$ e uma resposta desejada:

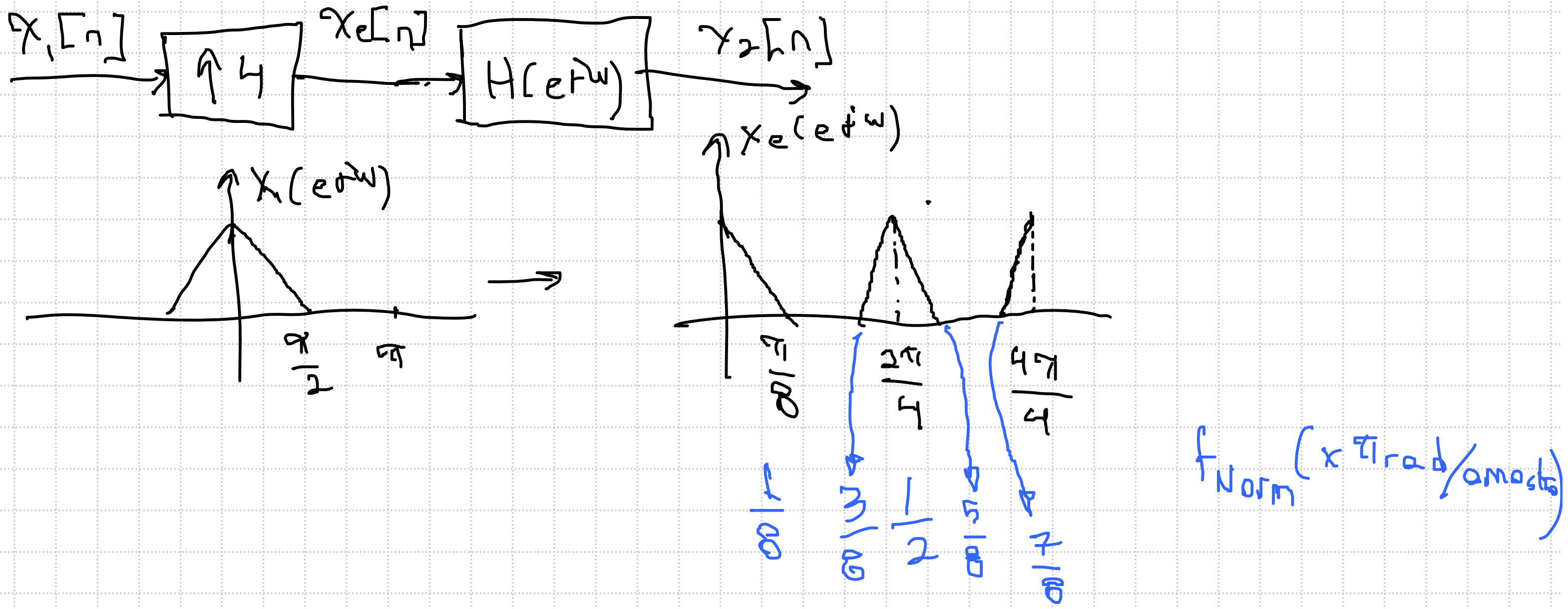
$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{N} h[n] e^{-j\omega n} - H_d(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

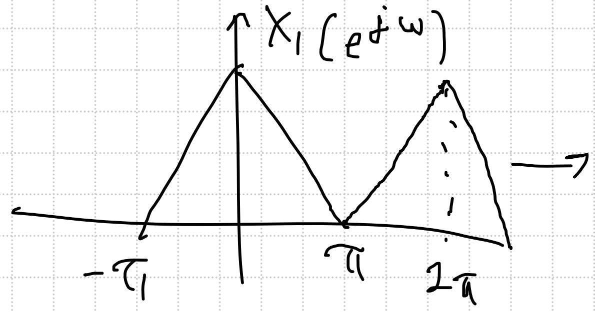
Otimização depende dos $N+1$ parâmetros $h[n]$.

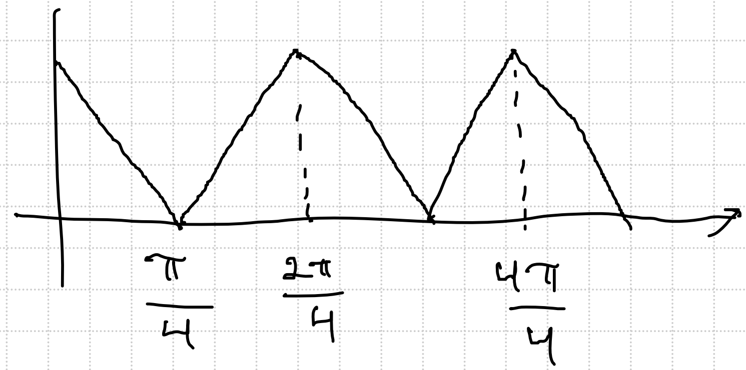
É uma quadrática, fácil de resolver.

