



UNICAMP – Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação
EA-619 Laboratório de Análise Linear

Experiência 1: Simulação de Sistemas Dinâmicos Lineares

8 de agosto de 2017

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelagem de Sistemas Lineares	3
3	Procedimento para Simulação de Sistemas	6
4	Elementos Básicos do SIMULINK	9
5	Equações Diferenciais Lineares	13
5.1	Equação Diferencial Linear de 1a. Ordem Homogênea	14
5.2	Equação Diferencial Linear de 2a. Ordem Homogênea	14
5.2.1	Raízes Reais e Distintas	15
5.2.2	Raiz Real Dupla	16
5.2.3	Raízes Complexas	17
6	Equações Lineares Não-Homogêneas	17
7	Forma Canônica da Equação de 2a. Ordem	20
	Roteiro	24

1 Introdução

Uma das atividades mais importantes em Engenharia é a de projeto. Em particular, ao se projetar equipamentos eletrônicos, máquinas, processos químicos, etc., é fundamental para o engenheiro a noção de como o sistema se comportará depois de construído. No caso de dispositivos simples, muitas vezes a experiência do indivíduo é suficiente para as decisões que devem ser tomadas durante o projeto, decisões que irão influir no desempenho e na operação do equipamento. Entretanto, quando se trata de um sistema

mais complexo ou cujo comportamento não seja simples, o profissional deve lançar mão de ferramentas que permitam antecipar os problemas e auxiliá-lo em suas decisões.

Essas ferramentas são colocadas à disposição dos projetistas através de conjuntos de programas em computadores digitais que, dependendo do seu grau de integração e de sofisticação na interface homem-máquina, podem constituir os chamados sistemas **CAD** — *Computer Aided Design*, dirigidos para áreas específicas das Engenharias. Assim, para projetos de dispositivos eletrônicos, por exemplo, existem diversos *pacotes* CAD que hoje fazem parte do dia-a-dia dos engenheiros eletrônicos. Para a maioria das áreas técnicas, existem programas com o objetivo de auxiliar o projetista, os quais, mesmo não se constituindo em sistemas CAD, possibilitam uma visão dos problemas antes da construção, propriamente dita, do equipamento.

Na área de sistemas dinâmicos e de projeto dos seus sub-sistemas de controle, não existe, atualmente, nenhuma ferramenta CAD completa. Entretanto, há uma boa quantidade de ferramentas isoladas que devem ser utilizadas pelo engenheiro. Uma delas, de grande importância para a determinação do comportamento temporal dos sistemas, é a **Simulação Analógica**.

A origem desse nome data de uma época em que os computadores digitais ainda não existiam, e deriva da possibilidade de observar-se o comportamento de um sistema dinâmico através de um outro sistema cujo comportamento é *análogo* ou similar ao do primeiro. O fundamento está em se construir algo que, nas condições controladas de um laboratório, seja capaz de reproduzir o funcionamento de uma *extensa família* de sistemas dinâmicos. A exigência *extensa família* é decorrente da diferenciação entre um simulador analógico, que deve ser para uso geral, e um modelo reduzido do sistema particular em estudo.

Os simuladores analógicos, mais antigos, portanto, que os computadores digitais, tiveram uma evolução interessante. No início, eram pequenos sistemas mecânicos que, devidamente interconectados, simulavam outros sistemas. Com a eletrônica, veio o surgimento de um dispositivo chamado *amplificador operacional*, cujas características básicas são as de possuir um ganho de tensão extremamente elevado e uma impedância de entrada também muito alta. Com o amplificador operacional, puderam ser construídos dispositivos análogos aos mecânicos até então utilizados, com a grande diferença do conforto de sua manipulação. As dimensões físicas eram muito inferiores; as conexões, com fios elétricos, eram flexíveis e facilmente alteráveis em cada situação. Enfim, o simulador analógico tornou-se uma ferramenta de uso fácil e confortável.

A miniaturização e a melhoria dos dispositivos eletrônicos, obtidas em graus crescentes pelo avanço tecnológico, trouxeram benefícios adicionais aos simuladores analógicos eletrônicos e, paradoxalmente, quase provocaram sua extinção.

Esta quase extinção deveu-se ao inexorável avanço da computação digital, que possibilitou o uso dessas ferramentas de simulação, não mais construídas com elementos eletrônicos mas sim por programas que, numericamente, reproduziam os seus comportamentos. Um computador digital, que possui um espectro de aplicações muito mais amplo do que um simulador analógico eletrônico, é muito mais barato e também é capaz de realizar as funções de um computador analógico. Um engenheiro que tenha acesso a um

simples PC poderá utilizar a ferramenta a um custo muito inferior quando comparado ao eletrônico, e terá à sua disposição, no mesmo ambiente, um grande número de outros aplicativos.

A simulação de um sistema é a reprodução mais fiel possível de seu comportamento através de um outro sistema. A palavra *sistema* tem uma abrangência muito grande, e por isso deve-se delimitar a classe de sistemas que serão objeto de estudo. Nesta disciplina, é uma certa classe de sistemas dinâmicos que será analisada. Um *sistema dinâmico* neste contexto é representado matematicamente por uma ou mais equações diferenciais ou a diferenças, nas quais, uma das variáveis independentes em geral é o *tempo*.

Nas primeiras atividades deste Laboratório, serão analisados sistemas dinâmicos em que a única variável independente é o tempo e, além disso, este é considerado como sendo uma variável contínua. Sistemas dinâmicos que obedecem a esta restrição podem ser modelados por *equações diferenciais ordinárias*, e representam um grande número de entidades do mundo real.

2 Modelagem de Sistemas Lineares

Seja o circuito elétrico abaixo:

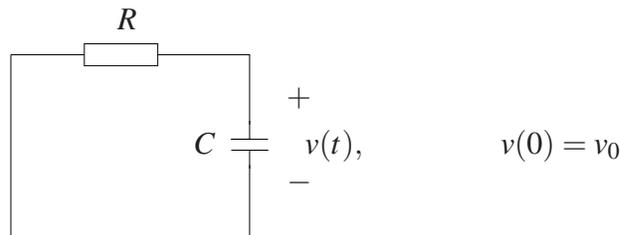


Figura 1: Circuito *RC* autônomo.

Note que trata-se de um circuito *RC* autônomo (sem entrada externa), cuja variável de interesse é a tensão $v(t)$ no capacitor. O circuito terá o seu comportamento analisado a partir do instante $t = 0$, quando a tensão vale $v(0) = v_0$ (condição inicial). A partir das leis da física, sabe-se que a evolução temporal da variável de interesse é regida por

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{-1}{RC}v(t), \quad v(0) = v_0 \quad (1)$$

Esta equação diferencial ordinária tem uma única variável a determinar $v(t)$, que é a variável de interesse no problema. Em outras palavras, deseja-se saber como a tensão no capacitor varia a partir do instante $t = 0$.

Vários outros sistemas físicos e econômicos podem ser modelados matematicamente através de equações diferenciais lineares. Seguem mais alguns exemplos.

Exemplo 1 - Considere um tanque para aquecimento de um fluido, mostrado na Fig. 2. O tanque contém um dispositivo de aquecimento e um agitador para assegurar que todo o fluido esteja à mesma temperatura T . Supõe-se que a vazão de entrada W é igual à vazão de saída e que a temperatura T do fluido efluente é a mesma do fluido no interior do tanque. Seja

C : Calor específico do fluido (cal/Kg. $^{\circ}$ C);

ρ : Densidade do fluido (Kg/m 3);

V : Volume do fluido (m 3);

T_e : Temperatura do fluido na entrada do tanque ($^{\circ}$ C);

Q : Quantidade de calor fornecida (cal);

T : Temperatura do fluido no tanque e na saída do tanque ($^{\circ}$ C);

W : Vazão de entrada e de saída (kg/min);

t : Variável tempo (min).

