



UNICAMP – Faculdade de Engenharia  
Elétrica e de Computação  
EA-619 Laboratório de Análise Linear

Experiência 4: Resposta em Frequência: Método  
e Aplicação em Identificação

3 de fevereiro de 2012

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Pólos e Zeros de Funções Complexas . . . . .	2
1.2	Transformada de Laplace . . . . .	3
1.3	Função de Transferência . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Resposta de um Sistema Linear à Entrada Senoidal</b>	<b>5</b>
2.1	Diagramas de Bode . . . . .	9
2.1.1	Traçado dos diagramas de Bode: exemplo . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Resposta em Frequência dos Equipamentos ECP</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Identificação de Sistemas pelo Método Freqüencial</b>	<b>17</b>
4.1	Resposta em Frequência de Sistemas de 2a. Ordem . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Procedimento Experimental</b>	<b>18</b>
5.1	Procedimento de cálculo da relação de amplitudes e defasagem . . . . .	20
5.2	Identificação de parâmetros do emulador industrial . . . . .	23
5.2.1	Disco de atuação sem pesos . . . . .	23
5.2.2	Disco de atuação com pesos . . . . .	24
5.3	Identificação de parâmetros do sistema retilíneo . . . . .	25
5.3.1	Carro #1 sem pesos . . . . .	25
5.3.2	Carro #1 com pesos . . . . .	27
5.4	Identificação de parâmetros do sistema torcional . . . . .	27
5.4.1	Disco #1 sem pesos . . . . .	27
5.4.2	Disco #1 com pesos . . . . .	29
5.5	Identificação dos parâmetros do pêndulo invertido . . . . .	29

5.5.1	Parâmetros da haste deslizante . . . . .	29
5.5.2	Parâmetros da haste principal . . . . .	31
5.6	Identificação dos parâmetros do levitador magnético . . . . .	32
5.6.1	Disco #1 em malha fechada . . . . .	32
5.6.2	Disco #1 sem compensação da força magnética . . . . .	34
	<b>Reposta em Frequência usando Matlab</b>	<b>36</b>

## 1 Introdução

Quando aplica-se uma entrada senoidal a um sistema linear invariante no tempo, sua resposta em regime permanente será também senoidal de mesma frequência, diferindo da entrada apenas em magnitude e fase. A resposta em frequência de um sistema dinâmico é definida como a resposta em regime estacionário a uma entrada senoidal, em uma faixa de frequência de interesse.

O método da resposta em frequência é uma abordagem alternativa importante na análise e projeto de um sistema. Através desse método, pode-se determinar a função de transferência de um dado sistema linear, e também controlar sua faixa de passagem, de modo a minimizar os efeitos de ruídos.

### 1.1 Pólos e Zeros de Funções Complexas

Seja  $G(s)$  uma função complexa da variável complexa  $s = \sigma + j\omega$ . Para cada  $s$  complexo, tem-se

$$G(s) = \text{Re}[G(s)] + j\text{Im}[G(s)]$$

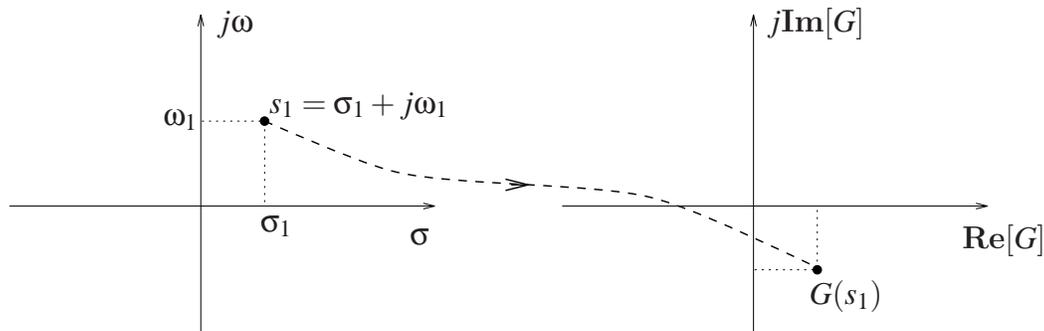


Figura 1: Função de variável complexa.

**Definição 1.** Uma função  $G(s)$  da variável complexa  $s$  é **função analítica** em uma região do plano  $s$  se a função e todas as suas derivadas existirem na região.

**Exemplo 1.** A função

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

é analítica em todos os pontos do plano  $s$ , exceto em  $s = 0$  e  $s = -1$ .

**Definição 2.** Se uma função  $G(s)$  é analítica na vizinhança de  $s_i$ , diz-se que  $G(s)$  tem um **pólo de ordem  $r$**  em  $s_i$  se o limite

$$\lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i)^r G(s)$$

tem um valor finito não nulo.

**Exemplo 2.** A função

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+3)^2}$$

tem um pólo simples (ordem 1) em  $s = -1$  e um pólo de ordem 2 em  $s = -3$ .

**Definição 3.** Uma função  $G(s)$  tem um **zero de ordem  $r$**  em  $s_i$  se  $1/G(s)$  tem um pólo de ordem  $r$  em  $s = s_i$ . Alternativamente,  $s_i$  é um zero de  $G(s)$  se  $\lim_{s \rightarrow s_i} G(s) = 0$ .

No exemplo anterior, a função  $G(s)$  tem um zero em  $s = -2$ . Considerando-se os zeros no infinito,  $G(s)$  tem também um zero de ordem 2 em  $s = \infty$ . Nesse sentido, dada uma função racional de  $s$  tem-se que o número de pólos é igual ao número de zeros.

## 1.2 Transformada de Laplace

Considere a função  $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ , expressa como

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} [\exp(j\omega_0 t) - \exp(-j\omega_0 t)] \quad (1)$$

pois,  $\exp(j\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$ . Calculando a transformada de Fourier, obtém-se que

$$F(\omega) = \frac{1}{2j} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[j(\omega_0 - \omega)t] dt - \int_0^{\infty} \exp[-j(\omega_0 + \omega)t] dt \right\}$$

Note que as integrais acima não convergem, pois as funções  $\exp[j(\omega_0 - \omega)t]$  e  $\exp[-j(\omega_0 + \omega)t]$  são periódicas e não se aproximam de nenhum limite.

Considere agora a seguinte modificação da transformada de Fourier

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt$$

onde  $s = \sigma + j\omega$ . Daí,

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) \sin(\omega_0 t) dt \quad (2)$$

e aplicando-se a forma (1), tem-se

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} \{\exp[-(s-j\omega_0)t] - \exp[-(s+j\omega_0)t]\} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0} \right] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{2j\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right] \end{aligned}$$

e portanto

$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{para } \mathbf{Re}[s] = \sigma > 0 \quad (3)$$

Pode-se então definir um espectro de frequência  $F(s)$  para todo  $s$  tal que  $\mathbf{Re}[s] > 0$ . A Fig. 2 mostra a região de convergência<sup>1</sup> da integral (2) e os pólos de  $F(s)$ .

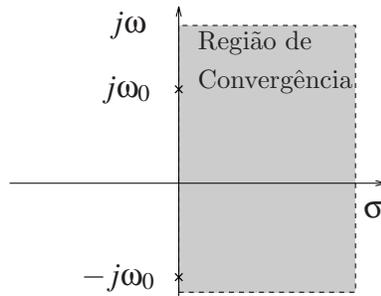


Figura 2: Plano Complexo e Região de Convergência.

Considere agora a classe de funções  $f(t)$  contínuas por partes, tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\sigma t) |f(t)| \rightarrow 0$$

para algum  $\sigma > 0$  e  $f(t) = 0$ , para  $t < 0$ . Para essa classe de funções define-se a transformada de Laplace de  $f(t)$  por

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt \quad (4)$$

**Exemplo 3.** Seja  $f(t) = \exp(at)$ ,  $t \geq 0$ ,  $a$  complexo. Então,

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{para } \mathbf{Re}[s] > \mathbf{Re}[a]$$

Pode-se mostrar que, se a função  $f(t)$  tem derivada de ordem  $n$ , então a transformada de Laplace de  $f^{(n)}(t)$  é dada por

$$s^{(n)} F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (5)$$

onde  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$  e  $f^{(k)}(0)$  é a  $k$ -ésima derivada de  $f(t)$  calculada no tempo  $t = 0$ .

<sup>1</sup>O Teorema da Extensão Analítica valida esse resultado para todo o plano  $s$  (Ver Ogata na lista de Referências).

### 1.3 Função de Transferência

Seja o sistema linear descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) &= \\ &= b_m\frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + b_1\frac{d}{dt}u(t) + b_0u(t) \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$  são constantes reais e  $n > m$ . Além disso, supõe-se que

$$y(0) = y^{(1)}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = u(0) = u^{(1)}(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação (6) e usando (5), obtém-se

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)U(s)$$

e daí

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

A função  $G(s)$  é chamada de **função de transferência** de  $U(s)$  para  $Y(s)$ . Esquemáticamente,

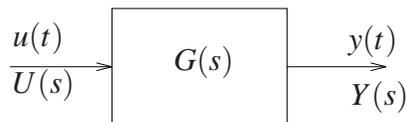


Figura 3: Função de Transferência.

Note que os pólos e zeros finitos de  $G(s)$  são, respectivamente, as raízes dos polinômios  $D(s)$  e  $N(s)$ . Observe que, a função de transferência:

- caracteriza unicamente um sistema linear invariante no tempo;
- é independente da entrada;
- é obtida supondo-se que todas as condições iniciais do sistema são nulas.

