UNICAMP – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
EA-619 Introdução à Simulação Analógica

Experiência 3: Equações Diferenciais Lineares

16 de setembro de 2004

Sumário

1 Introdução

Vários sistemas físicos e econômicos podem ser modelados matematicamente através de equações diferenciais lineares. O objetivo desta experiência é analisar algumas propriedades desta classe de sistemas dinâmicos.

Exemplo 1 - Considere um tanque para aquecimento de um fluido, mostrado na Fig. 1. O tanque contém um dispositivo de aquecimento e um agitador para assegurar que todo o fluido esteja à mesma temperatura T. Supõe-se que a vazão de entrada W é igual à vazão de saída e que a temperatura T do fluido efluente é a mesma do fluido no interior do tanque. Seja

C : Calor específico do fluido (cal/Kg.^{0}C);

ρ : Densidade do fluido (Kg/m^3);

V : Volume do fluido (m^3);

T_e: Temperatura do fluido na entrada do tanque (^{0}C);

Q : Quantidade de calor fornecida (cal);

T : Temperatura do fluido no tanque e na saída do tanque (^{0}C);

W: Vazão de entrada e de saída (kg/min);

t : Variável tempo (min).

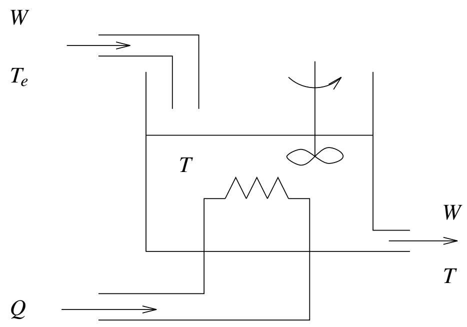

Figura 1: Sistema Térmico de 1a. Ordem

O modelamento deste tipo de sistema é feito pelas equações de balanço de massa e de energia. Para o caso em análise, como os fluxos de entrada e de saída são iguais, o balanço de massa não introduz nenhuma equação de interesse. Entretanto, o balanço de energia fornece

$$\rho VC\frac{d}{dt}T(t) = WCT_e + \frac{d}{dt}Q(t) - WCT(t) \tag{1}$$

ou, rearranjando e introduzindo a notação $\dot{T} \triangleq \frac{d}{dt}T(t)$; $\dot{Q} \triangleq \frac{d}{dt}Q(t)$, vem

$$\dot{T} + \frac{W}{\rho V}T = \frac{W}{\rho V}T_e + \frac{1}{\rho VC}\dot{Q} \tag{2}$$

Diz-se que a equação diferencial (2) que descreve o processo é *linear* de 1a. ordem. As funções do tempo $T_e(t)$ e $Q(t)$ são chamadas de *funções de entrada*. É importante ainda especificar o valor da temperatura no instante a partir do qual o seu comportamento será analisado (por exemplo $T(0)$), isto é, a *condição inicial* do sistema.

Exemplo 2 - Considere os sistemas mecânico e elétrico da Fig. 2. Para o sistema mecânico, seja

K: Constante da mola (N/m);

M: Massa (Kg);

B: Coeficiente de atrito (N.s/m);

F: Força (N);

x: Deslocamento (m).

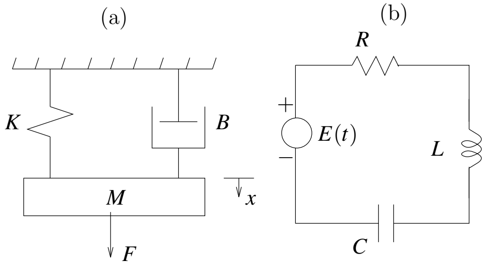

Figura 2: (a) Sistema Massa-Mola-Atrito: (b) Circuito RLC Série

Através das leis da mecânica, obtém-se

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t) + B\frac{d}{dt}x(t) + Kx(t) = F(t) \tag{3}$$

ou,

$$\ddot{x} + \frac{B}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = \frac{1}{M}F \tag{4}$$

Para o sistema elétrico, seja

R: Resistência (Ω);

L: Indutância (H);

C: Capacitância (F);

$E(t)$: Tensão de entrada (V);

$q(t)$: Carga (C).

