



UNICAMP – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

EA-617 Introdução à Simulação Analógica

Experiência 8: Amostragem de Sinais Contínuos

9 de novembro de 2005

Sumário

1	Introdução	1
2	Série de Fourier	2
2.1	Série de Fourier Trigonométrica	2
2.2	Série de Fourier Exponencial	3
2.3	Transformada de Fourier	4
3	A Amostragem de Sinais	6
4	Convolução e Função Impulso	7
5	Teorema da Amostragem	9
6	Sinais de Banda Ilimitada	11
7	Filtragem	13
7.1	Segurador de Ordem Zero	14
7.2	Filtro Passa-Baixa de 2a. Ordem	17
	Roteiro	20

1 Introdução

No contexto de comunicações e controle, amostrar um sinal contínuo $f(t)$ significa substituir o sinal por seus valores num conjunto discreto de pontos, ou seja, substituir $f(t)$ por $f(t_k)$, onde k pertence ao conjunto dos inteiros.

Quando os instantes de amostragem são igualmente espaçados, isto é, $t_k = kT$, a amostragem é chamada **periódica**, com período T . A frequência correspondente $f_s = 1/T$ é chamada **frequência de amostragem**.

Nesta experiência, apresenta-se a descrição matemática do processo de amostragem, que conduz ao célebre Teorema de Shannon, que trata da frequência mínima de amostragem. Alguns filtros, que têm por objetivo reconstruir o sinal contínuo $f(t)$ a partir da seqüência de números $\{f(kT)\}$, são também apresentados.

2 Série de Fourier

Seja $f(t)$ uma função real da variável real t (associada com o tempo), contínua por partes em qualquer intervalo finito e periódica, com período T .

Exemplo 1 - Considere a função periódica *trem de pulsos*, descrita no primeiro período, $0 < t \leq T$, por:

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq \frac{\delta}{2}, \text{ e } T - \frac{\delta}{2} < t \leq T \\ 0, & \frac{\delta}{2} < t < T - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

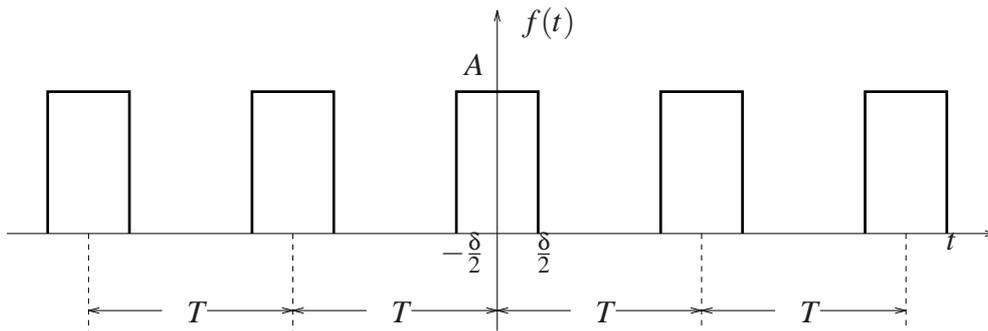


Figura 1: Trem de Pulsos

Funções com as propriedades descritas acima podem ser expandidas em uma soma infinita de termos em senos e cossenos ou de exponenciais, chamada de **Série de Fourier**.

2.1 Série de Fourier Trigonométrica

Uma função $f(t)$ periódica, com período $T = 2\pi/\omega_0$, contínua por partes, pode ser representada em termos de funções $\cos(n\omega_0 t)$ e $\sin(n\omega_0 t)$, n inteiro, da seguinte maneira:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (1)$$

onde (t_0 arbitrário)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

2.2 Série de Fourier Exponencial

Uma forma mais interessante de representação da função $f(t)$ é obtida em termos da soma de exponenciais $\exp(jn\omega_0 t)$, n inteiro:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) \quad (2)$$

onde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt \quad (3)$$

e $\exp(jn\omega_0 t) = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)$.

Pode-se mostrar que os coeficientes das séries de Fourier trigonométrica e exponencial estão relacionados da seguinte forma:

$$a_0 = F_0$$

$$a_n = F_n + F_{-n}$$

$$b_n = j(F_n - F_{-n})$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

A expressão (2) fornece a representação de uma função real periódica em termos de funções exponenciais de “frequências” $0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \dots$, etc. Note que $\exp(jn\omega_0 t)$ e $\exp(-jn\omega_0 t)$ podem ser considerados *fasores* com fases definidas por $\pm n\omega_0 t$ que giram em sentidos opostos, e que somados fornecem uma função real de t , ou seja,

$$\exp(jn\omega_0 t) + \exp(-jn\omega_0 t) = 2 \cos(n\omega_0 t)$$

O coeficiente F_n representa a componente de frequência $n\omega_0$ existente na função $f(t)$. Este coeficiente é em geral um número complexo, podendo portanto ser descrito por sua magnitude e sua fase. As magnitudes e fases dos coeficientes F_n constituem, respectivamente, o espectro de magnitudes e o espectro de fases da representação frequencial da função real periódica $f(t)$.

Exemplo 2 - Considere a função periódica trem de pulsos do Exemplo 1. Da equação (3), tem-se

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} A \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{A\delta}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 \delta/2)}{(n\omega_0 \delta/2)} \right]$$

Observe que $F_n = F_{-n}$ e que, portanto, $b_n = 0$, $a_0 = A\delta/T$ e $a_n = 2F_n$. Assim,

$$f(t) = \frac{A\delta}{T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega_0 t)$$

Note que F_n é real; seu espectro de magnitudes é mostrado na Fig. 2, para $\delta = 1/20, A = 5$ e $T = 1/4$. A envoltória em pontilhado corresponde à função $\sin(x)/x$.