## 2 Resposta de um Sistema Linear à Entrada Senoidal

Seja um sistema linear invariante no tempo representado pela função de transferência  $G(s) = N(s)/D(s)$ . Para facilitar a exposição, suponha que os pólos de  $G(s)$ ,  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são distintos com parte real negativa. Pode-se então escrever

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

Supondo que a entrada do sistema é  $u(t) = A \sin(\omega t)$ , a resposta em regime estacionário, isto é,

$$y_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

pode ser calculada. O sistema é assintoticamente estável (parte real dos pólos negativa) e as condições iniciais são nulas. Seja  $U(s)$  a transformada de Laplace de  $u(t) = A \sin(\omega t)$ . Então, de (3), tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \left( \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \dots + \frac{c_n}{s - s_n} \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $a$  e  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são constantes e  $\bar{a}$  é o complexo conjugado de  $a$ . A transformada inversa de Laplace da equação (7) fornece (veja equação (4))

$$\begin{aligned} y(t) &= a \exp(-j\omega t) + \bar{a} \exp(j\omega t) + c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_2 t) + \dots \\ &\quad \dots + c_n \exp(s_n t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Como a parte real de  $s$  é por hipótese negativa, tem-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(s_i t) \rightarrow 0$ . Se  $G(s)$  tiver pólos de multiplicidade  $m_k$ , então  $y(t)$  possuirá termos do tipo  $t^{k_j} \exp(s_j)$ ,  $k_j = 0, 1, \dots, m_k - 1$ . Como  $\text{Re}[s_j] < 0$ , tem-se também que  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{k_j} \exp(s_j t) \rightarrow 0$ . Portanto,

$$y_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \exp(-j\omega t) + \bar{a} \exp(j\omega t) \quad (8)$$

As constantes  $a$  e  $\bar{a}$  podem ser calculadas a partir de (7) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} \\ \bar{a} &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s = j\omega} = +\frac{AG(j\omega)}{2j} \end{aligned}$$

Como  $G(s)$  é uma função complexa, tem-se

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \exp[j\phi(\omega)]$$

onde

$$\phi(\omega) = \arctan \left[ \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)} \right]$$

Analogamente,

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \exp[-j\phi(\omega)] = |G(j\omega)| \exp[-j\phi(\omega)]$$

e de (8), obtém-se

$$y_e(t) = A |G(j\omega)| \frac{\exp[j(\omega t + \phi(\omega))] - \exp[-j(\omega t + \phi(\omega))]}{2j}$$

$$= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)) = B \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

onde  $B = A |G(j\omega)|$ .

Concluindo, um sistema linear, assintoticamente estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal, possui em regime estacionário uma saída senoidal com a mesma frequência de entrada, porém com amplitude e ângulo de fase em geral distintos. Portanto, para uma entrada senoidal:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| &= & \text{Relação de amplitude entre a saída senoidal} \\ & & & \text{e a entrada senoidal.} \\ \phi(j\omega) & &= & \text{Defasagem da saída senoidal em relação à en-} \\ & & & \text{trada senoidal.} \end{aligned}$$

A saída senoidal em regime estacionário pode ser obtida a partir das características da entrada senoidal (amplitude e frequência) e das características de  $G(j\omega)$  (amplitude e fase). Alternativamente, a função de transferência de um sistema linear pode ser identificada levantando-se os gráficos da relação de amplitudes e ângulos de fase em função da frequência.

**Exemplo 4.** Considere o circuito  $RC$  na Fig. 4. Tem-se que

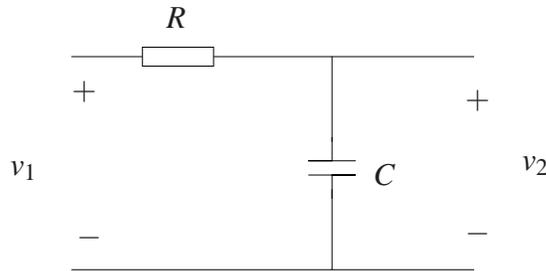


Figura 4: Circuito  $RC$  série.

$$v_1(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad ; \quad v_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

e tomando a transformada de Laplace das equações acima, obtém-se

$$V_1(s) = \left( R + \frac{1}{sC} \right) I(s) \quad ; \quad V_2(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Portanto

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$

que é a função de transferência do sistema. Daí,

$$G(j\omega) = \frac{1}{j \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right) + 1} \quad , \quad \omega_1 = \frac{1}{RC} \quad (9)$$

e

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1}}, \quad \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \quad (10)$$

Portanto, para uma entrada  $v_1(t) = A \sin(\omega t)$ ,

$$v_2(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right)$$

De (9), tem-se que  $G(j\omega) = a - jb$ , onde

$$a = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}, \quad b = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

e pode-se verificar que  $a^2 + b^2 = a$ , e daí  $(a - 1/2)^2 + b^2 = 1/4$ . Portanto, o lugar geométrico das partes real e imaginária de  $G(j\omega)$  é um círculo de raio  $1/2$  e centro em  $(1/2, 0)$ . De (10), tem-se que:

- a) para  $\omega = 0$ ,  $|G(j\omega)| = 1$  e  $\phi(\omega) = 0$ .
- b) para  $\omega = \omega_1$ ,  $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\phi(\omega) = -45^\circ$ .
- c) para  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$  e  $\phi(\omega) = -90^\circ$ .

A Fig. 5 mostra o gráfico polar de  $G(j\omega)$  em função da frequência  $\omega$ .

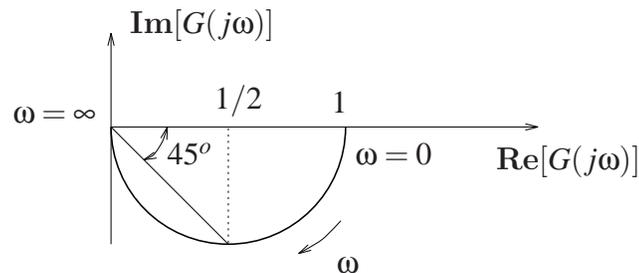


Figura 5: Gráfico polar de  $G(j\omega)$ .

O gráfico polar da Fig. 5 caracteriza um sistema linear cuja função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

onde o parâmetro  $\tau$  pode ser identificado da seguinte forma: injeta-se um sinal senoidal na entrada, com frequência variável. A frequência correspondente a uma saída senoidal defasada de  $45^\circ$  da entrada é igual a  $1/\tau$ . Alternativamente, a frequência  $1/\tau$  corresponde a uma relação de amplitudes entre saída e entrada de  $1/\sqrt{2}$ .

## 2.1 Diagramas de Bode

São gráficos logarítmicos usados na determinação da resposta em frequência de um sistema. Esses gráficos podem também ser utilizados na identificação da função de transferência de um sistema linear.

Seja  $G(s)$  a função de transferência de um sistema linear. Então,

$$G(j\omega) = |G(\omega)| \exp[j\phi(\omega)]$$

é a função de transferência no domínio da frequência. Define-se

$$\text{Ganho Logarítmico} = 20 \log |G(j\omega)|$$

com unidade em decibéis (dB).

Os Diagramas de Bode consistem de um gráfico do ganho logarítmico em dB (Diagrama de Magnitude), e de um gráfico da fase  $\phi(\omega)$  (Diagrama de Fase), ambos em função da frequência  $\omega$ .

**Exemplo 5.** A função de transferência do circuito *RC* da Fig. 4 é

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad \tau = RC$$

e seu ganho logarítmico é dado por

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \right) = -10 \log (1 + (\omega\tau)^2)$$

Para frequências bem pequenas, isto é,  $\omega \ll 1/\tau$ , tem-se

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Para frequências bem grandes, isto é,  $\omega \gg 1/\tau$ , tem-se

$$20 \log |G(j\omega)| = -20 \log(\omega\tau)$$

Quando  $\omega = 1/\tau$  (chamada de *frequência de corte*),

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log(2) \approx -3 \text{ dB}$$

O ângulo de fase do sistema é dado por

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

Considerando-se agora uma escala logarítmica de frequência, em lugar da escala linear, tem-se para  $\omega\tau \gg 1$

$$20 \log |G(j\omega)| = -20 \log(\omega\tau)$$

e portanto, se o eixo horizontal é  $\log \omega$ , a curva assintótica para  $\omega \gg 1/\tau$  é uma reta, como mostrado na Fig. 6.

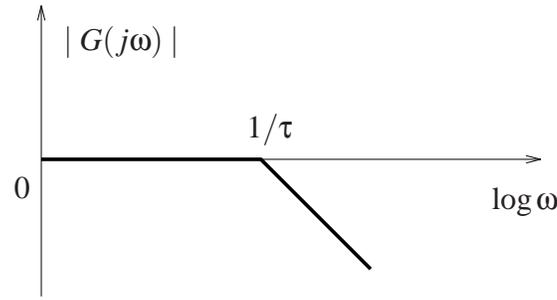


Figura 6: Diagrama de Magnitude.

Note que uma variação unitária em  $\log \omega$  corresponde a uma variação de  $-20$  dB em ganho. Mas uma variação unitária em  $\log \omega$  corresponde a uma década de variação em  $\omega$ , ou seja, de 1 a 10, de 10 a 100, etc. Diz-se então que a inclinação da reta é de  $-20$  dB/década.

Ao invés de décadas, algumas vezes a unidade *oitava* é usada para representar a separação entre duas frequências. As frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são separadas por uma oitava se  $\omega_1/\omega_2 = 2$ . Nesse caso,

$$20 \log |G(j\omega_2)| - 20 \log |G(\omega_1)| = 20 \log \left( \frac{\omega_2 \tau}{\omega_1 \tau} \right) = -20 \log(2) = -6 \text{ dB}$$

e portanto a inclinação da reta é de  $-6$  dB/oitava.

Seja agora  $G(j\omega)$  a função de transferência no domínio da frequência de um sistema linear. Então,  $G(j\omega)$  pode ser escrita na forma

$$G(j\omega) = \frac{k_b \prod_{i=1}^Q (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^M (1 + j\omega\tau_m) \prod_{k=1}^R \left[ 1 + (2\xi_k/\omega_{nk}) j\omega + (j\omega/\omega_{nk})^2 \right]}$$

A função de transferência anterior inclui  $Q$  zeros,  $N$  pólos na origem,  $M$  pólos reais e  $R$  pares de pólos complexos conjugados. Tomando o logaritmo da magnitude de  $G(j\omega)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log(k_b) + 20 \sum_{i=1}^Q \log |1 + j\omega\tau_i| - 20 \log |(j\omega)^N| \\ &\quad - 20 \log \sum_{m=1}^M |1 + j\omega\tau_m| - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \left( \frac{2\xi_k}{\omega_{nk}} j\omega \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

e portanto o gráfico do ganho logarítmico pode ser obtido adicionando-se os gráficos devidos a cada um dos fatores.