A equação de malha do circuito fornece

$$L\frac{d^2}{dt^2}q(t) + R\frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t) \tag{5}$$

ou, do mesmo modo,

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E \tag{6}$$

As equações diferenciais (4) e (6) são chamadas de equações diferenciais lineares de 2a. ordem. Analogamente ao Exemplo 1, as funções $F(t)$ e $E(t)$ são chamadas de funções de entrada.

2 Equações Diferenciais Lineares

A seguir, discute-se como obter soluções analíticas para equações diferenciais como as dos Exemplos 1 e 2.

2.1 Equação Diferencial Linear de 1a. Ordem Homogênea

A equação diferencial homogênea mais simples tem a forma

$$\dot{x} = \lambda x, \qquad x(0) = x_0 \tag{7}$$

onde $x = x(t)$ é uma função real da variável real t (associada nos exemplos anteriores ao tempo) a ser determinada e λ é uma constante real dada. Supõe-se que a condição inicial ou valor de x no instante $t = 0$, $x(0) = x_0$ é conhecida. A solução única da equação (7) é dada por

$$x(t) = \exp(\lambda t)x_0 \tag{8}$$

O comportamento qualitativo da solução $x(t)$ é mostrado na Fig. 3, em função do sinal da constante real λ. Note que

1. Se $\lambda > 0$ então $\lim_{t\to\infty} \mid x(t) \mid = \infty$ é divergente, e diz-se neste caso que o sistema descrito pela equação diferencial é *instável*;
2. Se $\lambda = 0$ então $x(t) = x_0, \quad t \geq 0$ e o sistema é *estável*;
3. Se $\lambda < 0$ então $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ e o sistema é *assintoticamente estável*.

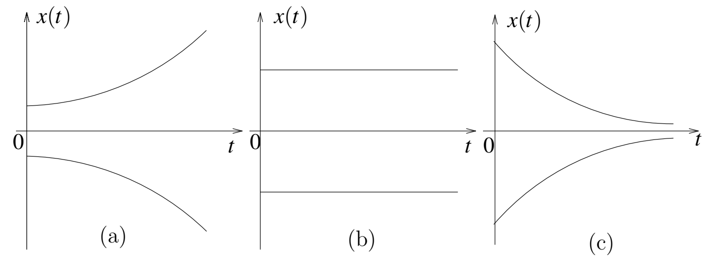

Figura 3: (a) Sistema Instável ($\lambda > 0$); (b) Sistema Estável ($\lambda = 0$); (c) Sistema Assintoticamente Estável ($\lambda < 0$).

2.2 Equação Diferencial Linear de 2a. Ordem Homogênea

Uma equação diferencial linear de 2a. ordem homogênea envolve a derivada de 2a. ordem da variável dependente e pode ser representada genericamente como

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = Dx_0 \tag{9}$$

Devido à semelhança desta equação com a equação de 1a. ordem apresentada na seção anterior, supõe-se que a solução é do mesmo tipo, ou seja,

$$x(t) = \exp(\lambda t) \tag{10}$$

Substituindo esta solução na equação (9), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda \exp(\lambda t) && (11)\\ \ddot{x} &= \lambda^2 \exp(\lambda t) && (12)\\ \ddot{x} &+ a\dot{x} + bx = (\lambda^2 + a\lambda + b)\exp(\lambda t) = 0 && (13) \end{aligned}$$

Dado que a função $\exp(\lambda t)$ nunca se anula, uma condição necessária para que (10) seja solução de (9) será