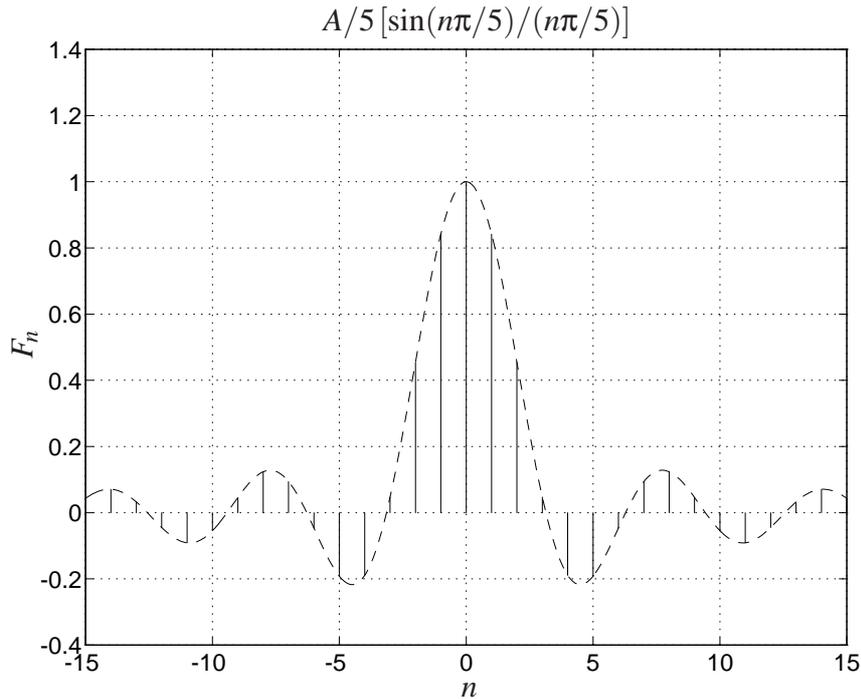


Figura 2: Espectro de magnitudes para $A = 5$.

2.3 Transformada de Fourier

Considere agora o problema de representação de uma função $f(t)$, contínua por partes, periódica ou não, em termos de funções exponenciais. Suponha que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Pode-se mostrar, neste caso, que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \tag{4}$$

onde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \tag{5}$$

A equação (4) corresponde à representação de $f(t)$ como uma soma contínua de funções exponenciais com frequências no intervalo $\omega \in [-\infty, +\infty]$.

A função $F(\omega)$ representa o espectro de frequências de $f(t)$ e é chamada **Função Densidade Espectral**. $F(\omega)$ corresponde à representação da função $f(t)$ no domínio frequencial. Note que na série de Fourier, o espectro de frequências existe somente nos pontos $\omega_n = n\omega_0$. Aqui, o espectro de frequências é definido para todos os valores de ω .

A equação (5) é conhecida como a Transformada de Fourier de $f(t)$ e a equação (4) como a Transformada Inversa de $F(\omega)$. Em geral, a função $F(\omega)$ é complexa, podendo portanto ser representada por sua magnitude $|F(\omega)|$ e sua fase $\Theta(\omega)$, ou seja,

$$F(\omega) = |F(\omega)| \exp(j\Theta(\omega))$$

Exemplo 3 - Seja a função exponencial

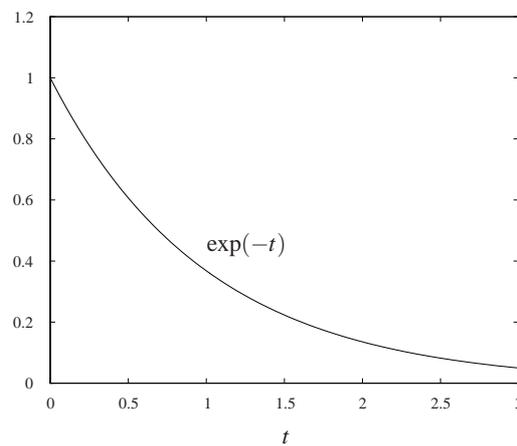


Figura 3: Função $f(t) = \exp(-t)$, $t > 0$.

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , a > 0 , t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Daí,

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} \exp[-(a + j\omega)t] dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

Portanto

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \approx \frac{1}{\omega} , \omega \gg a ; \quad \Theta(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Na Fig. 4 estão traçados $|F(\omega)|$ e $\Theta(\omega)$. Note que as abcissas das figuras estão representando o eixo imaginário no plano complexo $s = \sigma + j\omega$; assim, os valores negativos no semi-eixo $\omega < 0$ representam o conjugado $\sigma - j\omega$, com $\sigma \equiv 0$.

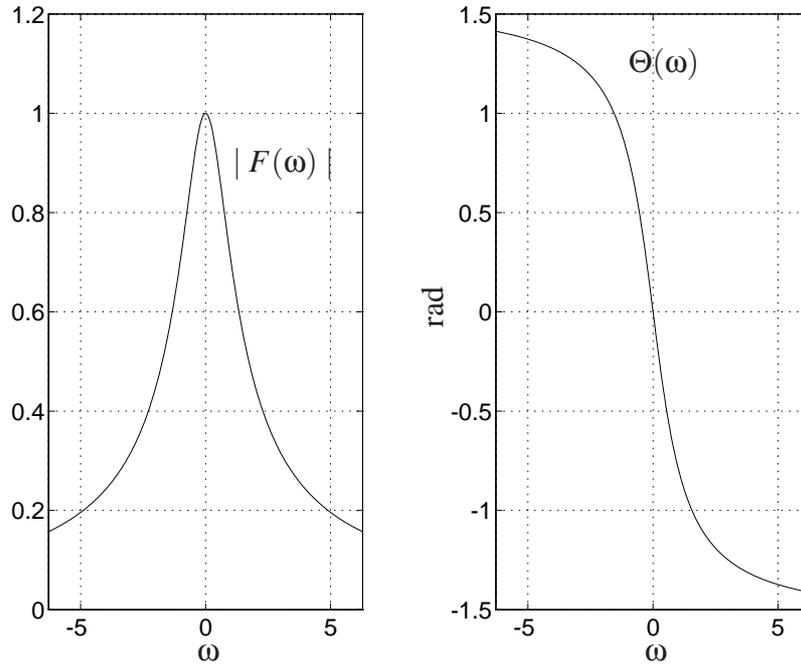


Figura 4: Módulo e fase de $F(\omega)$ - Exemplo 3.

3 A Amostragem de Sinais

O dispositivo que realiza a operação de amostragem é chamado **amostrador**. Basicamente, o amostrador converte um sinal contínuo num trem de pulsos modulados em amplitude.

A Fig. 5 mostra a representação simbólica de um amostrador periódico com período T e duração de amostragem igual a Δ . O intervalo de tempo Δ é aquele durante o qual a chave é fechada e o sinal $f(t)$ é rastreado. A saída do amostrador $f^*(t)$ é um trem de pulsos de largura Δ , cujas amplitudes são moduladas pelo sinal contínuo $f(t)$.

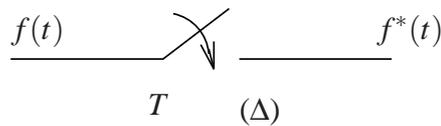


Figura 5: Processo de Amostragem.

A Fig. 6 mostra a representação simbólica do amostrador como um modulador de amplitude de pulsos. A saída do modulador $f^*(t)$ é igual ao produto $f(t)p(t)$, onde $p(t)$ é um trem de pulsos com período T e amplitude unitária, isto é

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT) - u(t - kT - \Delta), \quad \Delta < T \tag{6}$$

e $u(t)$ é a função degrau unitário.