O ângulo de fase é descrito como

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^Q \arctan(\omega\tau_i) - N \times 90^\circ - \sum_{m=1}^M \arctan(\omega\tau_m) - \sum_{k=1}^R \arctan\left(\frac{2\xi_k\omega_{nk}\omega}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}\right)$$

que corresponde à soma dos ângulos de fase devidos a cada fator individual.

As características assintóticas do Diagrama de Bode de cada um dos fatores distintos que ocorrem numa função de transferência são descritas a seguir.

a) Ganho constante  $k_b$

Ganho Logarítmico =  $20 \log(k_b)$  = constante em dB

Ângulo de fase = 0

b) Zeros ou Pólos na origem:  $(j\omega)^{\pm N}$  (Veja figuras 7.a e 7.b)

Ganho Logarítmico =  $20 \log |(j\omega)^{\pm N}| = \pm 20N \log |j\omega|$

Inclinação das curvas de magnitude =  $\pm 20N$  dB/década

Ângulo de fase =  $\pm 90N$

c) Zeros ou Pólos Reais:  $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$  (Veja Fig. 8)

Ganho Logarítmico =  $20 \log |(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}| = \pm 10 \log (1 + \omega^2\tau^2)$

Assíntota para  $\omega \ll 1/\tau$  é igual a 0 dB

Assíntota para  $\omega \gg 1/\tau$  é igual a  $\pm 20 \log \omega\tau$ , com inclinação de  $\pm 20$  dB/década.

A interseção das assíntotas ocorre quando  $-20 \log(\omega\tau) = 0$  dB, ou seja, ocorre na frequência de corte  $\omega = 1/\tau$ .

Ganho Logarítmico em  $\omega = 1/\tau$  é igual a  $\pm 3$  dB

Ângulo de fase =  $\pm \arctan(\omega\tau)$

d) Zeros ou Pólos Conjugados:  $[1 + (2\xi/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

O fator quadrático para um par de zeros ou pólos complexos conjugados pode ser escrito na forma  $[1 + j2\xi u - u^2]^{\pm 1}$ , onde  $u = \omega/\omega_n$ .

Ganho Logarítmico =  $\pm 10 [\log ((1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)]$

Ângulo de fase =  $\pm \arctan\left(\frac{2\xi u}{1 - u^2}\right)$

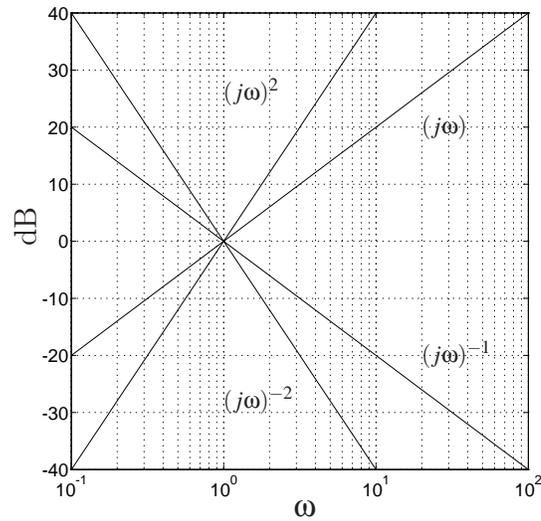
Para  $u \ll 1$  ( $u = \omega/\omega_n$ ;  $\omega \ll \omega_n$ )

Assíntota = 0 dB, Ângulo de fase  $\rightarrow 0$

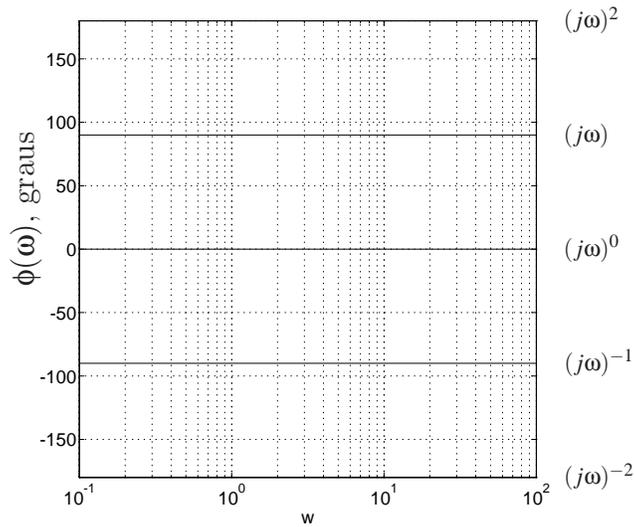
Para  $u \gg 1$

Assíntota =  $\pm 10 \log u^4 = \pm 40 \log u$

Inclinação da assíntota =  $\pm 40$  dB/década



(a)



(b)

Figura 7: Diagrama de Magnitude (a) e de Fase (b) para  $(j\omega)^{\pm N}$ .

Ângulo de fase  $\rightarrow \mp 180^\circ$

A interseção das assíntotas ocorre em  $\omega/\omega_n = 1$

O Diagrama de Bode de um fator quadrático devido a um par de pólos complexos conjugados é mostrado na Fig. 9.

Para um par de pólos complexos conjugados, o valor máximo da resposta em frequência  $M_p$  ocorre na frequência de ressonância  $\omega_r$ , onde

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \text{válidos para } \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \quad (11)$$

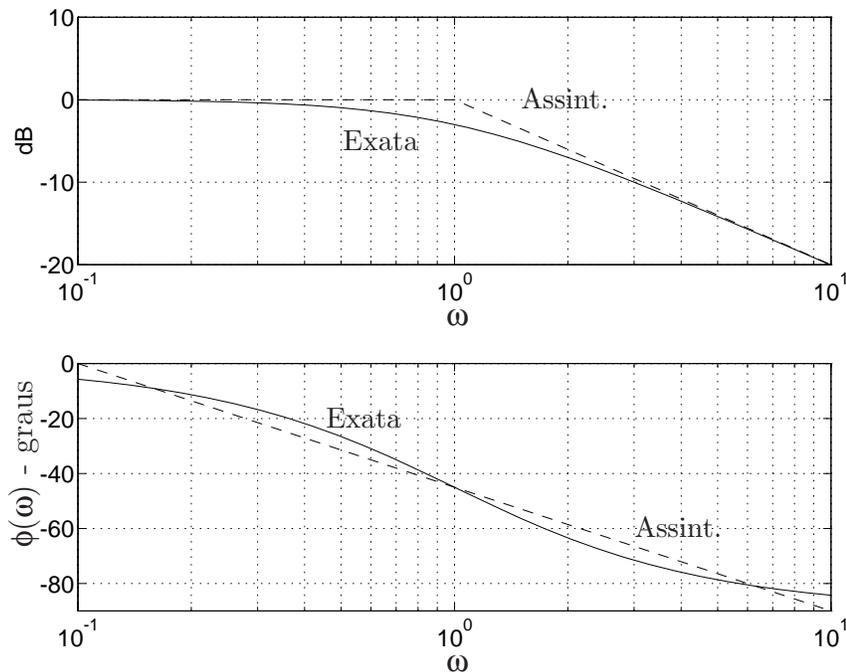


Figura 8: Diagramas de Bode para  $(1 + j\omega\tau)^{-1}$ ,  $\tau = 1$ .

### 2.1.1 Traçado dos diagramas de Bode: exemplo

Seja a função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0.1\omega)}{j\omega(1 + j0.5\omega)[1 + j0.6(\omega/50) + (j\omega/50)^2]}$$

Os seguintes fatores podem ser identificados:

- Um ganho constante  $K = 5$ .
- Um pólo na origem.
- Um pólo em  $s = -2$ .
- Um zero em  $s = -10$ .
- Um par de pólos complexos conjugados com  $\omega_n = 50$  e  $\xi = 0.3$ .

Primeiramente, desenhe os ganhos logarítmicos de cada fator conforme a Fig. 10.

O ganho de magnitude assintótico total é obtido adicionando-se os diversos ganhos individuais (Figs. 11 e 12).

As características de fase de cada fator, assim como a fase total (obtida a partir da soma das fases de cada fator), são mostradas na Fig. 13.

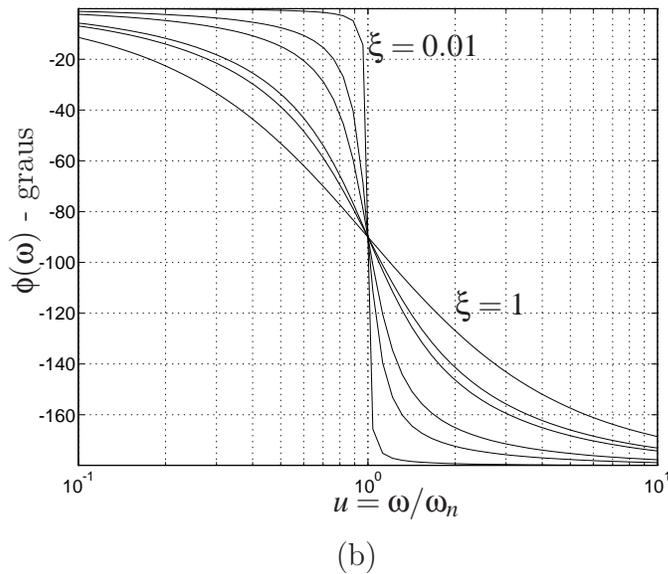
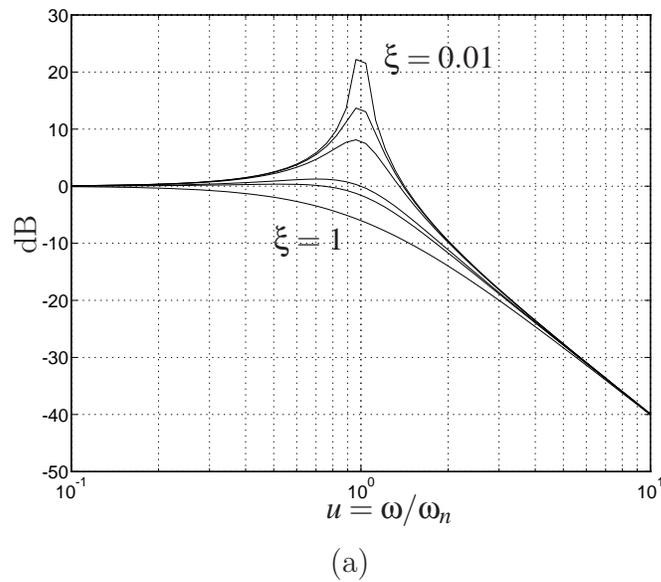


Figura 9: Diagrama de Magnitude (a) e de Fase (b) para  $[1 + (2\xi/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ .

### 3 Resposta em Frequência dos Equipamentos ECP

O objetivo dessa experiência é a identificação dos parâmetros desconhecidos dos modelos dos sistemas ECP, utilizando a técnica de resposta em frequência e a comparação com os valores obtidos anteriormente através da técnica da resposta temporal da experiência 5. Como na identificação via resposta temporal, sempre que possível adota-se configurações para o sistema ECP que reproduzam sistemas de 2a. ordem sub-amortecidos.

Algumas propriedades fundamentais da resposta em frequência de sistemas de 2a.

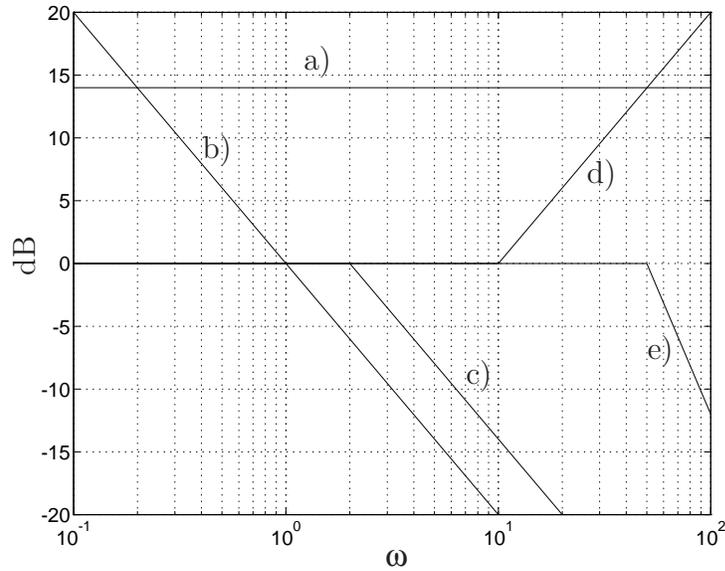


Figura 10: Ganhos Assintóticos dos pólos e zeros.

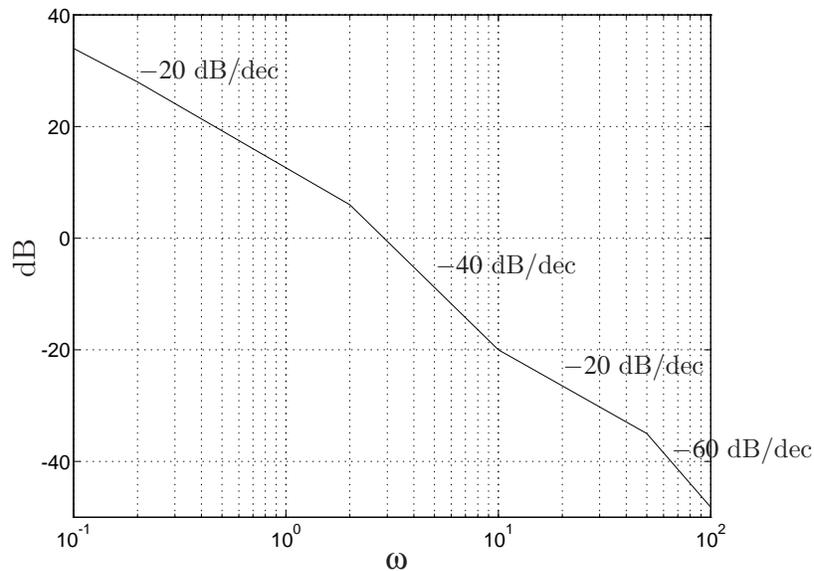


Figura 11: Ganho assintótico.

ordem levemente amortecidos serão usadas para obter indiretamente parâmetros como massas ou momentos de inércias, constantes de mola e coeficientes de atrito viscoso a partir de medidas da planta quando esta se encontra em configurações clássicas do tipo massa-mola, inércia-mola, ou configurações que utilizem controlador proporcional para “simular” o efeito de força de reconstituição de uma mola.

Assim como na resposta temporal a máxima sobre-elevação e a frequência de os-

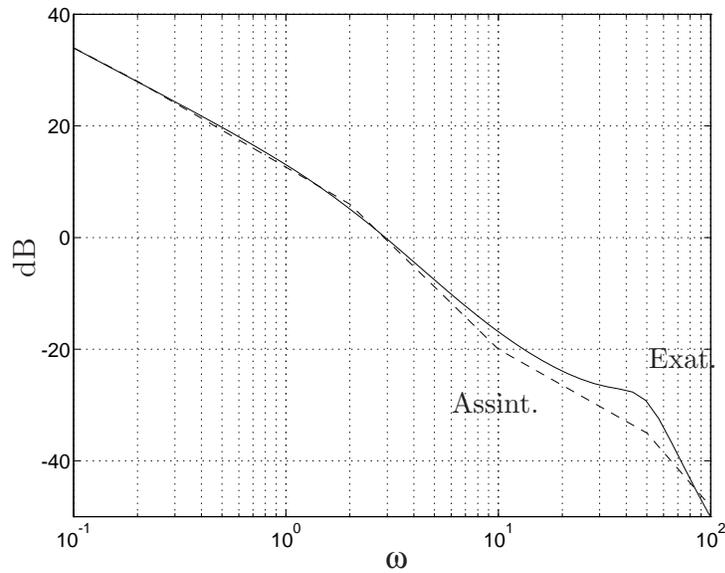


Figura 12: Ganhos assintótico e exato.

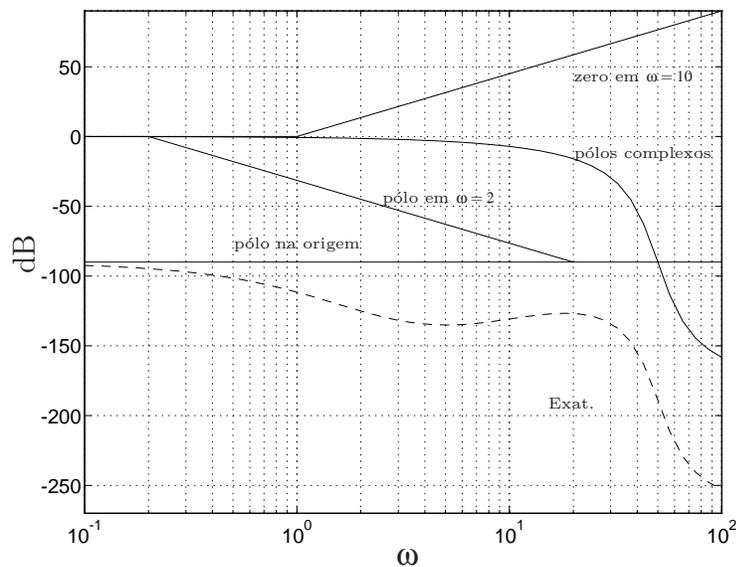


Figura 13: Característica da Fase.

cilação da resposta caracterizam um sistema de 2a. ordem sub-amortecido, na resposta em frequência um sistema pouco amortecido apresentará um pico na resposta, na frequência de ressonância característica, e esses dados o caracterizam.

Na próxima seção serão indicados os procedimentos de identificação baseados na resposta em frequência de sistemas de 2a. ordem, explicitando o método de medidas que será empregado experimentalmente.

## 4 Identificação de Sistemas pelo Método Freqüencial

Podemos afirmar que um sistema linear, assintoticamente estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal, possui em regime estacionário uma saída senoidal com a mesma freqüência de entrada, porém com amplitude e ângulo de fase em geral distintos. Além disso, se  $G(s)$  é a função de transferência desse sistema, para uma entrada senoidal de freqüência  $\omega$ , tem-se

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| &= & \text{Relação de amplitude entre a saída senoidal} \\ & & & \text{e a entrada senoidal.} \\ \angle G(j\omega) &= \phi(j\omega) &= & \text{Defasagem da saída senoidal em relação à en-} \\ & & & \text{trada senoidal.} \end{aligned}$$

A saída senoidal em regime estacionário pode ser obtida a partir das características da entrada senoidal (amplitude e freqüência) e das características de  $G(j\omega)$  (amplitude e fase). Alternativamente, a função de transferência de um sistema linear pode ser identificada levantando-se os gráficos da relação de amplitudes e ângulos de fase em função da freqüência.

### 4.1 Resposta em Freqüência de Sistemas de 2a. Ordem

Considere a função de transferência do sistema de 2a. ordem descrita na forma

$$G(s) = \frac{k_{hw}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se  $0 \leq \xi < \sqrt{2}/2$ , os pólos do sistema são complexos conjugados e diz-se que esse tipo de sistema é sub-amortecido e sua resposta em freqüência apresenta um pico de ressonância. Identificar o sistema de 2a. ordem consiste em determinar experimentalmente os parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$ , considerando que o ganho de hardware  $k_{hw}$  seja conhecido.