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{14}$$

Esta equação algébrica é chamada de *Equação Característica* da equação diferencial (9) e possui em geral duas raízes distintas, λ_1 e λ_2. Portanto, as funções

$$\exp(\lambda_1 t) \quad \text{e} \quad \exp(\lambda_2 t) \tag{15}$$

satisfazem a equação (9) a menos das condições iniciais. Por outro lado, se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ satisfazem a equação (9), é fácil verificar que o mesmo ocorre com $f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$, bastando para tanto que se substitua $f(t)$ em (9). Deste modo, uma solução para a equação (9) é

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{16}$$

onde λ_1 e λ_2 são as raízes da equação (14). O tipo de solução da equação diferencial dependerá da natureza destas raízes.

2.2.1 Raízes Reais e Distintas

Se λ_1 e λ_2 são valores reais e distintos tem-se então que

$$\dot{x}(t) = k_1\lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2\lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{17}$$

e portanto

$$\begin{aligned} x(0) &= k_1 + k_2 = x_0 && (18)\\ \dot{x}(0) &= k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = Dx_0 && (19)\\ k_1 &= \frac{-Dx_0 + \lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} && (20)\\ k_2 &= \frac{Dx_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} && (21) \end{aligned}$$

Este resultado permite concluir que, se $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, a solução dada por (16) é geral, pois pode ser calculada para quaisquer valores de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Além disso, é possível mostrar que esta solução é única.

2.2.2 Raiz Real Dupla

Neste caso, $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ e portanto

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) = (k_1 + k_2)\exp(\lambda t) = k_3 \exp(\lambda t) \tag{22}$$

Esta solução não é geral, pois existe apenas uma incógnita (k_3) e não é possível resolver o sistema

$$\begin{aligned} x(0) &= k_3 = x_0 && (23)\\ \dot{x}(0) &= k_3\lambda = Dx_0 && (24) \end{aligned}$$

para quaisquer valores de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Entretanto, considere a seguinte função

$$x(t) = t\exp(\lambda t) \tag{25}$$

Esta função satisfaz a equação diferencial, pois

$$\begin{aligned} \dot{x} &= t\lambda \exp(\lambda t) + \exp(\lambda t) && (26)\\ \ddot{x} &= \lambda[t\lambda \exp(\lambda t) + \exp(\lambda t)] + \lambda \exp(\lambda t) && (27)\\ \ddot{x} &+ a\dot{x} + bx = t\exp(\lambda t)(\lambda^2 + a\lambda + b) + \exp(\lambda t)(2\lambda + a) && (28) \end{aligned}$$

A expressão entre parênteses é nula pois λ é solução da equação característica. A expressão no segundo parênteses também é nula pois $\lambda = -a/2$. Conseqüentemente (25) satisfaz a equação diferencial, o mesmo ocorrendo com a combinação linear de funções

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda t) + k_2 t \exp(\lambda t) \tag{29}$$

Usando-se as condições iniciais, obtém-se os valores de k_1 e k_2:

$$\begin{aligned} k_1 &= x_0 && (30)\\ k_2 &= Dx_0 - x_0\lambda && (31) \end{aligned}$$

A solução representada por (29) é geral para o caso $\lambda_2 = \lambda_1$ uma vez que é possível calcular k_1 e k_2 para quaisquer valores iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

2.2.3 Raízes Complexas

A solução da equação diferencial neste caso envolverá a chamada *Fórmula de Euler*, a saber

$$\exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta \tag{32}$$

Se λ é uma raiz complexa da equação (14) então $\overline{\lambda}$ (conjulgado de λ) também é raiz da mesma equação. Sejam

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sigma + j\omega & (33) \\ \lambda_2 &= \sigma - j\omega, \quad \omega \neq 0 & (34) \end{aligned}$$

as raízes da equação característica. Considere a solução dada por (16), ou seja,

$$x(t) = k_1\exp(\lambda_1 t) + k_2\exp(\lambda_2 t) = k_1\exp[(\sigma + j\omega)t] + k_2\exp[(\sigma - j\omega)t] \tag{35}$$