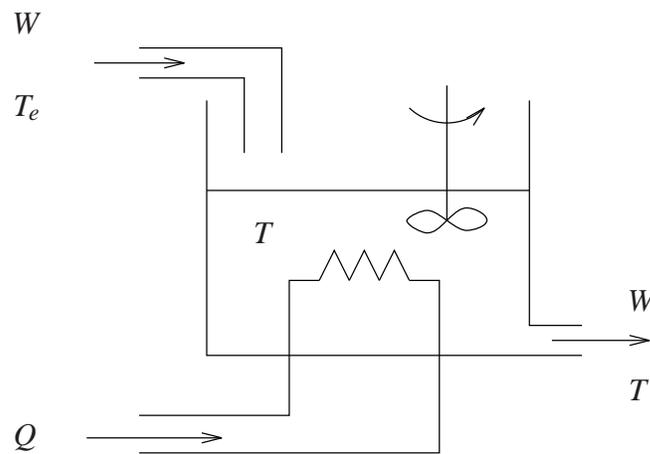


Figura 2: Sistema Térmico de 1a. Ordem

O modelamento deste tipo de sistema é feito pelas equações de balanço de massa e de energia. Para o caso em análise, como os fluxos de entrada e de saída são iguais, o balanço de massa não introduz nenhuma equação de interesse. Entretanto, o balanço de energia fornece

$$\rho VC \frac{d}{dt} T(t) = WCT_e + \frac{d}{dt} Q(t) - WCT(t) \quad (2)$$

ou, rearranjando e introduzindo a notação $\dot{T} \triangleq \frac{d}{dt} T(t)$; $\dot{Q} \triangleq \frac{d}{dt} Q(t)$, vem

$$\dot{T} + \frac{W}{\rho V} T = \frac{W}{\rho V} T_e + \frac{1}{\rho VC} \dot{Q} \quad (3)$$

Diz-se que a equação diferencial (3) que descreve o processo é *linear* de 1a. ordem. As funções do tempo $T_e(t)$ e $Q(t)$ são chamadas de *funções de entrada*. É importante ainda especificar o valor da temperatura no instante a partir do qual o seu comportamento será analisado (por exemplo $T(0)$), isto é, a *condição inicial* do sistema.

Exemplo 2 - Considere os sistemas mecânico e elétrico da Fig. 8. Para o sistema mecânico, seja

K : Constante da mola (N/m);

M : Massa (Kg);

B : Coeficiente de atrito (N.s/m);

F : Força (N);

x : Deslocamento (m).

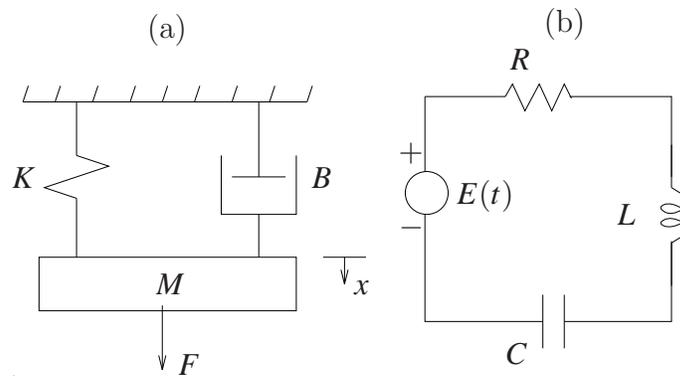


Figura 3: (a) Sistema Massa-Mola-Atrito: (b) Circuito RLC Série

Através das leis da mecânica, obtém-se

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) + B \frac{d}{dt} x(t) + Kx(t) = F(t) \quad (4)$$

ou,

$$\ddot{x} + \frac{B}{M} \dot{x} + \frac{K}{M} x = \frac{1}{M} F \quad (5)$$

Para o sistema elétrico, seja

R : Resistência (Ω);

L : Indutância (H);

C : Capacitância (F);

$E(t)$: Tensão de entrada (V);

$q(t)$: Carga (C).

A equação de malha do circuito fornece

$$L \frac{d^2}{dt^2} q(t) + R \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} q(t) = E(t) \quad (6)$$

ou, do mesmo modo,

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} E \quad (7)$$

As equações diferenciais (5) e (7) são chamadas de equações diferenciais lineares de 2a. ordem. Analogamente ao Exemplo 1, as funções $F(t)$ e $E(t)$ são chamadas de funções de entrada.

3 Procedimento para Simulação de Sistemas

Da seção anterior, pode-se notar que diversos sistemas dinâmicos são regidos pelas mesmas equações que governam um circuito RLC. Nesta seção, será desenvolvido o método geral de construção de um simulador analógico de um sistema dinâmico, partindo-se da equação diferencial que descreve matematicamente o seu comportamento.

Iniciamos com a análise de um circuito RC autônomo, regido pela equação (1), repetida aqui por conveniência:

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{-1}{RC} v(t), \quad v(0) = v_0 \quad (8)$$

Esta equação diferencial ordinária tem uma única variável a determinar $v(t)$, que é a variável de interesse no problema. Em outras palavras, deseja-se saber como a tensão no capacitor varia a partir do instante $t = 0$. Entretanto, esta equação descreve o comportamento do sistema em termos da derivada de $v(t)$. Isto apresenta dois problemas, de certa forma relacionados:

- Não existem circuitos práticos que simulem uma operação de derivação, visto que eles possuem energia infinita.
- A diferenciação é uma operação instável, no sentido de que um ruído que varie rapidamente pode apresentar uma derivada muito grande, mesmo que ele possua uma pequena amplitude.

Assim, é de interesse descrever a operação de sistemas sem recorrer a derivadas. Ora, do estudo de soluções de equações diferenciais, sabe-se que $v(t)$ pode ser escrita como

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{d}{dt} v(\tau) d\tau = v_0 + \int_0^t \frac{-1}{RC} v(\tau) d\tau \quad (9)$$

ou

$$v(t) = v_0 + \left[\left(\frac{-1}{RC} \right) \right] \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (10)$$

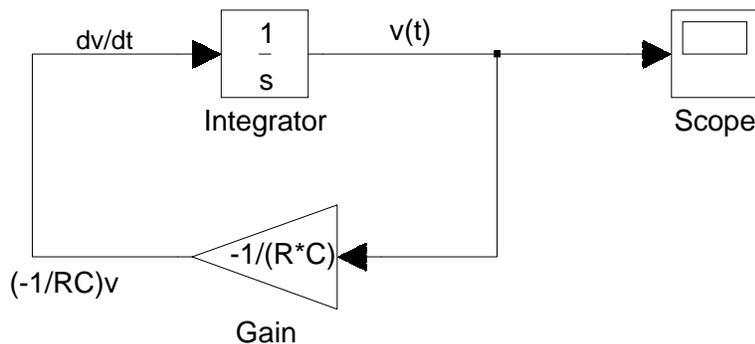


Figura 4: Circuito RC Autônomo - Diagrama de Simulação.

Observando-se mais atentamente a equação (10), é possível verificar que $v(t)$ pode ser obtida a partir da integral da *própria* variável $v(t)$ multiplicada por uma constante negativa, dada por $\frac{1}{RC}$, mais uma outra constante, v_0 .

Note que a equação (10) descreve a saída $v(t)$ de um integrador, que tem como entrada a variável $\dot{v}(t)$ e como constante de integração o valor v_0 . Este procedimento indica que o diagrama da Fig. 4 irá produzir em sua saída uma variável que é exatamente igual à tensão no capacitor $v(t)$. Assim, este diagrama pode reproduzir o comportamento de um circuito RC .

Observe que a saída do bloco ganho na Fig. 4 é também a entrada do integrador, e que, portanto (como não poderia deixar de ser), igualando-se os termos $\frac{dv}{dt}$ e $-\frac{v(t)}{RC}$ no diagrama da Fig. 4 obtém-se a equação diferencial original (8).