Os seguintes passos devem ser realizados para a identificação experimental:

1. Submete-se o sistema a uma entrada senoidal com amplitude conhecida escolhendo freqüências dentro da faixa de sua utilização. Em regime permanente, se o sistema de 2a. ordem for sub-amortecido, este irá apresentar um pico na freqüência de ressonância  $\omega_r$ , dado por

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (12)$$

e o valor de pico na freqüência  $\omega_r$  normalizado ( $M_p$ ) é dado por

$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (13)$$

vide a apostila da experiência 6. Para a utilização das equações acima, lembre-se que é preciso que ocorra ressonância, e portanto

$$1 - 2\xi^2 > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < \xi < \sqrt{2}/2$$

2. O valor de  $\xi$  pode ser obtido diretamente da medida de  $M_p$ .
3. O valor da frequência  $\omega_n$  pode ser obtido da medida de  $\omega_r$  e do valor de  $\xi$  calculado no passo anterior.

## 5 Procedimento Experimental

Para executar as medidas necessárias à identificação do sistema é preciso medir a relação de amplitudes entre entrada e saída senoidais e a defasagem entre esses dois sinais. Num ensaio experimental, sabemos que as medidas não serão exatas devido a imprecisões seja no sinal de entrada que está sendo injetado, seja na própria medida devido a imperfeições do medidor. É muito provável que esses sinais sejam imperfeitos devido a presença de ruídos, de interferências de diversas naturezas, de efeito de quantização dos sinais, etc. No ensaio que pretende-se executar, é possível que o resultado de observação de um sinal senoidal tenha semelhança com a curva plotada na Fig. 14.

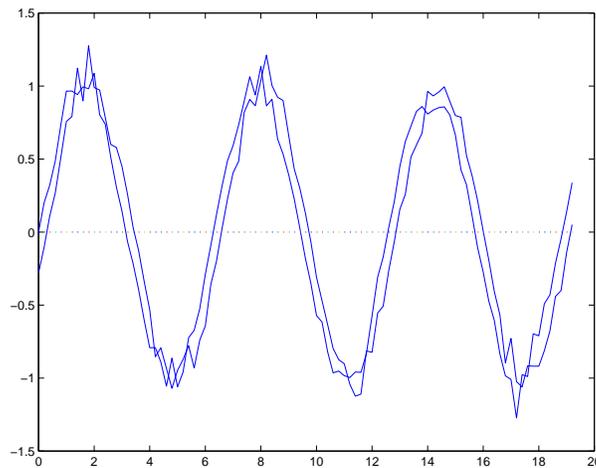


Figura 14: Sinais senoidais com ruído.

Fazer medidas de amplitudes e defasagens entre sinais como os da Fig. 14 é evidentemente muito difícil, e uma vez que as medidas não iriam apresentar a precisão desejada. Para melhorar a qualidade das medidas, faremos um tratamento numérico desses sinais, de acordo com o diagrama da Fig. 15.

Considere um sistema linear e assintoticamente estável, com entrada

$$u(t) = A_0 \text{sen}(\omega t),$$

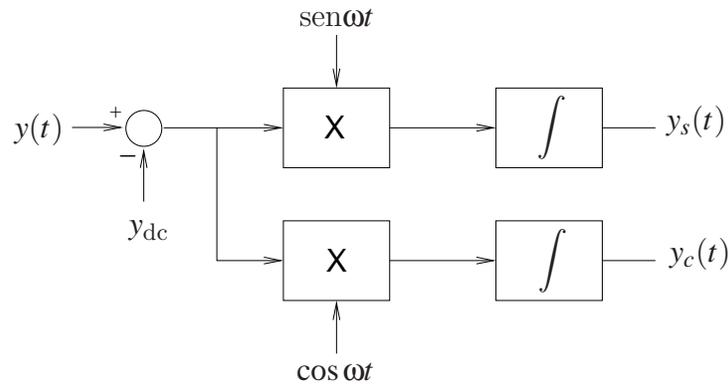


Figura 15: Tratamento de sinal senoidal  $y$  para obtenção da amplitude e fase.

cuja saída é um sinal senoidal com ruído  $y$  que possa ser escrito na forma:

$$y(t) = \bar{y}(t) + e(t)$$

onde  $\bar{y}(t) = B_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$  é o sinal exato, e  $e(t)$  é o sinal causador da imprecisão ou de ruído, isto é  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ . Segundo o diagrama da Fig. 15, para se eliminar os efeitos das imperfeições do sinal, procede-se como a seguir:

1. Considerando um número  $k$  de ciclos do sinal, extrai-se o valor médio (valor dc) do sinal  $y(t)$ , definindo-se

$$y_{\text{dc}} = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} y(t) dt = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} e(t) dt$$

Assim

$$y(t) - y_{\text{dc}} = B_0 \text{sen}(\omega t + \phi) + \bar{e}(t)$$

onde o sinal  $\bar{e}(t)$  tem valor médio nulo.

2. Calcula-se agora a integral dos produtos do sinal e os sinais seno e cosseno de frequência  $\omega$ :

$$\begin{aligned} y_s\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) &= \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} [B_0 \text{sen}(\omega t + \phi) + \bar{e}(t)] \text{sen} \omega t dt \\ &= \frac{B_0}{2} \cos \phi - \frac{B_0 \omega}{4k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \cos(2\omega t + \phi) dt + \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \bar{e}(t) \text{sen} \omega t dt \end{aligned} \quad (14)$$

Analogamente,

$$y_c\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) = \frac{B_0}{2} \text{sen} \phi - \frac{B_0 \omega}{4k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \text{sen}(2\omega t + \phi) dt + \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \bar{e}(t) \cos \omega t dt \quad (15)$$

As expressões acima podem ser simplificadas após algumas considerações. Note que a segunda integral nas expressões (14) e (15) é nula e a terceira apresenta

como integrando o produto de dois sinais de média nula ( $\bar{e}$  e seno ou cosseno), dividida pelo intervalo de integração, dado por  $2k\pi/\omega$ . Consequentemente o valor da última integral em (14) e (15) deve ser desprezível, o que nos permite expressar:

$$y_s\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) \approx \frac{B_0}{2} \cos\phi, \quad \text{e} \quad y_c\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) \approx \frac{B_0}{2} \sin\phi \quad (16)$$

Podemos afirmar que estas aproximações serão mais precisas quanto maior for o intervalo de integração  $2k\pi/\omega$ , ou equivalentemente o número de ciclos. Com hipóteses gerais sobre o sinal aleatório  $\bar{e}(t)$ <sup>2</sup> é possível concluir que a terceira integral em (14) e (15) tendem a zero quando  $k$  tende a infinito.

Das expressões em (16), podemos avaliar a relação de amplitudes  $A_r$  e a defasagem  $\phi$  como

$$A_r = \frac{B_0}{A_0} = \frac{2\sqrt{y_s^2 + y_c^2}}{A_0}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y_c}{y_s}\right)$$

## 5.1 Procedimento de cálculo da relação de amplitudes e defasagem

Para exemplificar e detalhar o procedimento a ser usado no laboratório, considere a observação típica do comportamento do sinal de excitação e de saída de um dos equipamentos do laboratório. A Fig. 16 mostra um destes ensaios, capturados graficamente através da opção do software **Data, Export Raw Data**.

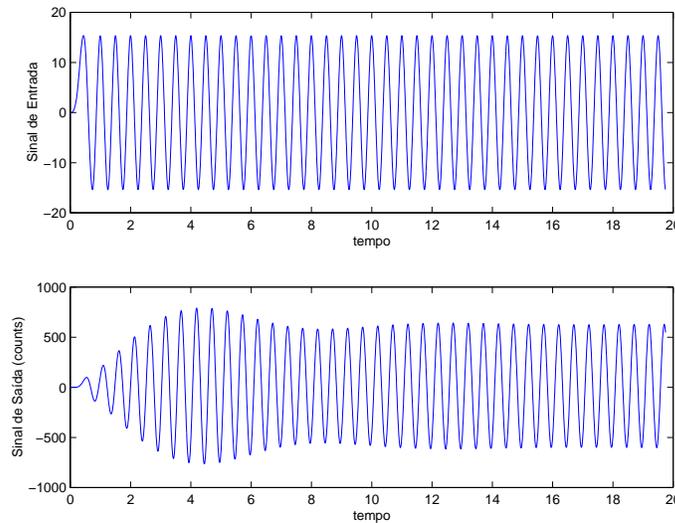


Figura 16: Sinais de entrada e de saída típicos de um sistema ECP.

Após o transitório inicial do sistema, ele entra em regime indicado pelo valor constante de amplitude da saída. Para fazermos o cálculo explicado anteriormente é preciso

---

<sup>2</sup> $t \rightarrow e(t)$  deve ser um processo ergódico.

selecionar no segundo gráfico o início do que consideramos o comportamento de regime permanente senoidal, e um número inteiro de ciclos até o final do conjunto de dados. Isso é feito através do programa Matlab `manipula.m` com a seguinte entrada de dados:

■ `manipula`

```

        Nome do arquivo com os dados (.txt)           :> tor_f20.txt
                Frequencia utilizada (em Hz)         :> 2.0
        Coluna de dados com o sinal de entrada        :> 3
                Coluna de dados com o sinal de saida  :> 4
Nome do arquivo para guardar a frequencia (f), a
fase (fi), a relacao de amplitudes (Ar), e a
amplitude do sinais de saida (Bo) (extensao .txt)   :> meu_result.txt

```

Onde:

- `tor_f2_0.txt` é o nome do arquivo gravado com os dados do ensaio utilizando o recurso de **Export Raw Data** do software. As 3 linhas iniciais deste arquivo devem estar “comentadas” para uso do Matlab (símbolo `%` no início das linhas).

*Importante:* O nome do arquivo gravado deve fazer referência à frequência utilizada no ensaio, para uso no programa `compara.m`. No exemplo acima a frequência utilizada foi 2 Hz, especificada na segunda linha da entrada de dados.

- As colunas de dados de entrada/saída declaradas se referem às colunas do arquivo `tor_f20.txt`. Verifique a ordem definida no arquivo de dados do seu ensaio, ou seja, *anote as colunas com os sinais de entrada e de saída*.
- O arquivo `meu_result.txt`, nesse exemplo, irá guardar o resultado desejado de forma cumulativa, isto é, os dados de frequência  $f$ , relação de amplitude  $A_r$ , defasagem  $\phi$  e amplitude de saída  $B_0$  serão gravados nesse arquivo numa nova linha, se o arquivo existir; caso contrário, cria-se o arquivo e grava-se os dados. O nome utilizado pode ser qualquer, com extensão `txt`.