Utilizando (32), obtém-se

$$x(t) = \exp(\sigma t)[A\cos\omega t + B\sin\omega t] \tag{36}$$

onde $A = k_1 + k_2$ e $B = j(k_1 - k_2)$. Usando as condições iniciais, obtém-se

$$\begin{aligned} x(0) &= A = x_0 & (37) \\ \dot{x}(0) &= \sigma A + B\omega = Dx_0 & (38) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} A &= x_0 & (39) \\ B &= \frac{Dx_0 - \sigma x_0}{\omega} & (40) \end{aligned}$$

Em conseqüência, se $\omega \neq 0$ é possível obter A e B para quaisquer valores iniciais de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Assim sendo, (36) é uma solução geral quando as raízes da equação característica são complexas. O comportamento qualitativo da solução $x(t)$ é analisado nas Figs. 4 e 5, a seguir. A resposta do sistema no caso de raízes duplas é qualitativamente similar ao representado na Fig. 4.

3 Equações Lineares Não-Homogêneas

Seja a equação diferencial linear de 2a. ordem não-homogênea dada a seguir

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u(t), \quad x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = Dx_0 \tag{41}$$

Seja $x_p(t)$ uma solução qualquer desta equação e $x_h(t)$ a solução da equação homogênea (quando $u(t) = 0,\ \forall t$). Tem-se então que

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{42}$$

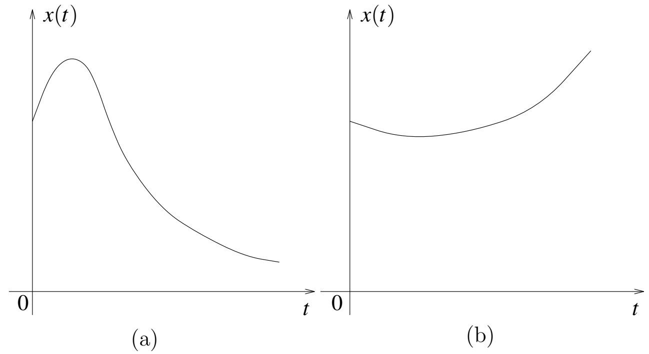

Figura 4: Raízes Reais e Distintas. (a) Raízes negativas; (b) Uma raiz positiva.

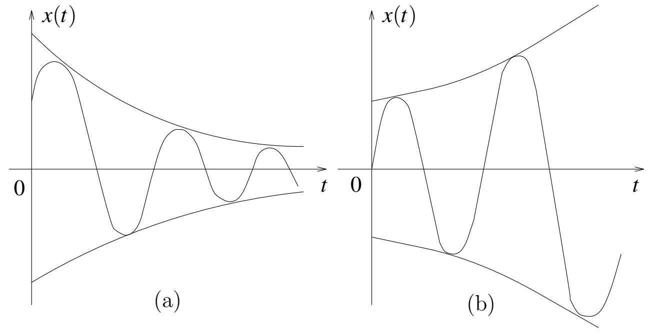

Figura 5: Raízes Complexas. (a) Parte real negativa; (b) Parte real positiva.

é uma solução da equação (41). De fato, substituindo-se (42) em (41), vem

$$(\ddot{x}_h + a\dot{x}_h + bx_h) + \ddot{x}_p + a\dot{x}_p + bx_p = 0 + u(t) \tag{43}$$

Além disso, fazendo

$$\begin{aligned} x(0) &= x_h(0) + x_p(0) & (44) \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_h(0) + \dot{x}_p(0) & (45) \end{aligned}$$

é sempre possível encontrar uma solução para (41) quaisquer que sejam as condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Conclui -se portanto que (42) é uma solução geral para a equação não-homogênea (41). Estes fatos são verdadeiros para equações diferenciais lineares não-homogêneas, independentemente de suas ordens.