Esta visão do diagrama é a essência do método de construção de simuladores analógicos. Coloca-se na entrada do integrador os termos do lado direito da equação diferencial, que tem de seu lado esquerdo a derivada de maior ordem presente na equação. Em equações mais complicadas, o lado direito será uma soma de termos, e nestes casos usa-se antes do integrador um bloco somador, que fornecerá em sua saída a soma desejada¹.

Considere agora um circuito de segunda ordem, como o circuito RLC autônomo da Fig. 5. O modelo matemático do circuito, explicitando a variável $i(t)$ e suas derivadas, é a equação diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \quad (11)$$

Reescrevendo, de maneira a isolar do lado esquerdo o termo com a derivada de maior ordem,

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\left(\frac{R}{L}\right) \frac{di}{dt} - \frac{1}{LC}i \quad (12)$$

¹Este método de obtenção do simulador analógico para um sistema modelado por equação diferencial foi inventado por Sir William Thomson (que depois se tornou Lord Kelvin) em 1876.

com as condições iniciais

$$\begin{cases} i(0) = i_0 \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \triangleq Di_0 = -\frac{R}{L}i_0 - \frac{1}{L}v_0 \end{cases} \quad (13)$$

A condição inicial para a derivada da corrente é obtida notando-se que a equação diferencial que rege o circuito também pode ser escrita como

$$v(t) + L\frac{di}{dt} - Ri(t) = 0. \quad (14)$$

A partir de (12) e das condições iniciais, pode-se construir o simulador analógico correspondente, usando o mesmo procedimento do caso anterior, ou seja, produzindo através de somas e multiplicações por constantes o lado direito da equação e colocando o resultado na entrada de um integrador. Este integrador gera em sua saída a variável di/dt que, por sua vez, servirá como entrada para um segundo integrador que produzirá $i(t)$ em sua saída. O diagrama na Fig. 6 mostra o simulador obtido.

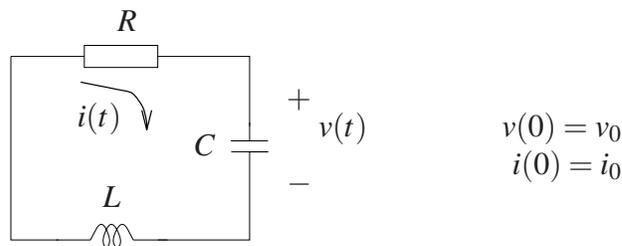


Figura 5: Circuito RLC autônomo.

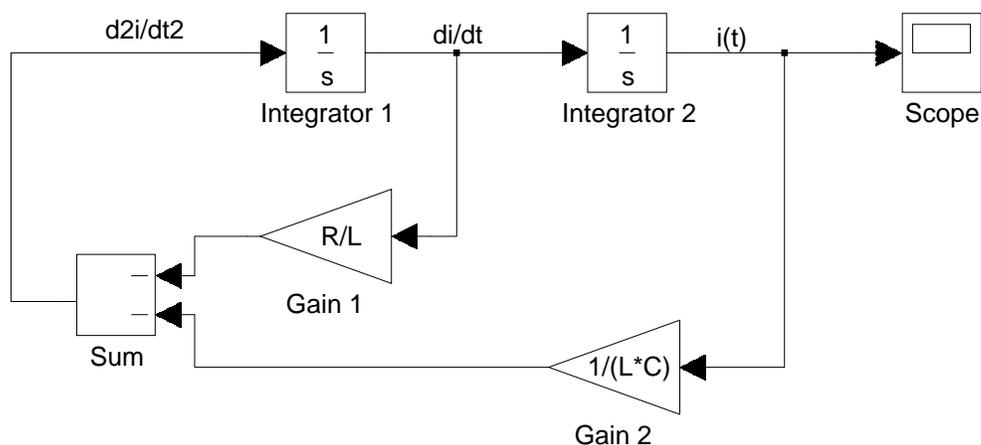


Figura 6: Decomposição dos Sinais do Diagrama de Simulação.

Para concluir a apresentação do método, falta discutir a questão das *condições iniciais*. Em equações diferenciais, o nome genérico *condições de contorno* é dado para os valores numéricos que são impostos às variáveis participantes. Esta imposição pode ser feita em um número de variáveis igual à ordem da equação diferencial e, além disso, são arbitrários os valores da variável independente nos quais estas condições são escolhidas. Em sistemas físicos, normalmente (mas não obrigatoriamente) escolhe-se o instante $t = 0$ para a imposição de valores arbitrários às variáveis da equação, que são as *condições iniciais*.

A atribuição destas condições está relacionada com o nível de energia que o sistema possui no instante inicial, e determina completamente as trajetórias que as variáveis descrevem ao longo do tempo. Como regra básica para os simuladores analógicos, *somente os integradores possuem condições iniciais*, pois apenas eles representarão os elementos do sistema físico capazes de armazenar energia.

No primeiro exemplo — circuito *RC* — o sistema possui apenas um elemento armazenador de energia, resultando numa equação diferencial de primeira ordem, e o simulador analógico contém somente um integrador. Isto faz com que tenhamos o direito de arbitrarmos apenas uma condição inicial, no caso, a tensão no capacitor. No segundo exemplo — circuito *RLC*, há dois armazenadores de energia e, portanto, duas condições iniciais, a tensão no capacitor e a corrente no indutor. Neste caso, como a equação diferencial de segunda ordem foi obtida em termos da corrente $i(t)$, foi necessário calcular o valor numérico de Di_0 (valor inicial da derivada de $i(t)$) em função dos valores conhecidos i_0 e v_0 .

4 Elementos Básicos do SIMULINK

Um simulador analógico é constituído por vários elementos (blocos) processadores distintos, cada um desempenhando uma dentre um conjunto de funções características. Para realizar uma simulação, juntam-se diversos blocos de cada uma das funções, interligados segundo as necessidades do problema a ser analisado.

Neste laboratório, iremos utilizar o software SIMULINK como ambiente para a realização de simulação de sistemas. Faremos uma introdução sucinta ao SIMULINK, envolvendo apenas os elementos básicos (funções características) do simulador. Com estes elementos, é possível realizar a simulação de *sistemas dinâmicos lineares* cujas variáveis são definidas a *tempo contínuo*.

A. Janela Inicial O SIMULINK é ativado na linha de comandos do MATLAB ou por um ícone na janela MATLAB. Apresenta-se a janela da Fig. 7, contendo os ícones que dão acesso a classes distintas de elementos de simulação.²

B. Janela dos Elementos Lineares de Simulação A partir da Janela Inicial, acionando-se o ícone “Continuous”, apresenta-se a janela da Fig. 8, contendo todos os elementos lineares de simulação.

²Simulink Version 3.0 (R11) 01-Sep-1998.

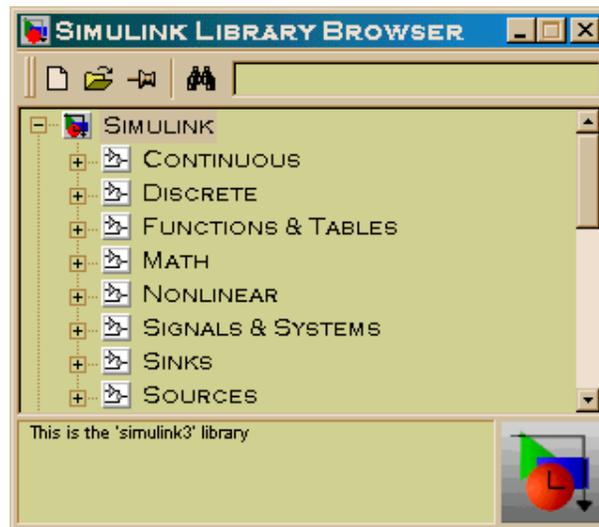


Figura 7: Janela Inicial do Simulink



Figura 8: Janela com os blocos dinâmicos a tempo contínuo

C. Elementos básicos para a simulação analógica

São eles:

1. Somador
2. Ganho
3. Integrador

Somador (em simulink/math/sum)

Representado pelo símbolo abaixo:

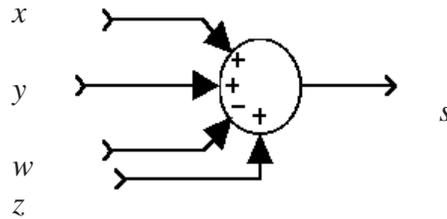


Figura 9: O elemento somador.