A Fig. 7 mostra formas de sinal típicas para $f(t)$, $p(t)$ e $f^*(t)$:

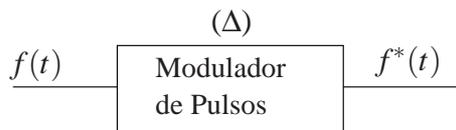


Figura 6: Amostrador em representação simbólica.

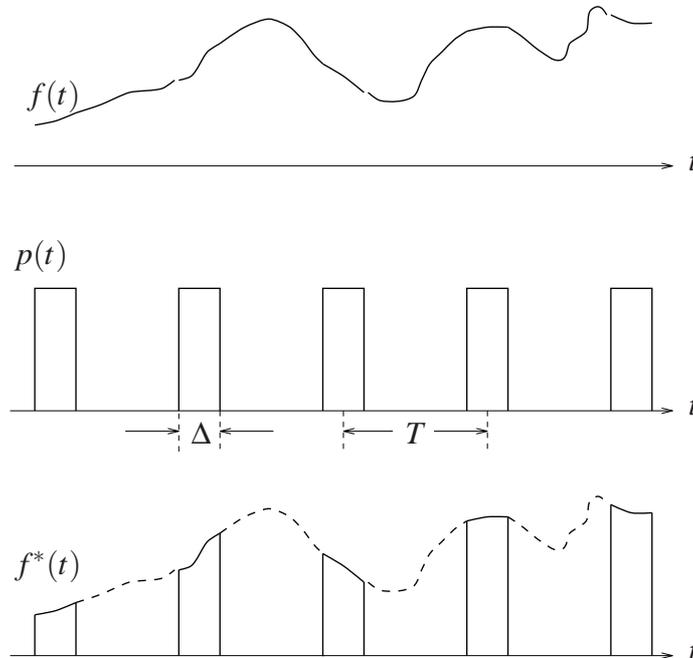


Figura 7: Sinal $f(t)$ e sinal amostrado.

4 Convolução e Função Impulso

Considere $f_1(t)$ e $f_2(t)$ duas funções contínuas da variável real t , e também a integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

A integral (7) define a **convolução** entre duas funções, e é representada simbolicamente por

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (8)$$

A convolução induz duas propriedades importantes apresentadas a seguir. Para facilitar a exposição, considere a notação

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad (9)$$

identificando a função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(\omega)$ (obviamente, $f(t)$ é a transformada inversa de $F(\omega)$).

Propriedade 1 - Convolução no domínio do tempo: se

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \quad ; \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega) \quad (10)$$

então

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (11)$$

Propriedade 2 - Convolução no domínio da frequência: se a relação (10) vale, então

$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \quad (12)$$

A propriedade 1 afirma que a convolução de duas funções no domínio do tempo equivale à multiplicação das respectivas transformadas de Fourier no domínio da frequência. A propriedade 2 é simétrica em relação à propriedade 1.

Considere agora a seguinte função pulso:

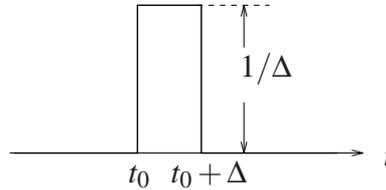


Figura 8: Pulso de área unitária.

$$\delta_{\Delta}(t - t_0) = \begin{cases} 0 & , t < t_0 \\ 1/\Delta & , t_0 \leq t < t_0 + \Delta \\ 0 & , t \geq t_0 + \Delta \end{cases} \quad (13)$$

Note que $\delta_{\Delta}(t - t_0)$ tem área unitária para qualquer valor de Δ . Quando Δ se aproxima de zero, a *função limite*

$$\delta(t - t_0) \triangleq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t - t_0) \quad (14)$$

é chamada de **função impulso**. Esta função possui a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (15)$$

e, se $f(t)$ é contínua em t ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (16)$$

Da expressão (16), pode-se concluir que a transformada de Fourier da função impulso é 1, ou seja

$$\mathcal{F} [\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1 \quad (17)$$

Considere agora $f(t)$ uma função contínua. De (16), obtém-se

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (18)$$

ou seja, a convolução de uma função contínua $f(t)$ com a função impulso $\delta(t)$ reproduz a própria função $f(t)$. Em outras palavras, o impulso é o elemento neutro da convolução.

5 Teorema da Amostragem

Suponha que a duração da amostragem é desprezível em relação ao período de amostragem T . Nesse caso, o amostrador pode ser aproximado por um **amostrador ideal**, que é aquele que abre/fecha instantaneamente a cada T segundos. Nessas circunstâncias, o trem de pulsos $p(t)$ é substituído por um trem de impulsos

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (19)$$

Se $f(t)$ é contínua, então

$$f(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT) dt \quad (20)$$

A Fig. 9 ilustra a amostragem feita por um trem de impulsos.

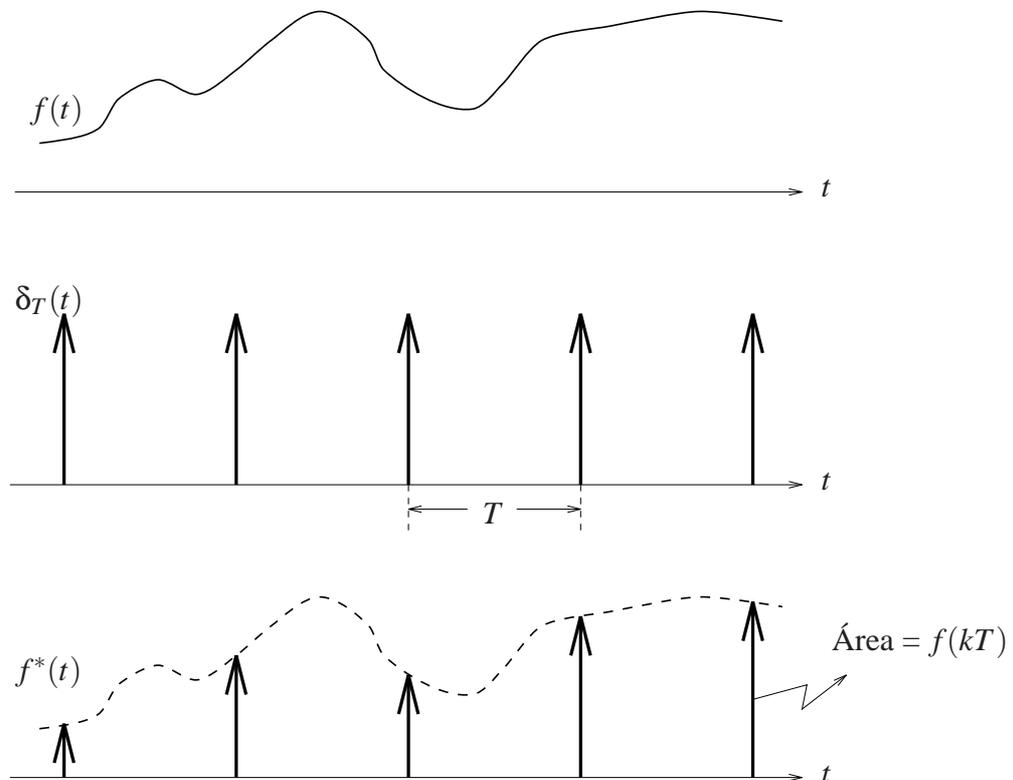


Figura 9: Amostragem por trem de impulsos.