Os dados carregados são passados para uma função Matlab chamada `defasagem.m`, que apresenta a seguinte estrutura de chamada:

```
[fi,Ar,Bo]=defasagem(A,f,ce,cs)
```

$A$  é o nome do arquivo de dados já presentes no *workspace* do Matlab,  $f$ ,  $ce$  e  $cs$  são respectivamente, as frequências dos sinais, e as colunas dos sinais de entrada e saída. Retorna então os dados de defasagem, relação de amplitudes e o valor de amplitude de saída a partir da realização do cálculo esquematizado na Fig. 15.

Para a comparação e verificação de consistência dos resultados obtidos com a resposta temporal e a resposta freqüencial, os diagramas de Bode devem ser construídos. Para sobrepor os resultados graficamente utilize a rotina `compara.m` da seguinte maneira:

1. Utilizando os valores dos parâmetros obtidos anteriormente através da resposta temporal, construa a função de transferência apropriada para o ensaio através do comando `tf`. Suponha que o nome dado seja `g1`.
2. Supondo que `g1` esteja disponível no *workspace* do Matlab, utilize o programa `compara.m` da seguinte forma:

■ `compara`

Entre com a função de transferência do sistema, ela já deve estar disponível utilizando o comando "tf", verifique se o ensaio foi feito com ou sem controle.

Nome da função de transferência pr-definida :> `g1`

Nome do arquivo onde estão os valores de frequência (`f`), fase (`fi`), e relação de amplitudes (`Ar`) (extensão `.txt`) :> `meu_result.txt`

Frequências mínimas e máximas para os diagramas de Bode.

Entre com `fmin` na forma `fmin=10^n1 [Hz]` :> `0.1`

Entre com `fmax` na forma `fmax=10^n2 [Hz]` :> `10`

A figura com o diagrama de Bode correspondente será criada. Se os resultados estiverem adequados, o resultado deve ser parecido com o da Fig. 17. O Matlab não determina corretamente a fase de sistemas de fase não-mínima, e a rotina `compara_pendulo.m` é específica para o pêndulo que tem essa característica.

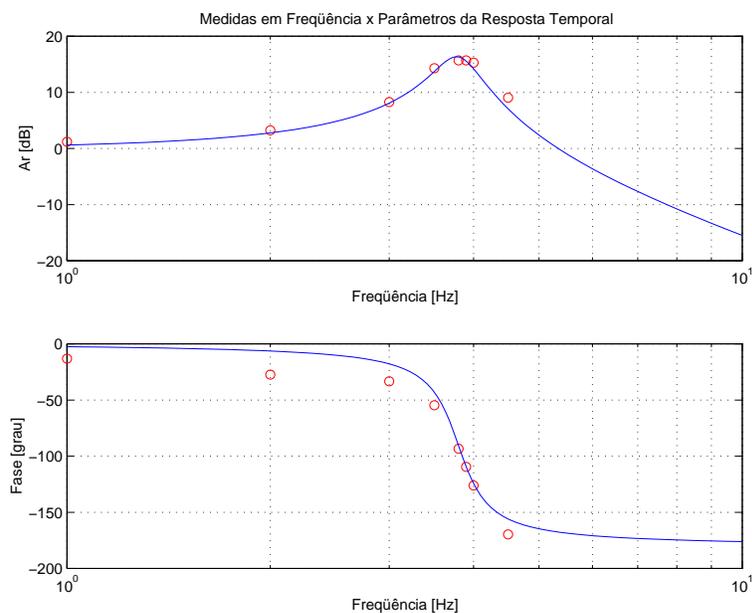


Figura 17: Resultado comparado do experimentos: resposta temporal e resposta em frequência.

## 5.2 Identificação de parâmetros do emulador industrial

### 5.2.1 Disco de atuação sem pesos

1. Com o controlador desligado, configure o emulador com o disco de atuação desconectado do restante do conjunto;
2. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina **Ts=0.00442s** para **Continuous Time**. No menu **Set-up** selecione **PID** e **Set-up Algorithm**. Entre com os valores  $K_p = 0.03$  e  $K_d = K_i = 0$ , selecione **Feedback Encoder #1** e **OK**. Selecione **Implement Algorithm** e depois **OK**;
3. Vá para o **Set-up Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Commanded Position** e **Encoder #1** como variáveis a adquirir, e especifique amostragem de dados a cada **3 ciclos**.
4. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Sinusoidal**. Em **Set-up** selecione **Closed-Loop**, e para o ajuste da amplitude oriente-se pela curva dada na Fig. 18a. A curva serve como referência para os valores de amplitudes, principalmente em torno da frequência de ressonância, indicada pelos seus valores mínimos. Para frequências inferiores a da ressonância, o limite pode ser ligeiramente ultrapassado para superar o atrito seco (ou atrito de Coulomb), enquanto para frequências superiores um limite menor do que o indicado pela curva deve ser respeitado. Essa curva provê um ajuste das amplitudes de entrada para que se observe na saída amplitudes de magnitude semelhantes em todas as frequências<sup>3</sup>;
5. Na opção **Frequency** selecione um conjunto de 6 a 8 valores de frequências diferentes na faixa indicada na Fig. 18a, concentrando as escolhas na região próxima à frequência de ressonância. Após detectar a frequência de ressonância adequadamente, selecione mais três frequências abaixo desta e três acima, dentro da faixa indicada. Para a escolha do número de períodos para execução do movimento, considere um valor suficientemente alto para que o sistema entre em regime, mas não tão longo, para que os arquivos a serem salvos não fiquem excessivamente grandes. Nestes experimentos os valores típicos são de 30 a 40 ciclos;
6. Retorne para o **Background Screen**, clicando sucessivamente **OK**. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders. Comande a execução do movimento com **Execute** no menu **Command**;
7. Através do **Plot** da curva de resposta, verifique se houve de fato tempo para o sistema entrar em regime permanente; caso não seja observado o comportamento de regime, aumente o número de ciclos no menu **Command, Trajectory, Sinusoidal** e descarte o ensaio. Caso a resposta tenha atingido o regime permanente,

---

<sup>3</sup> Via de regra, escolha amplitudes suficientemente altas para que o movimento tenha grandes excursões que superem o *atrito de Coulomb*, mas não tão grandes para evitar que *comportamentos não-lineares* devido a saturação, desbalanceamentos, etc. se tornem aparentes na resposta.

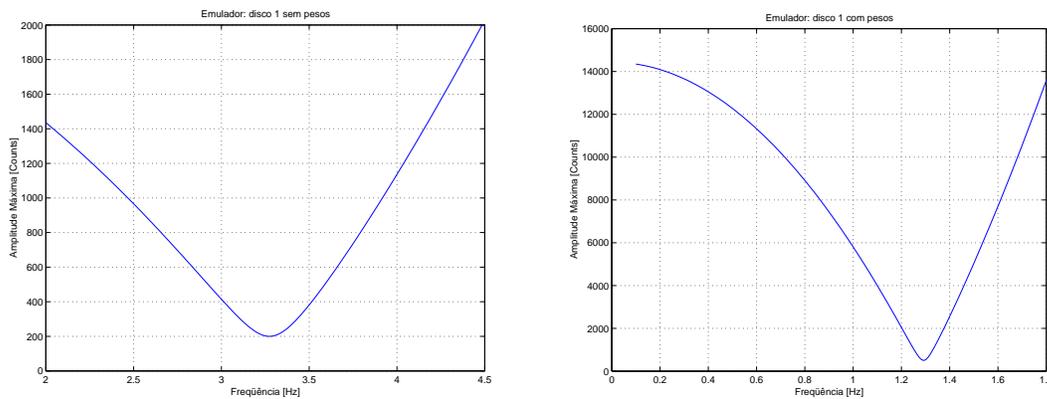


Figura 18: Valores máximos de amplitude: a) disco de atuação sem pesos; b) disco de atuação com pesos.

salve esses dados num arquivo com extensão `txt`, através do menu **Data, Export Raw Data**. Dê um nome apropriado a esse arquivo que faça referência à *configuração utilizada* e a *freqüência empregada* neste ensaio, para uso posterior no programa `manipula.m`. Repita esse procedimento para todas as medidas efetuadas.

8. Após a finalização das medidas, utilize os arquivos de dados gravados como entrada para o programa `manipula.m`, escolhendo a posição comandada **Commanded Position** como sinal de entrada e a posição do disco de atuação **Encoder #1 Position** como sinal de saída. Obtenha a relação de amplitudes  $A_r$  e a defasagem  $\phi$  para cada uma das freqüências medidas. Posteriormente utilize o programa `compara.m` para obter o gráfico com os resultados do experimento, conforme explicado na seção 5.1.
9. Através da freqüência de ressonância  $\omega_r$  e máximo pico  $M_p$  medidos, determine o fator de amortecimento  $\xi_{1sp}$  e a freqüência natural de oscilação  $\omega_{n1sp}$  através das expressões (12) e (13).

### 5.2.2 Disco de atuação com pesos

1. Com o controlador desligado, fixe quatro massas de 212 [g] sobre o disco de atuação. Os pesos devem ser fixados a  $d = 4,5$  [cm] do centro do disco, e os pesos têm o raio  $r = 1,5$  [cm]. A inércia total dos pesos é determinada por

$$J_w = 4\left(md^2 + \frac{1}{2}mr^2\right);$$

2. Repita os passos de 2 a 8 utilizados no experimento anterior, considerando agora a Fig. 18b como referência para as amplitudes.
3. Considere  $J_w$  a inércia total dos pesos,  $K_p$  o ganho do controlador e  $k_{hw}$  o ganho de hardware. Da mesma forma que na experiência de identificação através da

resposta temporal (Experiência 5), use as seguintes relações para obter o momento de inércia  $J_{dd}$  do disco de atuação e o coeficiente de atrito  $c_{dd}$  do disco:

$$\omega_{n1sp}^2 = \frac{K_p k_{hw}}{J_{dd}}, \quad \omega_{n1cp}^2 = \frac{K_p k_{hw}}{J_w + J_{dd}}, \quad 2\xi_{1sp} \omega_{n1sp} = \frac{c_{dd}}{J_{dd}};$$

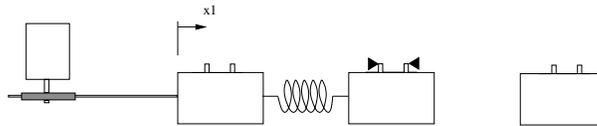
4. Junte os gráficos necessários, os parâmetros obtidos, e compare com os resultados da identificação por resposta temporal, indicando a consistência ou não dos dois experimentos.