Tem-se que

$$s(t) = x(t) + y(t) - w(t) + z(t)$$

e sua função é a de produzir, continuamente no tempo, a soma das entradas. O número de entradas de um somador e os sinais \pm associados a cada entrada são definidos através do menu de parâmetros.

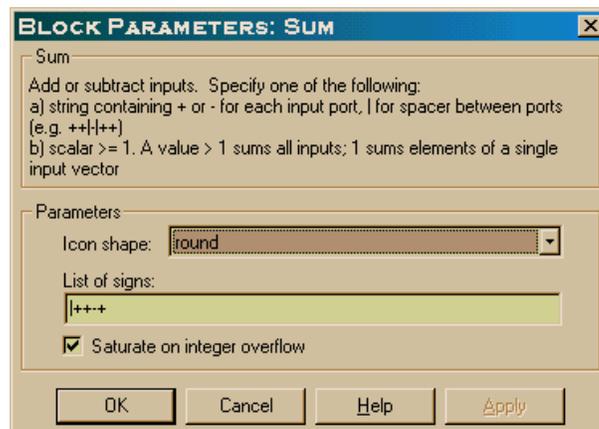


Figura 10: Menu de parâmetros do somador. Se + a entrada é somada, se - ela é subtraída.

Ganho (em simulink/math/gain)

Tem-se

$$z(t) = Kx(t)$$

O ganho é representado pelo símbolo da Fig. 11, e sua função é a de produzir, continuamente no tempo, a multiplicação de uma constante pela entrada. O valor do ganho é definido através do menu de parâmetros mostrado na Fig. 12.

O valor do ganho pode ser um valor numérico definido diretamente no menu, ou um valor simbólico. Neste caso, o valor numérico associado ao símbolo deve ser previamente definido na janela de linhas de comando do MATLAB. Por exemplo, se

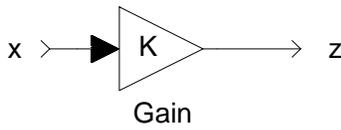


Figura 11: O elemento ganho.

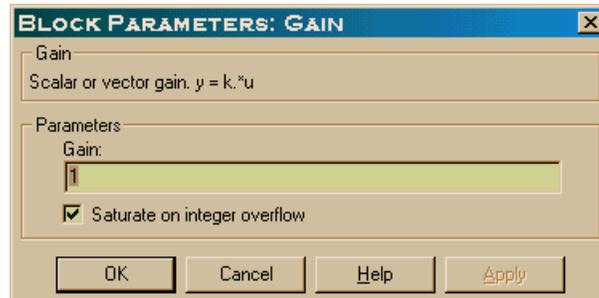


Figura 12: O menu de parâmetros do ganho.

o ganho representa uma resistência denominada R_1 que queremos variar, podemos adotar no menu de parâmetros do ganho o valor R_1 e, antes da execução, é preciso definir na janela de comandos o seu valor, na forma

■ $R_1 = 42.5$

caso o valor desejado da resistência R_1 seja $42,5 \Omega$.

Integrador (em `simulink/continuous/integrator`)

É representado pelo símbolo ilustrado na Fig. 13

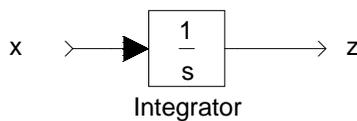


Figura 13: O integrador.

Tem-se que

$$z(t) = x_0 + \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (15)$$

e sua função é a de produzir, continuamente no tempo, a integral da entrada. O valor da condição inicial (numérica ou simbólica) é definido no menu da Fig. 14. Limites de saturação para o integrador também podem ser introduzidos.

D. Intervalo de Tempo e Parâmetros de Integração da Simulação

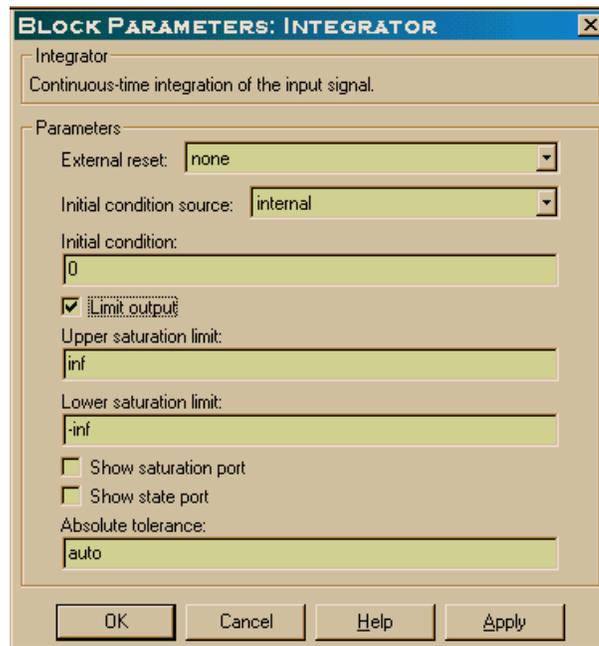


Figura 14: O menu de parâmetros do integrador.

Os parâmetros de simulação são escolhidos através do menu: Simulation/Parameters acessível da janela de simulação, mostrada na Fig. 15.

Nesse menu, deve-se ajustar o intervalo de tempo de duração da simulação que se deseja visualizar, marcando-se o *tempo inicial* e o *tempo final*. É possível também escolher o método de integração que será implementado em todos os integradores, e ajustar os parâmetros da rotina para se atingir a precisão desejada. Diminuindo-se as tolerâncias, o resultado se torna mais preciso. Em contrapartida, a simulação fica mais lenta.

5 Equações Diferenciais Lineares

Os sistemas dinâmicos que veremos neste curso são geralmente regidos por equações diferenciais lineares. Ainda que na maior parte dos casos isto seja apenas um modelo aproximado dos sistemas, trata-se geralmente de uma aproximação que leva a bons resultados, e que leva a uma formulação mais facilmente tratável. A seguir, discute-se como obter soluções analíticas para equações diferenciais, bem como algumas de suas propriedades.

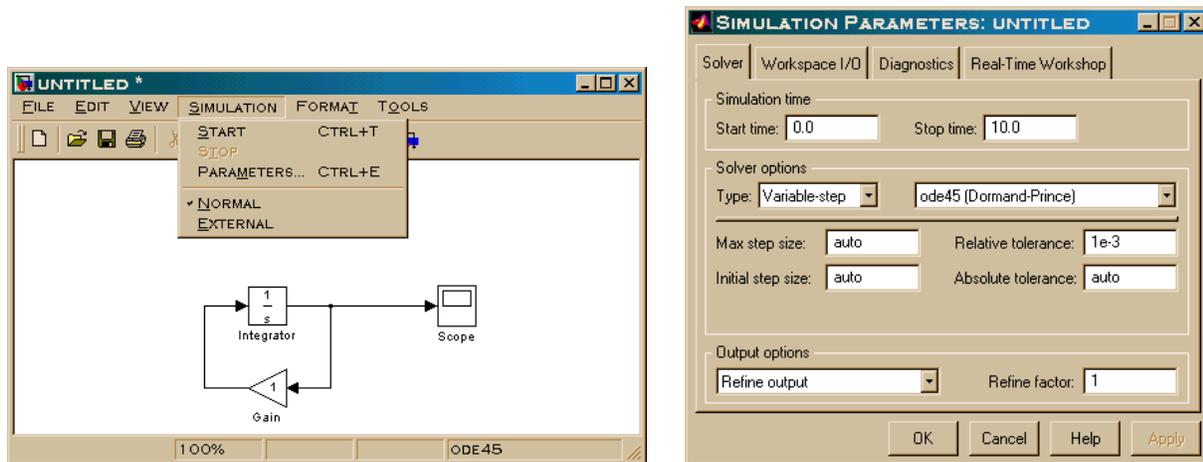


Figura 15: O menu de parâmetros de simulação.