Teorema 1 - Teorema da Amostragem

Uma função contínua $f(t)$ com transformada de Fourier $F(\omega)$, tal que $F(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$, é unicamente determinada por seus valores em intervalos uniformes de tempo T tais que

$$T \leq \frac{1}{2f_m} \quad ; \quad f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \tag{21}$$

Esboço da prova:

Seja $F(\omega)$ a transformada de Fourier de $f(t)$ tal que $F(\omega) = 0$, para $|\omega| \geq \omega_m$

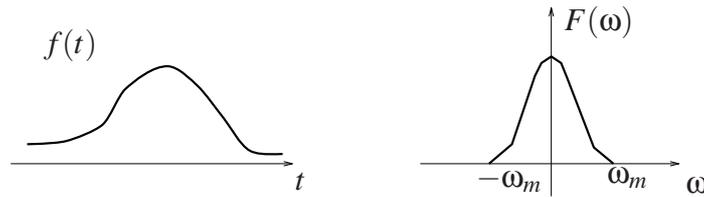


Figura 10: Função $f(t)$ e seu espectro $F(\omega)$.

A função $f(t)$ é amostrada a cada T segundos, usando-se o trem de impulsos $\delta_T(t)$ dado por (19). Seja $\omega_s = 2\pi/T$. A transformada de Fourier de $\delta_T(t)$ é dada por

$$\mathcal{F} [\delta_T(t)] = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) \tag{22}$$

onde

$$\delta_{\omega_s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \tag{23}$$

Note que δ_{ω_s} é um trem de impulsos (em frequência) com período ω_s (veja Fig. 11).

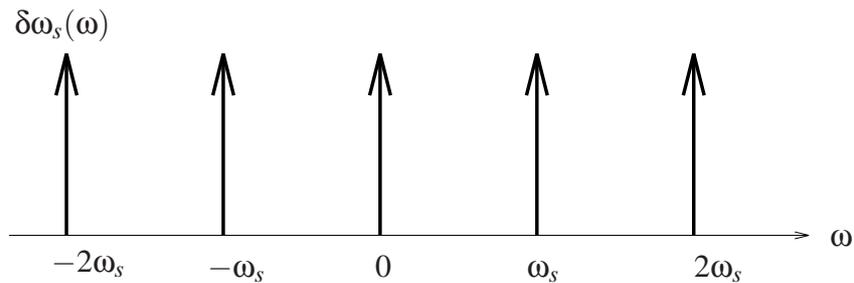


Figura 11: Trem de impulsos com período ω_s .

Seja $f^*(t)$ a função $f(t)$ amostrada a cada T segundos. Então,

$$f^*(t) = f(t) \delta_T(t) \tag{24}$$

Pela propriedade 2 da convolução (12), tem-se

$$f^*(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)] = F_s(\omega) \tag{25}$$

Desenvolvendo,

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \left[F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \quad (26)$$

e portanto

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (27)$$

A Fig. 12 mostra $f^*(t)$ e sua transformada de Fourier $F_s(\omega)$.

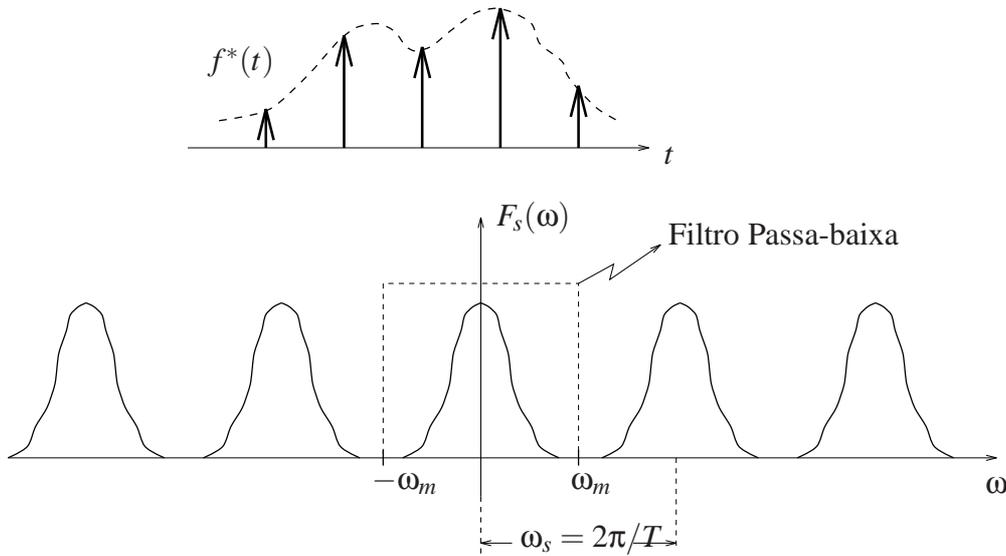


Figura 12: Função $f(t)$ e sua transformada.

Note que a função $F(\omega)$ se repete periodicamente a cada ω_s rad/s, e que a repetição se dá sem sobreposição se

$$\omega_s \geq 2\omega_m \quad \text{ou seja,} \quad T \leq \frac{1}{2f_m} \quad (28)$$

Portanto, se a função $f(t)$ é amostrada com período $T \leq 1/2f_m$, o espectro $F(\omega)$ pode ser recuperado a partir de $F_s(\omega)$, usando-se um filtro passa-baixa, como indicado na Fig. 12.

6 Sinais de Banda Ilimitada

Sinais de banda limitada não existem na prática. Pode-se mostrar que se $F(\omega) = 0$ para $|j\omega| \geq \omega_m$, então a transformada inversa $f(t)$ existe para todos os instantes de tempo t negativos, concluindo-se daí que um sinal de banda limitada existe no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Reciprocamente, um sinal $f(t)$ que só existe para $t \geq 0$ não pode ter banda limitada.