O problema se resume então em obter $x_p(t)$, que é chamada de *solução particular*.

Esta solução depende obviamente da função $u(t)$. Nesta experiência, considera-se apenas o caso particular em que $u(t)$ é uma função constante, isto é, $u(t) = E$ (constante).

Suponha que a solução particular é do tipo $x_p(t) = K$, $\forall t$, onde K é uma constante a determinar. Neste caso, é fácil ver que $\ddot{x}_p(t) = \dot{x}_p(t) = 0$ e que a equação

$$\ddot{x}_p + a\dot{x}_p + bx_p = bK = E \tag{46}$$

permite obter $K = E/b$. É comum considerar a função $u(t)$ como sendo a *função degrau*, ou seja,

$$u(t) = \begin{cases} E & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \tag{47}$$

Neste caso, considerando o instante inicial igual a 0, a solução particular obtida não se altera, ou seja,

$$x_p(t) = \frac{E}{b}, \quad t \geq 0 \tag{48}$$

As Figs. 6 e 7, a seguir, ilustram o comportamento qualitativo da solução geral (42), para os três casos analisados anteriormente, supondo-se condições iniciais nulas ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$). Como no caso anterior, a resposta do sistema com raízes duplas é qualitativamente similar à representada na Fig. 6.

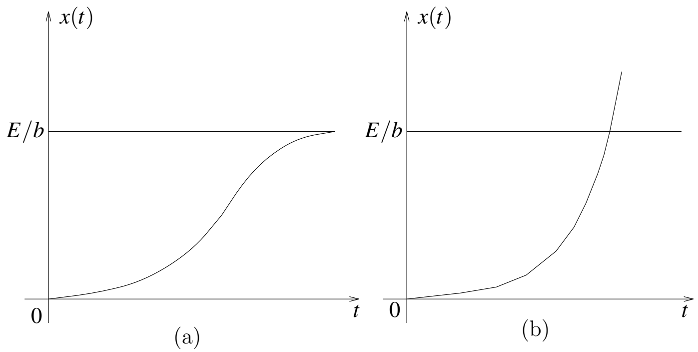

Figura 6: (a) Raízes negativas; (b) Uma raiz positiva.

Considere agora o caso de uma equação diferencial linear não-homogênea de 1a. ordem, na forma

$$\dot{x} - \lambda x = u(t) \tag{49}$$

Se $u(t) = E$, a solução particular será também do tipo $x_p(t) = K$, conforme pode ser visto através de (49):

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - \lambda x_p &= E \qquad (50) \\ -\lambda K &= E \qquad (51) \end{aligned}$$

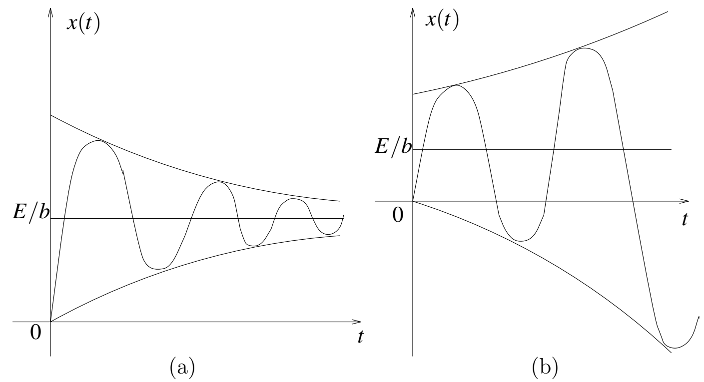

Figura 7: (a) Parte real negativa; (b) Parte real positiva.

e assim $K = -E/\lambda$. A solução geral é obtida através da composição de (8) com a solução particular, fornecendo,

$$x(t) = \exp(\lambda t)x_h(0) - \frac{E}{\lambda}, \quad x_h(0) = x(0) + \frac{E}{\lambda} \tag{52}$$