5.1 Equação Diferencial Linear de 1a. Ordem Homogênea

A equação diferencial homogênea mais simples tem a forma

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = x_0 \quad (16)$$

onde $x = x(t)$ é uma função real da variável real t (associada nos exemplos anteriores ao tempo) a ser determinada e λ é uma constante real dada. Supõe-se que a condição inicial ou valor de x no instante $t = 0$, $x(0) = x_0$ é conhecida. A solução única da equação (16) é dada por

$$x(t) = \exp(\lambda t)x_0 \quad (17)$$

O comportamento qualitativo da solução $x(t)$ é mostrado na Fig. 16, em função do sinal da constante real λ . Note que

1. Se $\lambda > 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ é divergente, e diz-se neste caso que o sistema descrito pela equação diferencial é *instável*;
2. Se $\lambda = 0$ então $x(t) = x_0$, $t \geq 0$ e o sistema é *estável*;
3. Se $\lambda < 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e o sistema é *assintoticamente estável*.

5.2 Equação Diferencial Linear de 2a. Ordem Homogênea

Uma equação diferencial linear de 2a. ordem homogênea envolve a derivada de 2a. ordem da variável dependente e pode ser representada genericamente como

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = Dx_0 \quad (18)$$

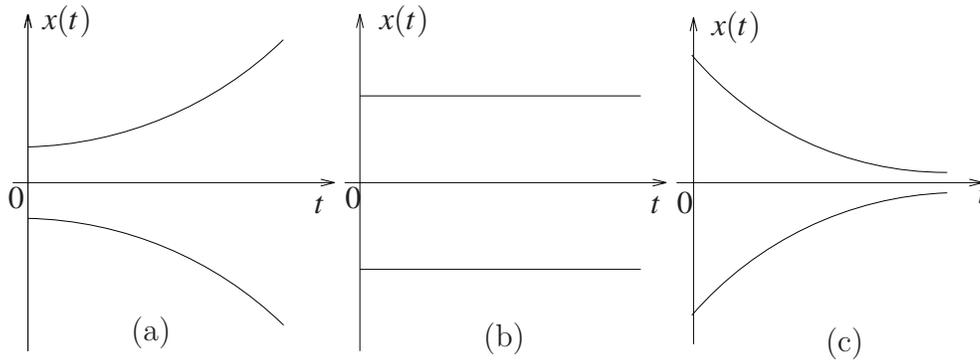


Figura 16: (a) Sistema Instável ($\lambda > 0$); (b) Sistema Estável ($\lambda = 0$); (c) Sistema Assintoticamente Estável ($\lambda < 0$).

Devido à semelhança desta equação com a equação de 1a. ordem apresentada na seção anterior, supõe-se que a solução é do mesmo tipo, ou seja,

$$x(t) = \exp(\lambda t) \quad (19)$$

Substituindo esta solução na equação (18), obtém-se

$$\dot{x} = \lambda \exp(\lambda t) \quad (20)$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 \exp(\lambda t) \quad (21)$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = (\lambda^2 + a\lambda + b) \exp(\lambda t) = 0 \quad (22)$$

Dado que a função $\exp(\lambda t)$ nunca se anula, uma condição necessária para que (19) seja solução de (18) será

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (23)$$

Esta equação algébrica é chamada de *Equação Característica* da equação diferencial (18) e possui em geral duas raízes distintas, λ_1 e λ_2 . Portanto, as funções

$$\exp(\lambda_1 t) \quad \text{e} \quad \exp(\lambda_2 t) \quad (24)$$

satisfazem a equação (18) a menos das condições iniciais. Por outro lado, se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ satisfazem a equação (18), é fácil verificar que o mesmo ocorre com $f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$, bastando para tanto que se substitua $f(t)$ em (18). Deste modo, uma solução para a equação (18) é

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (25)$$

onde λ_1 e λ_2 são as raízes da equação (23). O tipo de solução da equação diferencial dependerá da natureza destas raízes.

5.2.1 Raízes Reais e Distintas

Se λ_1 e λ_2 são valores reais e distintos tem-se então que

$$\dot{x}(t) = k_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (26)$$

e portanto

$$x(0) = k_1 + k_2 = x_0 \quad (27)$$

$$\dot{x}(0) = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = Dx_0 \quad (28)$$

$$k_1 = \frac{-Dx_0 + \lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (29)$$

$$k_2 = \frac{Dx_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (30)$$

Este resultado permite concluir que, se $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, a solução dada por (25) é geral, pois pode ser calculada para quaisquer valores de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Além disso, é possível mostrar que esta solução é única.

5.2.2 Raiz Real Dupla

Neste caso, $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ e portanto

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) = (k_1 + k_2) \exp(\lambda t) = k_3 \exp(\lambda t) \quad (31)$$

Esta solução não é geral, pois existe apenas uma incógnita (k_3) e não é possível resolver o sistema

$$x(0) = k_3 = x_0 \quad (32)$$

$$\dot{x}(0) = k_3 \lambda = Dx_0 \quad (33)$$

para quaisquer valores de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Entretanto, considere a seguinte função

$$x(t) = t \exp(\lambda t) \quad (34)$$

Esta função satisfaz a equação diferencial, pois

$$\dot{x} = t\lambda \exp(\lambda t) + \exp(\lambda t) \quad (35)$$

$$\ddot{x} = \lambda[t\lambda \exp(\lambda t) + \exp(\lambda t)] + \lambda \exp(\lambda t) \quad (36)$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = t \exp(\lambda t)(\lambda^2 + a\lambda + b) + \exp(\lambda t)(2\lambda + a) \quad (37)$$

A expressão entre parênteses é nula pois λ é solução da equação característica. A expressão no segundo parênteses também é nula pois $\lambda = -a/2$. Conseqüentemente (34) satisfaz a equação diferencial, o mesmo ocorrendo com a combinação linear de funções

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda t) + k_2 t \exp(\lambda t) \quad (38)$$

Usando-se as condições iniciais, obtém-se os valores de k_1 e k_2 :

$$k_1 = x_0 \quad (39)$$

$$k_2 = Dx_0 - x_0 \lambda \quad (40)$$

A solução representada por (38) é geral para o caso $\lambda_2 = \lambda_1$ uma vez que é possível calcular k_1 e k_2 para quaisquer valores iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

5.2.3 Raízes Complexas

A solução da equação diferencial neste caso envolverá a chamada *Fórmula de Euler*, a saber

$$\exp(j\theta) = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad (41)$$

Se λ é uma raiz complexa da equação (23) então $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ) também é raiz da mesma equação. Sejam

$$\lambda_1 = \sigma + j\omega \quad (42)$$

$$\lambda_2 = \sigma - j\omega, \quad \omega \neq 0 \quad (43)$$

as raízes da equação característica. Considere a solução dada por (25), ou seja,

$$x(t) = k_1 \exp(\lambda_1 t) + k_2 \exp(\lambda_2 t) = k_1 \exp[(\sigma + j\omega)t] + k_2 \exp[(\sigma - j\omega)t] \quad (44)$$

Utilizando (41), obtém-se

$$x(t) = \exp(\sigma t)[A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t] \quad (45)$$

onde $A = k_1 + k_2$ e $B = j(k_1 - k_2)$. Usando as condições iniciais, obtém-se

$$x(0) = A = x_0 \quad (46)$$

$$\dot{x}(0) = \sigma A + B\omega = Dx_0 \quad (47)$$

ou ainda

$$A = x_0 \quad (48)$$

$$B = \frac{Dx_0 - \sigma x_0}{\omega} \quad (49)$$

Em consequência, se $\omega \neq 0$ é possível obter A e B para quaisquer valores iniciais de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Assim sendo, (45) é uma solução geral quando as raízes da equação característica são complexas. O comportamento qualitativo da solução $x(t)$ é analisado nas Figs. 17 e 18, a seguir. A resposta do sistema no caso de raízes duplas é qualitativamente similar ao representado na Fig. 17.