Portanto, uma superposição de espectros sempre existe, mas para todos os sinais de importância prática, $|F(\omega)|$ diminui com o aumento da frequência ω e a maior parte da

informação está contida num certo intervalo de frequências. O erro ao se ignorar frequências acima de um certo valor é desprezível.

Considere um sinal qualquer, de banda ilimitada (ou seja, não existe ω_m tal que $F(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$). Suponha que o sinal $f(t)$ seja amostrado com uma frequência $\omega_s = 2\omega_0$, onde ω_0 é uma frequência tal que $|F(\omega)|$ é desprezível para $|\omega| \geq \omega_0$. A Fig. 13 mostra o espectro $F(\omega)$ e o espectro do sinal amostrado $F_s(\omega)$.

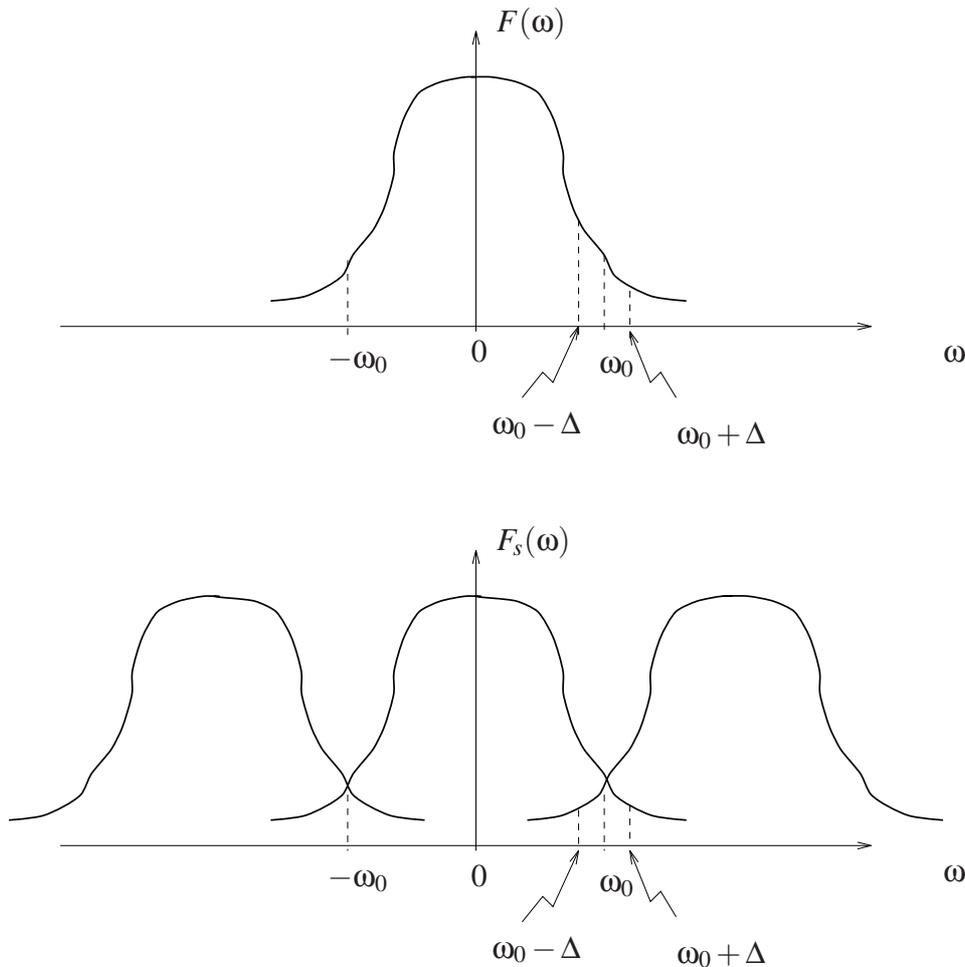


Figura 13: Espectro $F(\omega)$ e $F_s(\omega)$.

Note que a superposição de espectros ocorre de fato. Recuperando-se o sinal $f(t)$ através de um filtro passa-baixa, frequências que estavam originalmente fora da banda limitada por ω_0 aparecem na saída do filtro, contribuindo em frequências mais baixas. Por exemplo, a componente de frequência $\omega_0 + \Delta$ aparece como uma componente de frequência $\omega_0 - \Delta$. Essa situação não é desejável, e para se evitar esse efeito, é comum fazer primeiro uma pré-filtragem de $F(\omega)$, para se eliminar as contribuições nas frequências ω tais que $|\omega| > \omega_0$, e somente então se realizar a amostragem.

7 Filtragem

O objetivo aqui é determinar a função de transferência de um filtro ideal com frequência de corte ω_m , como indicado na Fig. 12. A Fig. 14 a seguir mostra a representação simbólica do filtro, o sinal amostrado na entrada $f^*(t)$, a saída $c(t)$ e suas respectivas transformadas.

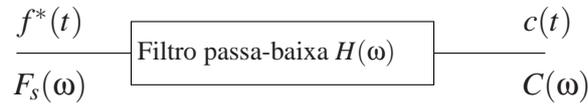


Figura 14: Representação simbólica do filtro.

Em geral, um sinal transmitido através de um filtro sofre um atraso no tempo. Diz-se que o sinal obtido na saída do filtro não apresenta distorção se $c(t) = f(t - t_0)$, ou seja, obtém-se o próprio sinal $f(t)$ com um atraso de t_0 . Como

$$C(\omega) = H(\omega)F_s(\omega) \tag{29}$$

então fazendo

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp[j\Theta(\omega)] \quad , \quad \Theta(\omega) = -\omega t_0 \tag{30}$$

com

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{31}$$

obtém-se

$$C(\omega) = F_s(\omega) \exp(-j\omega t_0) \tag{32}$$

A função de transferência $H(\omega) = |H(\omega)| \exp[j\Theta(\omega)]$ é mostrada na Fig. 15.

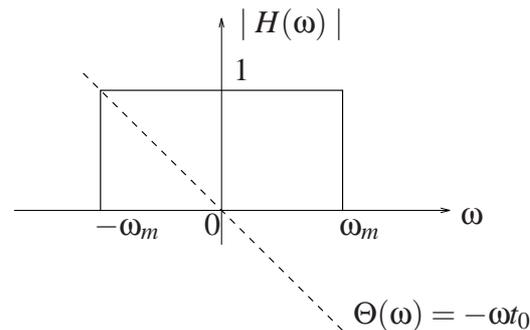


Figura 15: Função de transferência do filtro.

Seja $h(t)$ a resposta ao impulso do filtro passa-baixa $H(\omega)$ da Fig. 15.

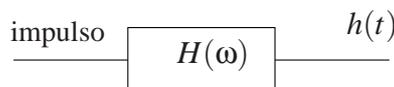


Figura 16: Resposta ao impulso do filtro.