Se não restringir em $(-\pi, \pi)$, posso fazer um trabalho melhor no resto com os mesmos coeficientes



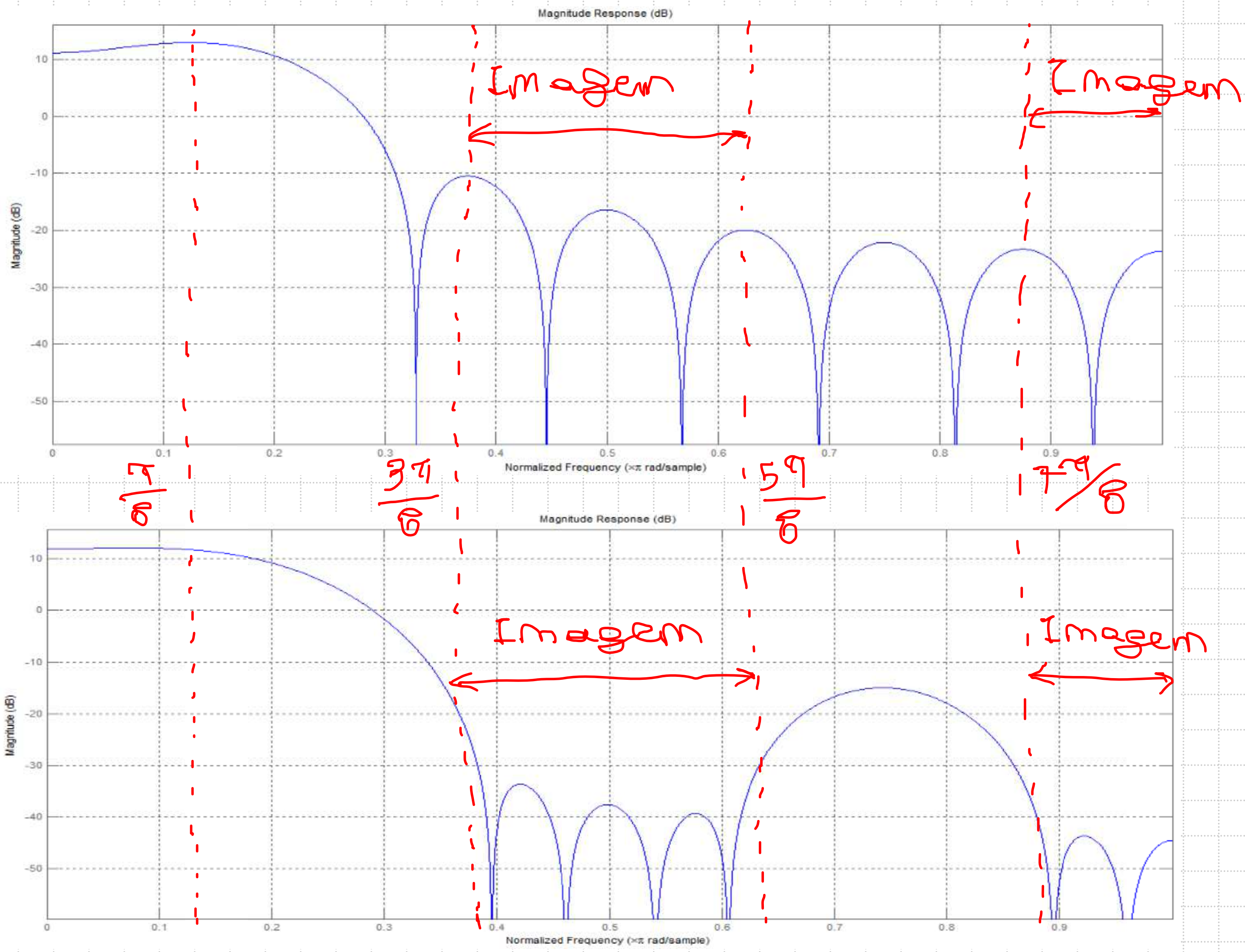
Se não assumirmos que $X_1(e^{j\omega})$ está limitado a $\pi/2$,





Filtro 1: passa até $\pi/4$, corta o resto

Filtro 2: passa até $\pi/8$, corta imagens


Magnitude Response (dB)
Magnitude (dB)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Imagem
Imagem
π/8
3π/8
5π/8
7π/8
Magnitude Response (dB)
Magnitude (dB)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Imagem
Imagem

Filtro 2 tem faixa de passagem mais plana e melhor rejeição de imagens!

Para mudar taxa de amostragem de um fator racional L/M, podemos aumentar de L e diminuir de M ou vice-versa.

Pergunta: Em qual ordem devemos aplicar os processos? Desconsidere complexidade computacional

a) $x_1[n] \rightarrow \boxed{H_1(e^{j\omega})} \rightarrow \boxed{\downarrow M} \rightarrow \boxed{\uparrow L} \rightarrow \boxed{H_2(e^{j\omega})} \rightarrow x_2[n]$

b) $x_1[n] \rightarrow \boxed{\uparrow L} \rightarrow \boxed{H_2(e^{j\omega})} \rightarrow \boxed{H_1(e^{j\omega})} \rightarrow \boxed{\downarrow M} \rightarrow x_2[n]$

Solução: Suponha que desejamos reamostrar a 1,5 vezes a taxa original. Podemos dividir por 2 ($M=2$) depois triplicar ($L=3$) ou vice-versa. Mas se usamos $M=2$ primeiro, devemos jogar fora todas as freqs. de $x_1[n]$ após $\pi/2$. Interpolação não vai conseguir recuperar essas frequências. Na outra ordem esse problema não se coloca.