6 Equações Lineares Não-Homogêneas

Seja a equação diferencial linear de 2a. ordem não-homogênea dada a seguir

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u(t), \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = Dx_0 \quad (50)$$

Seja $x_p(t)$ uma solução qualquer desta equação e $x_h(t)$ a solução da equação homogênea (quando $u(t) = 0, \forall t$). Tem-se então que

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (51)$$

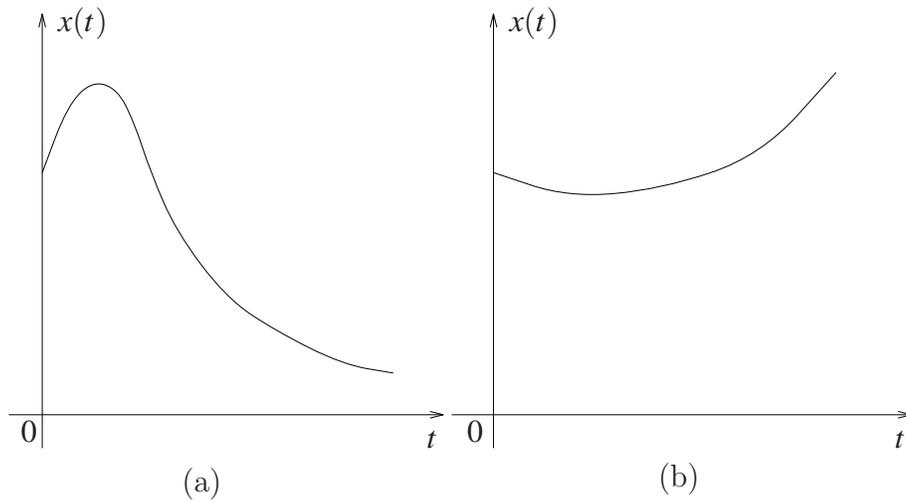


Figura 17: Raízes Reais e Distintas. (a) Raízes negativas; (b) Uma raiz positiva.

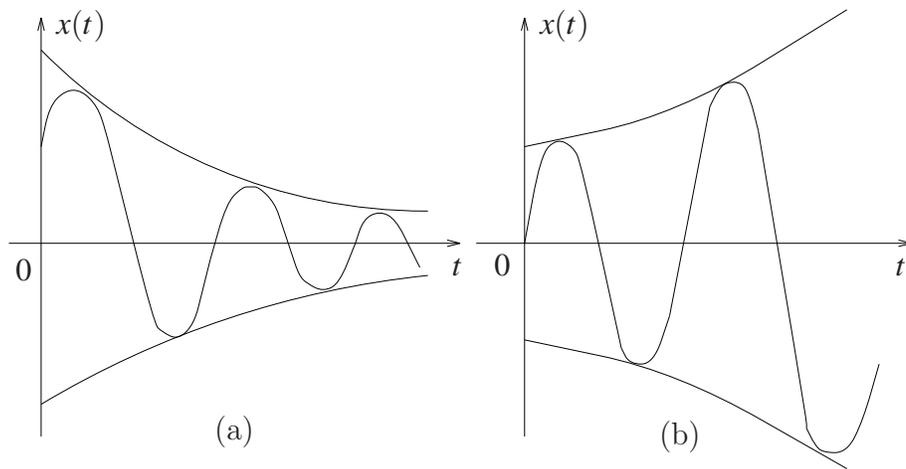


Figura 18: Raízes Complexas. (a) Parte real negativa; (b) Parte real positiva.

é uma solução da equação (50). De fato, substituindo-se (51) em (50), vem

$$(\ddot{x}_h + a\dot{x}_h + bx_h) + \ddot{x}_p + a\dot{x}_p + bx_p = 0 + u(t) \quad (52)$$

Além disso, fazendo

$$x(0) = x_h(0) + x_p(0) \quad (53)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_h(0) + \dot{x}_p(0) \quad (54)$$

é sempre possível encontrar uma solução para (50) quaisquer que sejam as condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Conclui-se portanto que (51) é uma solução geral para a equação não-homogênea (50). Estes fatos são verdadeiros para equações diferenciais lineares não-homogêneas, independentemente de suas ordens.

O problema se resume então em obter $x_p(t)$, que é chamada de *solução particular*.

Esta solução depende obviamente da função $u(t)$. Nesta experiência, considera-se apenas o caso particular em que $u(t)$ é uma função constante, isto é, $u(t) = E$ (constante).

Suponha que a solução particular é do tipo $x_p(t) = K$, $\forall t$, onde K é uma constante a determinar. Neste caso, é fácil ver que $\ddot{x}_p(t) = \dot{x}_p(t) = 0$ e que a equação

$$\ddot{x}_p + a\dot{x}_p + bx_p = bK = E \quad (55)$$

permite obter $K = E/b$. É comum considerar a função $u(t)$ como sendo a *função degrau*, ou seja,

$$u(t) = \begin{cases} E & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (56)$$

Neste caso, considerando o instante inicial igual a 0, a solução particular obtida não se altera, ou seja,

$$x_p(t) = \frac{E}{b}, \quad t \geq 0 \quad (57)$$

As Figs. 19 e 20, a seguir, ilustram o comportamento qualitativo da solução geral (51), para os três casos analisados anteriormente, supondo-se condições iniciais nulas ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$). Como no caso anterior, a resposta do sistema com raízes duplas é qualitativamente similar à representada na Fig. 19.

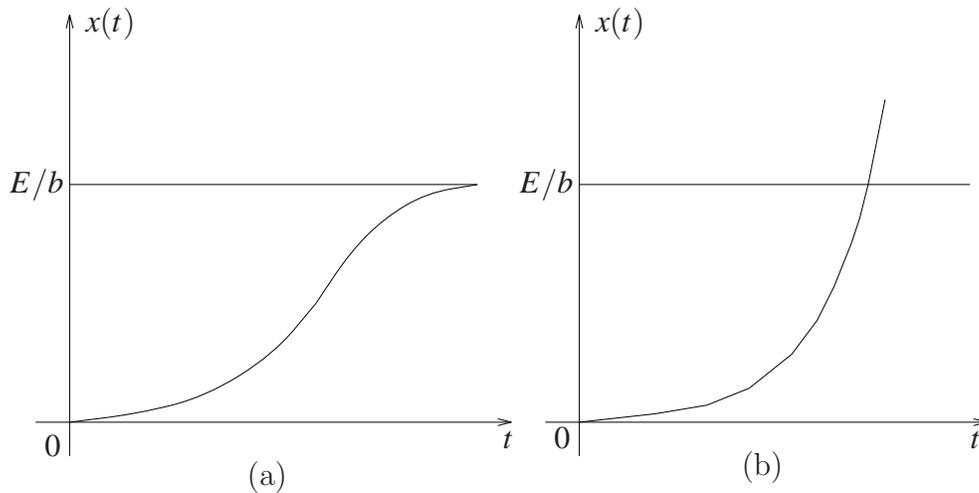


Figura 19: (a) Raízes negativas; (b) Uma raiz positiva.