Pode-se mostrar que

$$h(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \left[\frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega(t - t_0)} \right] \quad (33)$$

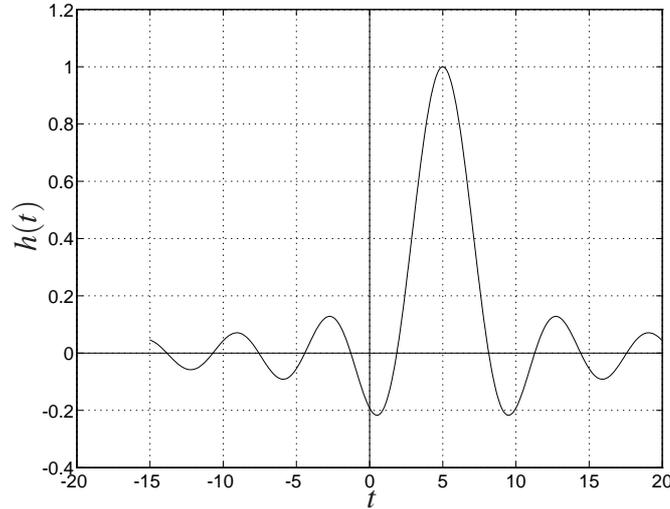


Figura 17: Resposta ao impulso do filtro ($t_0 = 5$).

Note que $h(t)$ existe para valores negativos de t , um resultado bastante estranho levando-se em conta que o impulso foi aplicado no instante $t = 0$. Na prática, um filtro com as características dadas por (31) não pode ser construído. Constrõem-se filtros com características aproximadas das do filtro ideal. A seguir, dois tipos de filtro são apresentados.

7.1 Segurador de Ordem Zero

Esse tipo de filtro é muito usado em sistemas controlados por computador.

Considere a seqüência de números $\{f(kT)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, correspondente ao sinal $f(t)$ amostrado a cada T segundos. Deseja-se reconstruir $f(t)$, $t \geq 0$, a partir das amostras disponíveis até o instante t . Ou seja, o sinal $f(t)$ entre duas amostras consecutivas nos instantes kT e $(k+1)T$ deve ser estimado usando-se $f(kT)$, $f((k-1)T)$, \dots , $f(0)$.

Supondo que $f(t)$ possui derivadas até ordem n , pode-se estimar $f(t)$ no intervalo $kT \leq t < (k+1)T$ através da série de Taylor

$$f_k(t) \simeq f(kT) + f^{(1)}(kT)(t - kT) + \dots + \frac{f^{(n)}(kT)}{n!}(t - kT)^n \quad (34)$$

onde

$$f^{(n)}(kT) = \left. \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right|_{t=kT} \quad (35)$$

Um valor aproximado para a primeira derivada de $f(t)$ é dado por

$$f^{(1)}(kT) = \frac{1}{T} \{f(kT) - f[(k-1)T]\} \quad (36)$$

e, analogamente, para a segunda derivada de $f(t)$

$$f^{(2)}(kT) = \frac{1}{T^2} \{f(kT) - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T]\} \quad (37)$$

Analisando-se somente o primeiro termo da série (34), conclui-se que o polinômio que extrapola o valor de $f(t)$ no intervalo $kT \leq t < (k+1)T$ é de ordem zero. O dispositivo que mantém o sinal constante no intervalo de duração T , ou seja,

$$f_k(t) = f(kT) \quad , \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (38)$$

é chamado de **segurador de ordem zero**. A relação (38) define a resposta ao impulso do segurador de ordem zero, que é mostrada na Fig. 18.

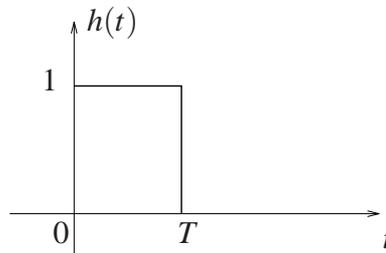


Figura 18: Resposta ao impulso do segurador de ordem zero.

A Fig. 19 mostra sinais típicos de entrada e saída do segurador de ordem zero.

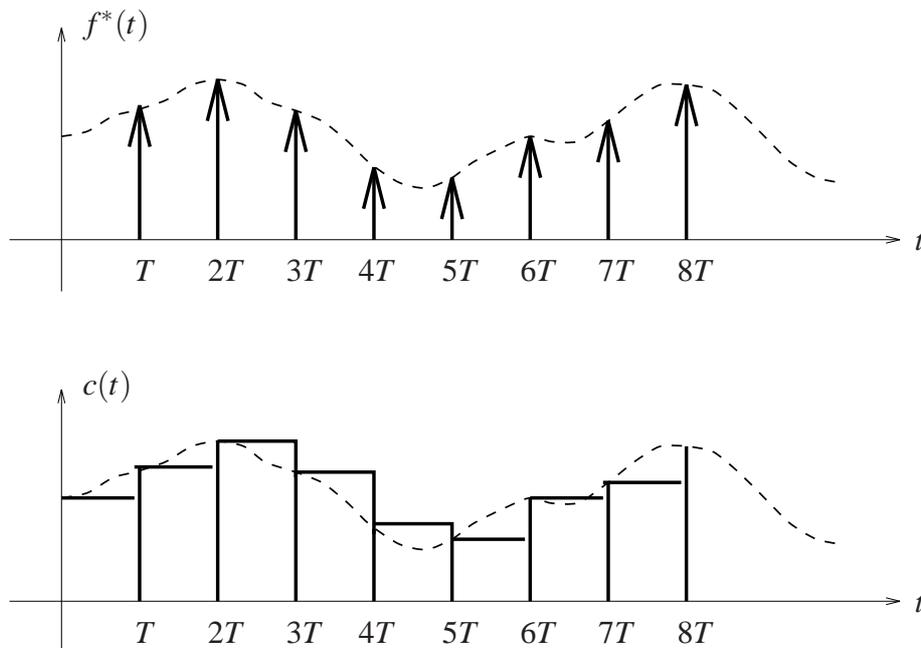


Figura 19: Sinais de entrada e saída do segurador de ordem zero.

Ainda na Fig. 18, segue-se que a resposta ao impulso do segurador de ordem zero é dada por

$$h(t) = u(t) - u(t - T) \quad (39)$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário. A função de transferência do segurador de ordem zero é dada pela transformada de Fourier de $h(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{j\omega} = \exp(-j\omega T/2) \left(\frac{\exp(j\omega T/2) - \exp(-j\omega T/2)}{j\omega} \right) \\ &= \frac{T \sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \exp(-j\omega T/2) \end{aligned} \quad (40)$$

Mas $T = 2\pi/\omega_s$, onde ω_s é a frequência de amostragem em rad/s. Então,

$$H(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \left[\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{(\pi\omega/\omega_s)} \right] \exp(-j\pi\omega/\omega_s) \quad (41)$$

As características de amplitude e fase do segurador de ordem zero são mostradas na Fig. 20.