Analogamente ao caso estudado anteriormente, esta solução não se altera para $t \geq 0$ se a entrada for a função degrau. O comportamento qualitativo da solução (52) é ilustrado na Fig. 8, a seguir, para $x(0) = 0$. No caso de sistemas estáveis de 1a. ordem, a grandeza

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} > 0 \tag{53}$$

é chamada de *constante de tempo* do sistema. A constante de tempo corresponde ao instante no qual a variável dependente atinge aproximadamente 64% de seu valor de regime (o valor de regime é $\lim_{t\to\infty} x(t) = -E/\lambda$). De fato, para $t = \tau = -1/\lambda$ e $x(0) = 0$, tem-se que

$$x(-\frac{1}{\lambda}) = -\frac{E}{\lambda}(1 - \exp(-1)) \approx 0.64(-\frac{E}{\lambda}) \tag{54}$$

Para $t = 3\tau$, constata-se que a variável dependente atinge cerca de 95% do seu valor de regime.

4 Forma Canônica da Equação de 2a. Ordem

A equação diferencial linear de 2a. ordem é freqüentemente escrita na sua *forma canônica*, dada a seguir.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = u(t) \tag{55}$$

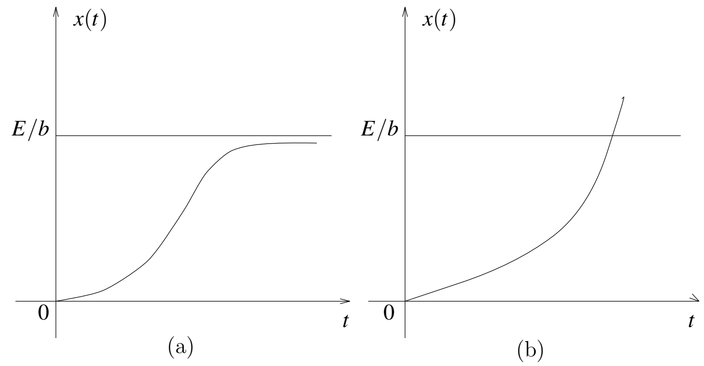

Figura 8: (a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$.

De acordo com os resultados obtidos anteriormente, o comportamento da solução de (55) é definido pelas raízes da equação característica

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \tag{56}$$

com $\omega_n > 0$. As raízes da equação são

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{57}$$

$$\lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{58}$$

É fácil ver que

1. Se $|\,\xi\,| > 1$, obtém-se duas raízes reais distintas;
2. Se $|\,\xi\,| = 1$, obtém-se uma raiz dupla;
3. Se $|\,\xi\,| < 1$, obtém-se raízes complexas conjugadas.

Neste último caso, é possível reescrever as raízes da equação na forma

$$\lambda_1 = \omega_n(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) \tag{59}$$

$$\lambda_2 = \omega_n(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2}) \tag{60}$$

ou ainda,

$$\lambda_1 = \omega_n(-\cos\theta + j\sin\theta) \tag{61}$$

$$\lambda_2 = \omega_n(-\cos\theta - j\sin\theta) \tag{62}$$

onde $\theta = \arccos\xi$. Analisando as raízes no plano complexo (Fig. 9), observa-se que se $\xi = 0$, as raízes serão números complexos puros e a solução da equação homogênea será, de acordo com a equação (36),

$$x_h(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t \tag{63}$$

onde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{64}$$

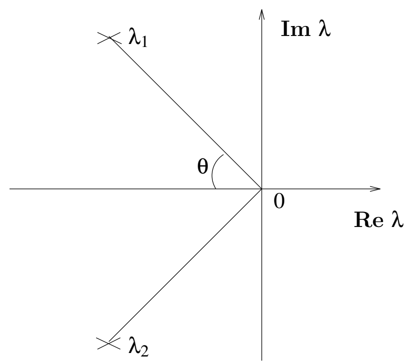

Figura 9: Localização no Plano Complexo. A distância de λ_1 ou λ_2 à origem é igual a ω_n.