Com os ensaios descritos nos dois experimentos com o disco de atuação, o grupo deve ter obtido os parâmetros deste disco (momento de inércia  $J_{dd}$ , coeficiente de atrito sem pesos  $c_{dd}$ ) e o ganho de hardware  $k_{hw}$ .

## 5.3 Identificação de parâmetros do sistema retilíneo

### 5.3.1 Carro #1 sem pesos

1. Com o controlador desligado, trave o segundo carro utilizando uma chave apropriada, conforme o diagrama abaixo. Conecte o primeiro e o segundo carros utilizando uma mola de dureza média;



2. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina  $T_s=0.00442s$  para **Continuous Time**. Vá para o **Set-up Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Commanded Position** e **Encoder #1** como variáveis a adquirir, e especifique amostragem de dados a cada **3 ciclos**.
3. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Sinusoidal**. Em **Set-up** selecione **Open-Loop**, e para o ajuste da amplitude oriente-se pela curva dada na Fig. 19a. A curva serve como referência para os valores de amplitudes, principalmente em torno da frequência de ressonância, indicada pelos seus valores mínimos. Para frequências inferiores a da ressonância, o limite pode ser ligeiramente ultrapassado para superar o atrito seco (ou atrito de Coulomb), enquanto para frequências superiores um limite menor do que o indicado pela curva deve ser respeitado. Essa curva provê um ajuste das amplitudes de entrada para que se observe na saída amplitudes de magnitude semelhantes em todas as frequências<sup>4</sup>;

<sup>4</sup> Via de regra, escolha amplitudes suficientemente altas para que o movimento tenha grandes excursões que superem o *atrito de Coulomb*, mas não tão grandes para evitar que a mola seja excessivamente distendida, apresentado então *comportamento não-linear*.

- Na opção **Frequency** selecione um conjunto de 6 a 8 valores de frequências diferentes na faixa indicada na Fig. 19a, concentrando as escolhas na região próxima à frequência de ressonância. Após detectar a frequência de ressonância adequadamente, selecione mais três frequências abaixo desta e três acima, dentro da faixa indicada. Para a escolha do número de períodos para execução do movimento, considere um valor suficientemente alto para que o sistema entre em regime, mas não tão longo, para que os arquivos a serem salvos não fiquem excessivamente grandes. Nestes experimentos os valores típicos são de 30 a 40 ciclos;

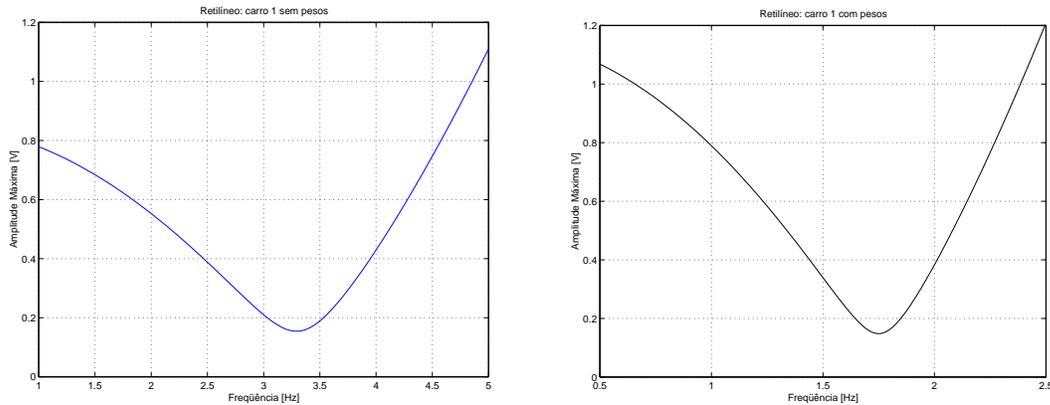


Figura 19: Valores máximos de amplitude: a) carro #1 sem pesos; b) carro #1 com pesos.

- Retorne para o **Background Screen**, clicando sucessivamente **OK**. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders. Comande a execução do movimento com **Execute** no menu **Command**;
- Através do **Plot** da curva de resposta, verifique se houve de fato tempo para o sistema entrar em regime permanente; caso não seja observado o comportamento de regime, aumente o número de ciclos no menu **Command**, **Trajectory**, **Sinusoidal** e descarte o ensaio. Caso a resposta tenha atingido o regime permanente, salve esses dados num arquivo com extensão **txt**, através do menu **Data**, **Export Raw Data**. Dê um nome apropriado a esse arquivo que faça referência à *configuração utilizada* e a *frequência empregada* neste ensaio, para uso posterior no programa `manipula.m`. Repita esse procedimento para todas as medidas efetuadas.
- Após a finalização das medidas, utilize os arquivos de dados gravados como entrada para o programa `manipula.m`, escolhendo a posição comandada **Commanded Position** como sinal de entrada e a posição do carro #1 **Encoder #1 Position** como sinal de saída. Obtenha a relação de amplitudes  $A_r$  e a defasagem  $\phi$  para cada uma das frequências medidas. Posteriormente utilize o programa `compara.m` para obter o gráfico com os resultados do experimento, conforme explicado na seção 5.1.
- Através da frequência de ressonância  $\omega_r$  e máximo pico  $M_p$  medidos, determine o

fator de amortecimento  $\xi_{1sp}$  e a frequência natural de oscilação  $\omega_{n1sp}$  através das expressões (12) e (13).

### 5.3.2 Carro #1 com pesos

1. Com o controlador desligado, fixe quatro massas de 500g sobre o primeiro carro;
2. Repita os passos de 2 a 8 utilizados no experimento anterior, considerando agora a Fig. 19b como referência para as amplitudes.
3. Da mesma forma que na experiência de identificação através da resposta temporal (Experiência 5), denote por  $m_w$  o peso combinado das 4 massas, e use as seguintes relações para obter a massa  $m_1$  do primeiro carro sem carga, a constante de mola  $k_1$ , e o coeficiente de atrito  $c_{1sp}$  do carro #1 sem pesos:

$$\omega_{n1sp}^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \omega_{n1cp}^2 = \frac{k_1}{m_w + m_1}, \quad 2\xi_{1sp} \omega_{n1sp} = \frac{c_{1sp}}{m_1};$$

4. Junte os gráficos necessários, os parâmetros obtidos, e compare com os resultados da identificação por resposta temporal, indicando a consistência ou não dos dois experimentos.

Com os ensaios descritos nos dois experimentos com o carro #1, o grupo deve ter obtido os parâmetros deste carro (massa  $m_1$ , coeficiente de atrito viscoso sem pesos  $c_1$ ), a constante da mola ( $k_1$ ) e o ganho de hardware  $k_{hw}$ .

## 5.4 Identificação de parâmetros do sistema torcional

### 5.4.1 Disco #1 sem pesos

1. Com o controlador desligado trave o disco #2 utilizando um pino e uma chave apropriada;
2. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina **Ts=0.00442s** para **Continuous Time**. Vá para o **Set-up Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Commanded Position** e **Encoder #1** como variáveis a adquirir, e especifique amostragem de dados a cada **2 ciclos**.
3. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Sinusoidal**. Em **Set-up** selecione **Open-Loop**, e para o ajuste da amplitude oriente-se pela curva dada na Fig. 20a. A curva serve como referência para os valores de amplitudes, principalmente em torno da frequência de ressonância, indicada pelos seus valores mínimos. Para frequências inferiores a da ressonância, o limite pode ser ligeiramente ultrapassado para superar o atrito seco (ou atrito de Coulomb), enquanto para frequências superiores um limite menor do que o indicado pela curva deve

ser respeitado. Essa curva provê um ajuste das amplitudes de entrada para que se observe na saída amplitudes de magnitude semelhantes em todas as frequências<sup>5</sup>;

- Na opção **Frequency** selecione um conjunto de 6 a 8 valores de frequências diferentes na faixa indicada na Fig. 20a, concentrando as escolhas na região próxima à frequência de ressonância. Após detectar a frequência de ressonância adequadamente, selecione mais três frequências abaixo desta e três acima, dentro da faixa indicada. Para a escolha do número de períodos para execução do movimento, considere um valor suficientemente alto para que o sistema entre em regime, mas não tão longo, para que os arquivos a serem salvos não fiquem excessivamente grandes. Nestes experimentos os valores típicos são de 30 a 40 ciclos;

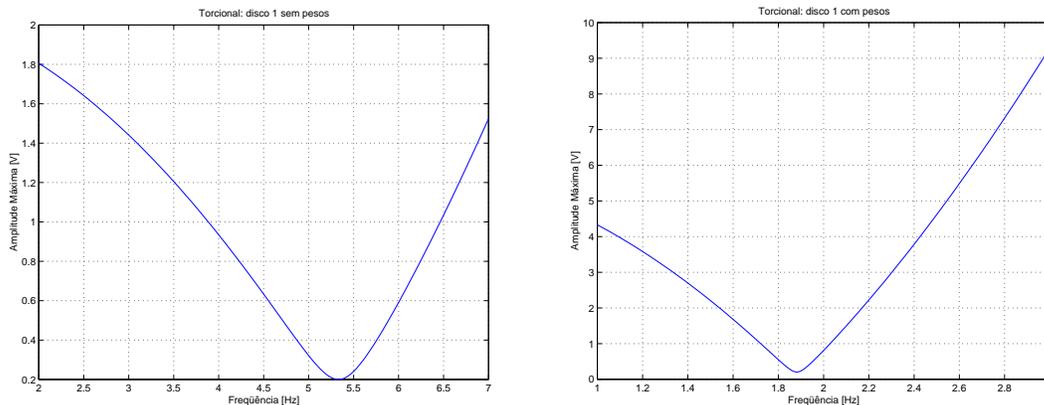


Figura 20: Valores máximos de amplitude: a) disco #1 sem pesos; b) disco #1 com pesos.