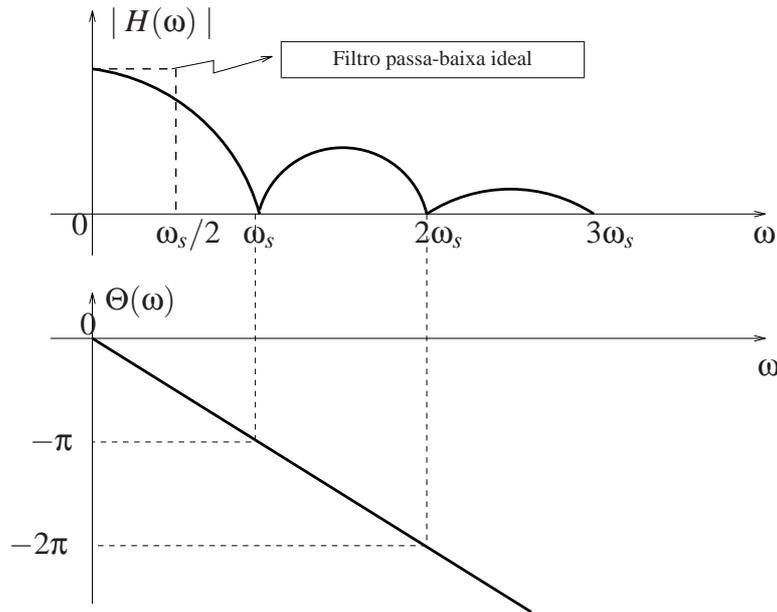


Figura 20: Amplitude e fase do segurador de ordem zero.

Note que o segurador de ordem zero comporta-se essencialmente como um filtro passa-baixa. Comparado com um filtro ideal, ao invés de cortar bruscamente em $\omega_s/2$, o ganho é zero em $\omega = \omega_s$ e $|G(\omega)| = 0.636$ para $\omega = \omega_s/2$. A precisão do segurador de ordem zero como dispositivo extrapolador depende bastante da frequência de amostragem, como pode ser visualizado na Fig. 19.

7.2 Filtro Passa-Baixa de 2a. Ordem

Considere o filtro passa-baixa mostrado na Fig. 21.

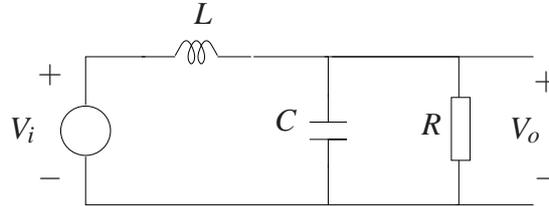


Figura 21: Filtro de segunda ordem RLC .

A função de transferência do filtro é dada por

$$H(\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega L/R + 1} = \frac{1/LC}{-\omega^2 + j\omega/RC + 1/LC} \quad (42)$$

Do denominador de (42), colocado na forma padrão para um sistema de segunda ordem, vem

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \xi = \frac{1}{2R} \sqrt{L/C} \quad (43)$$

Fazendo $R = \sqrt{L/C}$, obtém-se

$$\xi = 1/2 \quad ; \quad \left| H(\omega) \right|_{\omega=\omega_n} = 1 \quad (44)$$

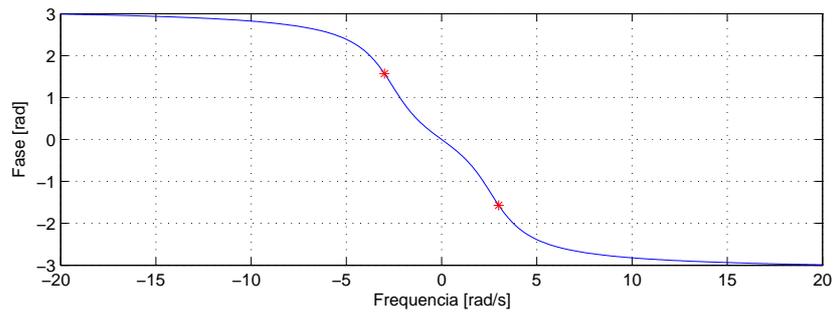
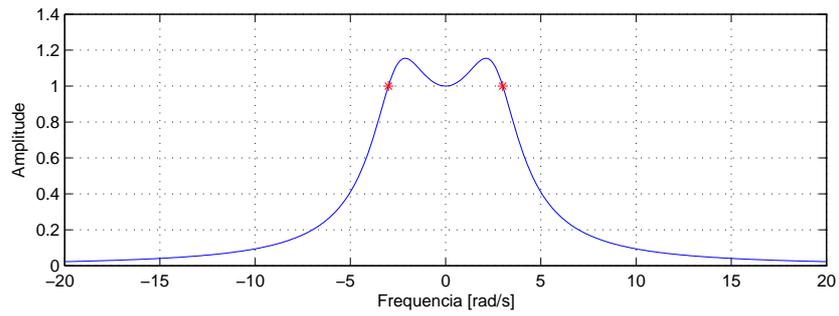
e

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_n + \omega_n^2} \quad (45)$$

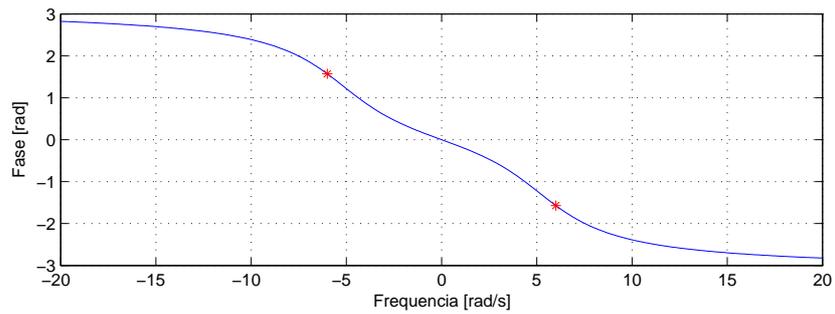
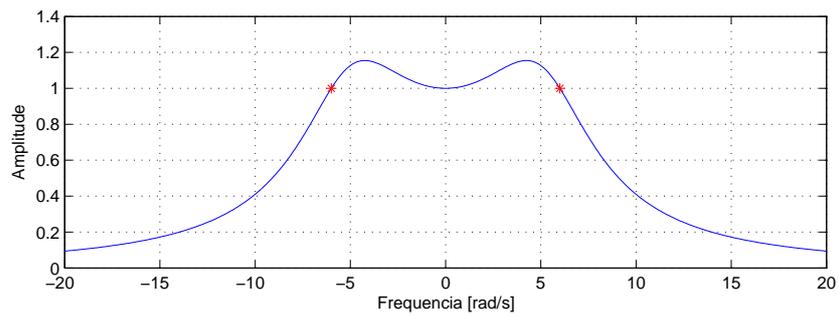
A transformada inversa de $H(\omega)$, que é a resposta ao impulso do filtro, é dada por

$$h(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega_n \exp(-\omega_n t/2) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t\right) \quad (46)$$

As Figs. 22 (a) e (b) mostram as características de amplitude e de fase de $H(\omega)$, e a Fig. 23 mostra as respostas impulsivas $h(t)$.