Por esta razão, o parâmetro ω_n é chamado de *freqüência natural* da equação (55). Para um dado valor de ω_n, quanto maior for o valor de ξ $(0 < \xi < 1)$, maior será o módulo da parte real das raízes e, em consequência, mais *amortecida* será a solução. Devido a esta propriedade, o parâmetro ξ é chamado de *fator ou coeficiente de amortecimento* da equação (55).

Referências

[1] José C. Geromel, Álvaro G. B. Palhares, *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*, Ed. Edgar Blücher, 2004.

[2] Piskounov, N., *Cálculo Diferencial e Integral*, Vol. II, Lopes da Silva Editora, 1970.

Roteiro

1. Obtenha graficamente a resposta do sistema $\dot{x} - ax = u(t)$; $x(0) = 0$, $u(t) = 1$ nos seguintes casos: a) $a = 2$ e b) $a = -2$. Utilize o SIMULINK. Qual o valor de regime teórico no caso b) ? Compare com o resultado obtido.

2. Repita a simulação anterior para $a = -2$ e $u(t) = t$. Qual o valor de regime obtido ? Existe erro entre o valor de regime e o valor da entrada (*erro de regime*) ? Compare com o resultado teórico.

3. Obtenha graficamente a resposta do sistema

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 u(t)$$

para $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ e $u(t) =$ degrau unitário. Utilize um programa Matlab e a simulação do sistema no SIMULINK, de forma a traçar um conjunto de respostas $x(t)$ para diferentes valores do fator de amortecimento ξ e freqüência natural de oscilação ω_n. Considere as rotinas Matlab:

- `for` para criar a variação do parâmetro desejado;
- `sim` para acionar a simulação a partir do Matlab;
- `plot`, `hold on`, `clf` e `figure(n)` para manipulação das figuras;

Plote através dos comandos de manipulação de figuras todas as respostas na mesma figura para os casos

a) $\omega_n = 2$ e ξ variando na forma `0:0.2:2`

b) $\xi = 0.5$ e ω_n e variando na forma `0.5:0.5:2`

Responda então aos seguintes itens.

(a) Os comportamentos obtidos são compatíveis com os esperados teoricamente ?

(b) No caso $\xi = 2$ é possível dizer que uma das raízes da equação característica é predominante no comportamento transitório da variável de saída ? Por que ?

(c) Compare a sobre-elevação máxima (M_p) e o tempo em que esta ocorre (T_p), obtidos graficamente no caso $\xi = 0.5$, com os valores teóricos de M_p e T_p, de acordo com as expressões:

$$M_p = \frac{x_{\max}}{x_{\text{regime}}} = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) + 1, \quad T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

(d) Compare nos casos da figura b) a freqüência de oscilação obtida graficamente com as freqüências esperadas teoricamente.

4. Faça um teste sobre a possível validade do Princípio de Superposição. Este princípio é enunciado da seguinte maneira.

Princípio de Superposição: Considere duas entradas quaisquer $u_1(t)$ e $u_2(t)$ aplicadas a um sistema. Suponha que em resposta a $u_1(t)$ observa-se a resposta $x_1(t)$, e ao se aplicar $u_2(t)$ observa-se $x_2(t)$. O princípio de superposição é válido para o sistema em questão se para quaisquer entradas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, ao se introduzir uma nova entrada $u_3(t)$ definida como

$$u_3(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

para α e β escalares quaisquer, a resposta observada será exatamente

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

Considere então o sistema:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = u(t)$$

com $\omega_n = 2$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ e $\xi = 0.5$.

Adote dois valores de $u(t)$ distintos e verifique utilizando as respostas temporais obtidas no SIMULINK, se a superposição é válida para as entradas escolhidas.