Considere agora o caso de uma equação diferencial linear não-homogênea de 1a. ordem, na forma

$$\dot{x} - \lambda x = u(t) \quad (58)$$

Se $u(t) = E$, a solução particular será também do tipo $x_p(t) = K$, conforme pode ser visto através de (58):

$$\dot{x}_p - \lambda x_p = E \quad (59)$$

$$-\lambda K = E \quad (60)$$

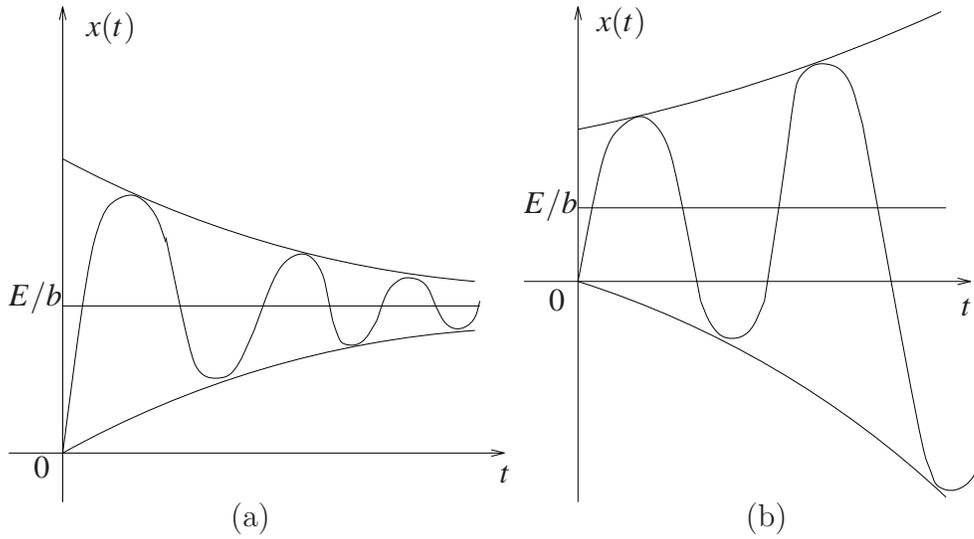


Figura 20: (a) Parte real negativa; (b) Parte real positiva.

e assim $K = -E/\lambda$. A solução geral é obtida através da composição de (17) com a solução particular, fornecendo,

$$x(t) = \exp(\lambda t)x_h(0) - \frac{E}{\lambda}, \quad x_h(0) = x(0) + \frac{E}{\lambda} \quad (61)$$

Analogamente ao caso estudado anteriormente, esta solução não se altera para $t \geq 0$ se a entrada for a função degrau. O comportamento qualitativo da solução (61) é ilustrado na Fig. 21, a seguir, para $x(0) = 0$. No caso de sistemas estáveis de 1a. ordem, a grandeza

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} > 0 \quad (62)$$

é chamada de *constante de tempo* do sistema. A constante de tempo corresponde ao instante no qual a variável dependente atinge aproximadamente 64% de seu valor de regime (o valor de regime é $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -E/\lambda$). De fato, para $t = \tau = -1/\lambda$ e $x(0) = 0$, tem-se que

$$x\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{E}{\lambda}(1 - \exp(-1)) \approx 0.64\left(-\frac{E}{\lambda}\right) \quad (63)$$

Para $t = 3\tau$, constata-se que a variável dependente atinge cerca de 95% do seu valor de regime.

7 Forma Canônica da Equação de 2a. Ordem

A equação diferencial linear de 2a. ordem é frequentemente escrita na sua *forma canônica*, dada a seguir.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = u(t) \quad (64)$$

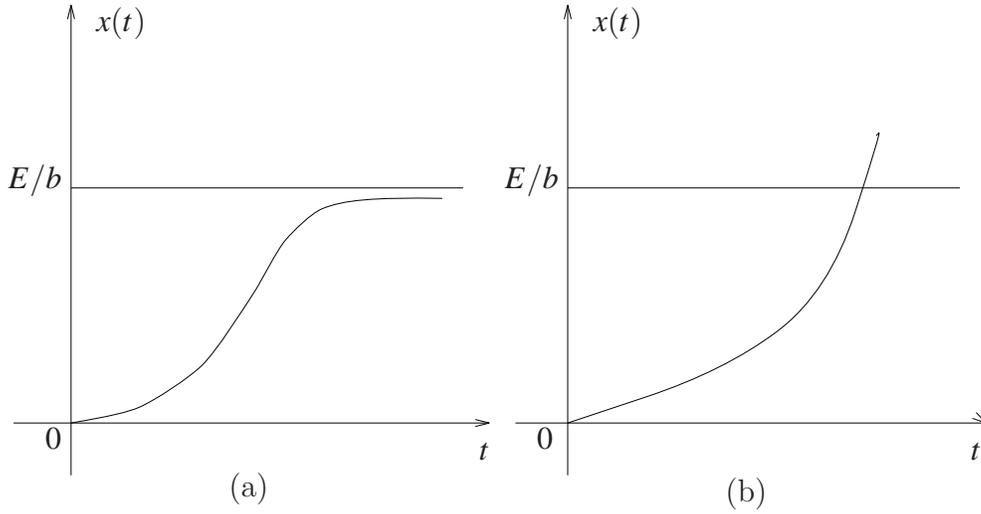


Figura 21: (a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$.

De acordo com os resultados obtidos anteriormente, o comportamento da solução de (64) é definido pelas raízes da equação característica

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (65)$$

com $\omega_n > 0$. As raízes da equação são

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (66)$$

$$\lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (67)$$

É fácil ver que

1. Se $|\xi| > 1$, obtém-se duas raízes reais distintas;
2. Se $|\xi| = 1$, obtém-se uma raiz dupla;
3. Se $|\xi| < 1$, obtém-se raízes complexas conjugadas.

Neste último caso, é possível reescrever as raízes da equação na forma

$$\lambda_1 = \omega_n(-\xi + j\sqrt{1 - \xi^2}) \quad (68)$$

$$\lambda_2 = \omega_n(-\xi - j\sqrt{1 - \xi^2}) \quad (69)$$

ou ainda,

$$\lambda_1 = \omega_n(-\cos\theta + j\sin\theta) \quad (70)$$

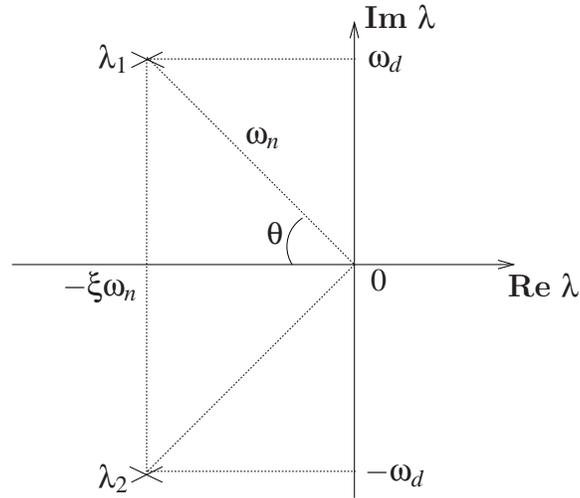
$$\lambda_2 = \omega_n(-\cos\theta - j\sin\theta) \quad (71)$$

onde $\theta = \arccos \xi$. Analisando as raízes no plano complexo (Fig. 22), observa-se que se $\xi = 0$, as raízes serão números complexos puros e a solução da equação homogênea será, de acordo com a equação (45),

$$x_h(t) = A \cos \omega_d t + B \text{sen } \omega_d t \quad (72)$$

onde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (73)$$



$$\xi = \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n \text{sen}(\theta) = \omega_n \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Figura 22: Localização no Plano Complexo. A distância de λ_1 ou λ_2 à origem é igual a ω_n .