(a) $\omega_n = 3$



(b) $\omega_n = 6$

Figura 22: Características de Resposta em Frequência do Filtro *RLC*.

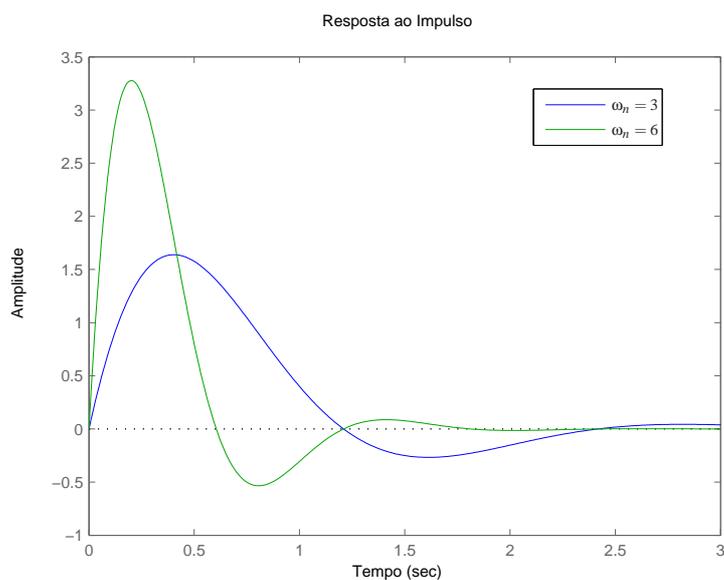


Figura 23: Resposta ao Impulso dos Filtros *RLC*.

Note que a resposta ao impulso é semelhante à resposta ao impulso do filtro ideal, porém inicia-se em $t = 0$.

Referências

- [1] Lathi, B. P., *Communication Systems*, John Wiley, 1968.
- [2] Kuo, B. C. , *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart and Wiston, 1980.

Roteiro

Parte A - Exercícios Propostos

A-1 Calcule a série de Fourier na forma exponencial correspondente à função abaixo e esboce o comportamento do módulo dos coeficientes complexos da série em função da frequência.

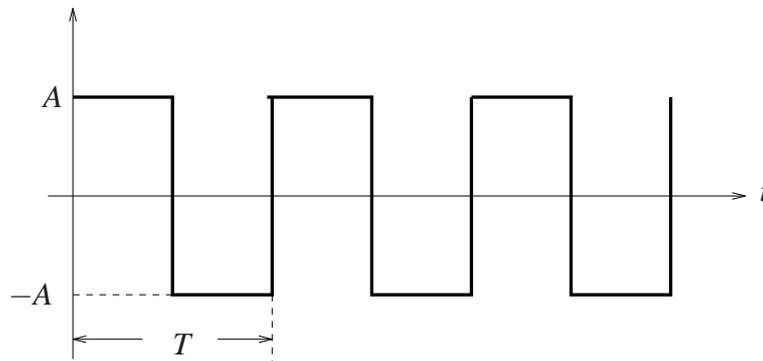


Figura 24: Onda quadrada.

A-2 Calcule as transformadas de Fourier das funções a seguir e esboce o seu comportamento (em módulo) em função da frequência.

a) $y(t) = \exp(-t/10) \cos(3t), \quad t \geq 0$

b) $y(t) = \exp(-t) \cos(3t), \quad t \geq 0$

A-3 Considere os sinais do exercício A-2, amostrado com uma frequência $\omega_s = 20$ rad/s. Esboce o espectro freqüencial resultante.

A-4 Considere a resposta em frequência do filtro de segunda ordem, dada na Fig. 22. Definindo a variável $\alpha = \omega/\omega_n$ — frequência normalizada, obtenha uma expressão analítica para $|H|$ versus α , e esboce esta função. Quais são os ganhos para $\alpha = 1$, $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1.5$?

Parte B - Exercícios de Simulação

Considere o diagrama a seguir.

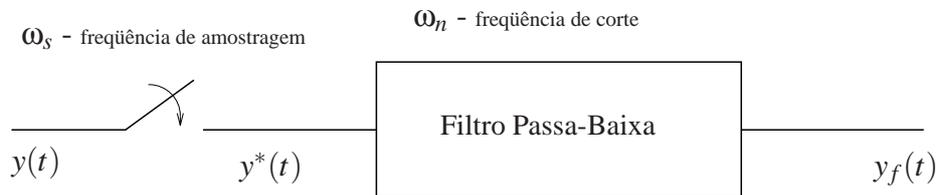


Figura 25: Esquema de Filtragem.

B-1 Simule a situação indicada no diagrama da Fig. 25 para a função $y(t) = \exp(-t/10) \cos(3t)$, nos seguintes casos (unidades em rad/s):

- $\omega_s = 25, \omega_n = 6.$
- $\omega_s = 25, \omega_n = 3.$
- $\omega_s = 4, \omega_n = 3.$
- $\omega_s = 4, \omega_n = 6.$

Para cada caso, obtenha os gráficos de $y^*(t)$ e $y_f(t)$; plote-os simultaneamente com $y(t)$.

B-2 Com base nas curvas obtidas para cada caso, explique a semelhança (ou diferença) entre o sinal original e os sinais filtrados. Qual a influência da frequência de amostragem? E da frequência de corte do filtro?

B-3 Simule a situação indicada no diagrama quando $y(t)$ é uma onda quadrada de período $T = 2$, nos seguintes casos (unidades em rad/s):

- $\omega_s = 150, \omega_n = 12.$
- $\omega_s = 150, \omega_n = 3.$

Para cada caso, obtenha os gráficos de $y^*(t)$ e $y_f(t)$; plote-os simultaneamente com $y(t)$.

B-4 É possível recuperar uma onda quadrada? Por quê? Explique os resultados obtidos no item B-3.