Por esta razão, o parâmetro ω_n é chamado de *frequência natural* da equação (64). Para um dado valor de ω_n , quanto maior for o valor de ξ ($0 < \xi < 1$), maior será o módulo da parte real das raízes e, em consequência, mais *amortecida* será a solução. Devido a esta propriedade, o parâmetro ξ é chamado de *fator ou coeficiente de amortecimento* da equação (64).

Referências

- [1] José C. Geromel, Álvaro G. B. Palhares, *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*, Ed. Edgar Blücher, 2004.
- [2] A. Hausner, *Analog and Analog / Hybrid Computer Programming*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- [3] A. S. Jackson, *Analog Computation*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [4] Manuais de MATLAB e SIMULINK (on line no MATLAB: helpwin ou helpdesk).

Roteiro

O pacote computacional SIMULINK para simulação de sistemas disponível na FEEC-UNICAMP deve ser utilizado nesta parte para resolver numericamente equações diferenciais ordinárias. A partir da construção de um Diagrama de Simulação Analógica correspondente, pode-se facilmente definir um diagrama de simulação SIMULINK que permitirá a simulação digital do sistema em questão.

Dicas de Simulink:

- O **Scope**, bloco que mostra os gráficos, está na pasta **Sinks** do Simulink.
- As entradas, como o degrau, estão na pasta **Sources** do Simulink.
- Os integradores estão na pasta **Continuous** do Simulink.
- Os somadores estão na pasta **Math Operations** do Simulink.

1. Obtenha graficamente a resposta do sistema

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2u(t)$$

para $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ e $u(t) = \text{degrau unitário}$. Utilize a janela do Matlab e a simulação do sistema no SIMULINK, de forma a traçar um conjunto de respostas $x(t)$ para diferentes valores do fator de amortecimento ξ e frequência natural de oscilação ω_n . Para variar os parâmetros de forma simples, vamos usar o fato de que, se um (e apenas um) dos parâmetros de um modelo for passado na forma de um vetor, o Simulink rodará diversas simulações simultaneamente, usando em cada uma um valor diferente para esse parâmetros, retirado do vetor. Notas:

- Para se beneficiar dessa característica do Simulink, é necessário definir os parâmetros como variáveis no modelo do Simulink, e dar valor para essas variáveis no workspace do Matlab.
- Na definição dos ganhos, fórmulas matemáticas envolvendo os parâmetros são aceitas.
- O Matlab se confunde com elevar um vetor ao quadrado. O que desejamos nesse caso é uma operação elemento a elemento, o que pode ser obtido com um ponto antes do operador: $w.^2$

Plote através dos comandos de manipulação de figuras todas as respostas na mesma figura para os casos

- a) $\omega_n = 2$ e ξ variando na forma $0:0.2:2$. Considerando o papel de ξ no comportamento do sistema, qual gráfico corresponde a qual valor de ξ ?
- b) $\xi = 0.5$ e ω_n e variando na forma $0.5:0.5:2$. Considerando o papel de ω no comportamento do sistema, qual gráfico corresponde a qual valor de ω ?

2. Repita a simulação do item anterior, usando $\omega_n = 2$ e $\xi = 0.5$, e trocando o sinal do termo $\omega_n^2 x$ na equação diferencial. Explique fisicamente o que acontece, relacionando a equação na forma canônica com um sistema massa-mola-atrito, que é regido pela equação

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t).$$

Em outras palavras, dê uma explicação intuitiva para o comportamento de um sistema massa-mola se o sinal de k for negativo? O que aconteceria se o coeficiente de atrito tivesse um sinal negativo?

3. Uma entrada impulsiva de um sistema é uma entrada que tem uma duração tão curta que sua forma de onda não importa para a resposta do sistema, apenas sua área determina a saída. O impulso é, então, uma idealização dessa entrada: ele possui duração nula e área unitária. Essa idealização é vantajosa pois facilita o cálculo de integrais. Repita a simulação do item anterior para $\xi = 0.2$, $\omega_n = 2$ e $u(t) = \delta(t)$.

- Gere a entrada impulsiva de forma aproximada, considerando um pulso de área unitária e de duração muito curta. Use dois blocos **Step** para isso.
- Verifique a qualidade da aproximação para o impulso usando o fato de que a integral do impulso é um degrau. Mostre a integral do seu impulso em um **Scope**.
- Para controlar a duração e área de seu impulso, utilize nas suas definições no Simulink uma variável, como **delta**. Esta variável deve ter um valor especificado na linha de comando do Matlab. Esta operação facilita a variação da duração do pulso. Vá diminuindo o valor de **delta**. Você deve notar que, a partir de um determinado valor, continuar diminuindo esta variável não altera a saída.

4. Este item tem relação com um problema encontrado nos equipamentos deste laboratório: na maioria deles, a entrada é uma força ou um torque produzido por um motor. Entretanto, o motor é também um sistema dinâmico cuja entrada é uma corrente, que se relaciona com o torque em sua saída através de equações diferenciais. Este é um caso de conexão em cascata de sistemas dinâmicos, em que a saída de um sistema é a entrada do seguinte. É necessário levar em conta o modelo dinâmico do motor nos experimentos? Nesse experimento, veremos que ignorar essa dinâmica pode ser uma aproximação razoável. Para isso, analisaremos neste item os conceitos de comutatividade (possibilidade de intercambiar sistemas conectados em cascata) e de polo dominante (em que alguns poucos polos dominam o comportamento do sistema e os outros podem ser desprezados).

Para estudar essa questão, considere um caso simplificado de dois sistemas de primeira ordem em cascata. O primeiro possui polo em $\lambda_1 = -20$, o segundo possui polo em $\lambda_2 = -0.5$. Em outras palavras, os sistemas são regidos pelas equações

$$\dot{z} - \lambda_1 z = u(t)$$

e

$$\dot{y} - \lambda_2 y = z(t).$$

- Faça uma simulação desses dois sistemas em cascata, usando uma entrada degrau.
 - Para avaliar a questão da comutatividade, repita a simulação anterior, trocando a ordem dos sistemas, e compare as respostas. Para isso, use o bloco **Mux** e coloque ambas as respostas no mesmo **Scope**.
 - Para avaliar a questão da dominância de polos, responda: Se você fosse aproximar um desses dois subsistemas por uma relação de proporcionalidade entre entrada e saída, qual deles você escolheria: o mais rápido ou o mais lento? Qual dos dois sistemas é mais rápido e qual é mais lento?
 - Qual seria o valor analítico da constante de proporcionalidade? Para responder essa pergunta, considere que a aproximação por uma constante deve aproximar a resposta ao degrau do sistema.
 - Simule a resposta do sistema que contém apenas um sistema de primeira ordem, com o sistema escolhido acima sendo aproximado por um ganho, e compare com a resposta do sistema com as duas raízes.
5. Faça um teste sobre a possível validade do Princípio de Superposição. Este princípio é enunciado da seguinte maneira.

Princípio de Superposição: Considere duas entradas quaisquer $f_1(t)$ e $f_2(t)$ aplicadas a um sistema. Suponha que em resposta a $f_1(t)$ observe-se a saída $x_1(t)$, e ao se aplicar $f_2(t)$ observa-se $x_2(t)$. O princípio de superposição é válido para o sistema em questão se para quaisquer entradas $f_1(t)$ e $f_2(t)$, ao se introduzir uma nova entrada $f_3(t)$ definida como

$$f_3(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$$

para α e β escalares quaisquer, a resposta observada será exatamente

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

Considere então o sistema:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f(t)$$

com $\omega_n = 2$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ e $\xi = 0.5$.

Adote duas entradas distintas e verifique, utilizando as respostas temporais obtidas no SIMULINK, se a superposição é válida para as entradas escolhidas.

6. **IMPORTANTE:** Verifique visualmente se o passo escolhido pela rotina de integração do SIMULINK é apropriado. Caso não seja suficientemente pequeno, as curvas das respostas não serão suaves mas cheias de quebras e “pontas”.