- Retorne para o **Background Screen**, clicando sucessivamente **OK**. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders. Comande a execução do movimento com **Execute** no menu **Command**;
- Através do **Plot** da curva de resposta, verifique se houve de fato tempo para o sistema entrar em regime permanente; caso não seja observado o comportamento de regime, aumente o número de ciclos no menu **Command**, **Trajectory**, **Sinusoidal** e descarte o ensaio. Caso a resposta tenha atingido o regime permanente, salve esses dados num arquivo com extensão `txt`, através do menu **Data**, **Export Raw Data**. Dê um nome apropriado a esse arquivo que faça referência à *configuração utilizada* e a *frequência empregada* neste ensaio, para uso posterior no programa `manipula.m`. Repita esse procedimento para todas as medidas efetuadas.
- Após a finalização das medidas, utilize os arquivos de dados gravados como entrada para o programa `manipula.m`, escolhendo a posição comandada **Commanded**

<sup>5</sup> Via de regra, escolha amplitudes suficientemente altas para que o movimento tenha grandes excursões que superem o *atrito de Coulomb*, mas não tão grandes para evitar que a mola de torsão seja excessivamente distendida, apresentado então *comportamento não-linear*.

**Position** como sinal de entrada e a posição do disco #1 **Encoder #1 Position** como sinal de saída. Obtenha a relação de amplitudes  $A_r$  e a defasagem  $\phi$  para cada uma das frequências medidas. Posteriormente utilize o programa `compara.m` para obter o gráfico com os resultados do experimento, conforme explicado na seção 5.1.

8. Através da frequência de ressonância  $\omega_r$  e máximo pico  $M_p$  medidos, determine o fator de amortecimento  $\xi_{1sp}$  e a frequência natural de oscilação  $\omega_{n1sp}$  através das expressões (12) e (13).

#### 5.4.2 Disco #1 com pesos

1. Com o controlador desligado, fixe quatro massas de 500 [g] sobre o primeiro disco. Os pesos devem ser fixados a  $d = 9,0$  [cm] do centro do disco, e os pesos têm o raio  $r = 4,95/2$  [cm]. A inércia total dos pesos é determinada por

$$J_w = 4\left(md^2 + \frac{1}{2}mr^2\right);$$

2. Repita os passos de 2 a 8 utilizados no experimento anterior, considerando agora a Fig. 20b como referência para as amplitudes.
3. Considere  $J_w$  a inércia total dos pesos, e da mesma forma que na experiência de identificação através da resposta temporal (Experiência 5), use as seguintes relações para obter o momento de inércia  $J_1$  do primeiro disco sem carga, a constante de torsão da primeira mola  $k_1$ , e o coeficiente atrito  $c_{1sp}$  do disco #1 sem pesos:

$$\omega_{n1sp}^2 = \frac{k_1}{J_1}, \quad \omega_{n1cp}^2 = \frac{k_1}{J_w + J_1}, \quad 2\xi_{1sp} \omega_{n1sp} = \frac{c_{1sp}}{J_1};$$

4. Junte os gráficos necessários, os parâmetros obtidos, e compare com os resultados de identificação por resposta temporal, indicando a consistência ou não dos dois experimentos.

Com os ensaios descritos nos dois experimentos com o disco #1, o grupo deve ter obtido os parâmetros deste disco (momento de inércia  $J_1$ , coeficiente de atrito viscoso sem pesos  $c_1$ ), a constante de torsão da mola ( $k_1$ ) e o ganho de hardware  $k_{hw}$ .

## 5.5 Identificação dos parâmetros do pêndulo invertido

### 5.5.1 Parâmetros da haste deslizante

1. Com o controlador desligado, trave a haste principal na posição vertical com os calços apropriados. Retire os pesos “orelhas” da haste deslizante, e coloque-a na posição central  $x = 0$ ;

2. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina **Ts=0.001768s** para **Continuous Time**. No menu **Set-up** selecione **PID** e **Set-up Algorithm**. Entre com os valores  $K_p = 0.075$  e  $K_d = K_i = 0$ , selecione **Feedback Encoder #2** e **OK**. Selecione **Implement Algorithm** e depois **OK**;
3. Vá para o **Setup Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Commanded Position** e **Encoder #2** como variáveis a adquirir, e especifique uma amostragem de dados a cada 5 ciclos;
4. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Sinusoidal**. Em **Set-up** selecione **Closed-Loop**, e para o ajuste da amplitude oriente-se pela curva dada na Fig. 21a. A curva serve como referência para os valores de amplitudes, principalmente em torno da frequência de ressonância, indicada pelos seus valores mínimos. Para frequências inferiores a da ressonância, o limite pode ser ligeiramente ultrapassado para superar o atrito seco (ou atrito de Coulomb), enquanto para frequências superiores um limite menor do que o indicado pela curva deve ser respeitado. Essa curva provê um ajuste das amplitudes de entrada para que se observe na saída amplitudes de magnitude semelhantes em todas as frequências<sup>6</sup>;
5. Na opção **Frequency** selecione um conjunto de 6 a 8 valores de frequências diferentes na faixa indicada na Fig. 21a, concentrando as escolhas na região próxima à frequência de ressonância. Após detectar a frequência de ressonância adequadamente, selecione mais três frequências abaixo desta e três acima, dentro da faixa indicada. Para a escolha do número de períodos para execução do movimento, considere um valor suficientemente alto para que o sistema entre em regime, mas não tão longo, para que os arquivos a serem salvos não fiquem excessivamente grandes. Nestes experimentos os valores típicos são de 30 a 40 ciclos;
6. Retorne para o **Background Screen**, clicando sucessivamente **OK**. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders. Comande a execução do movimento com **Execute** no menu **Command**;
7. Através do **Plot** da curva de resposta, verifique se houve de fato tempo para o sistema entrar em regime permanente; caso não seja observado o comportamento de regime, aumente o número de ciclos no menu **Command, Trajectory, Sinusoidal** e descarte o ensaio. Caso a resposta tenha atingido o regime permanente, salve esses dados num arquivo com extensão **txt**, através do menu **Data, Export Raw Data**. Dê um nome apropriado a esse arquivo que faça referência à *configuração utilizada* e a *frequência empregada* neste ensaio, para uso posterior no programa **manipula.m**. Repita esse procedimento para todas as medidas efetuadas.
8. Após a finalização das medidas, utilize os arquivos de dados gravados como entrada para o programa **manipula.m**, escolhendo a posição comandada **Commanded Po-**

---

<sup>6</sup> Via de regra, escolha amplitudes suficientemente altas para que o movimento tenha grandes excursões que superem o *atrito de Coulomb*, mas não tão grandes para evitar que *comportamentos não-lineares* devido a saturação, desbalanceamentos, etc. se tornem aparentes na resposta.

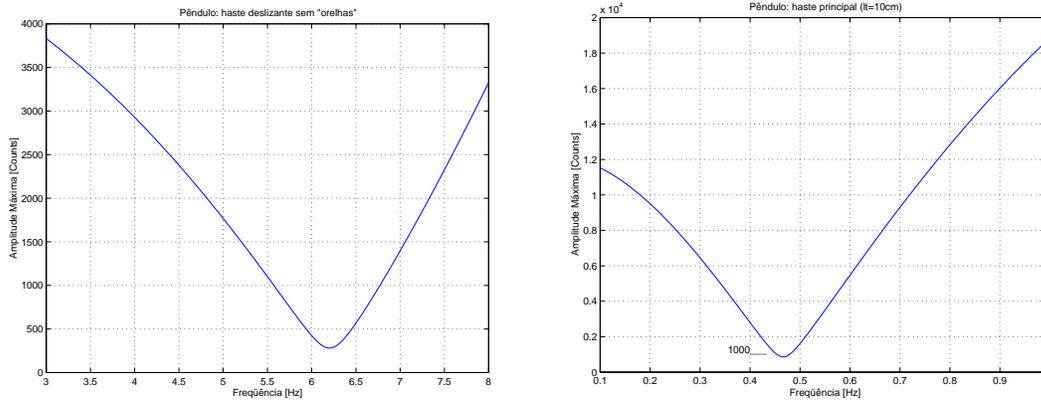


Figura 21: Valores máximos de amplitude: a) haste deslizante sem pesos; b) haste principal com contrapesos ( $\ell_{w2} = -13,75\text{cm}$ ).

**sition** como sinal de entrada e a posição do disco de atuação **Encoder #1 Position** como sinal de saída. Obtenha a relação de amplitudes  $A_r$  e a defasagem  $\phi$  para cada uma das frequências medidas. Posteriormente utilize o programa `compara.m` para obter o gráfico com os resultados do experimento, conforme explicado na seção 5.1.

9. Através da frequência de ressonância  $\omega_r$  e máximo pico  $M_p$  medidos, determine o fator de amortecimento  $\xi_1$  e a frequência natural de oscilação  $\omega_{n1}$  através das expressões (12) e (13).
10. Considere  $K_p$  o ganho do controlador e o ganho de hardware  $k_s k_f k_x$ . Da mesma forma que na experiência de identificação através da resposta temporal (Experiência 5, seção 9.1), use as seguintes relações para obter a massa da haste deslizante  $m_{1o}$  e o coeficiente de atrito viscoso  $c_1$

$$\omega_{n1}^2 = \frac{K_p k_s k_f k_x}{m_{1o}}, \quad 2\xi_1 \omega_{n1} = \frac{c_1}{m_{1o}};$$

11. Junte os gráficos necessários, os parâmetros obtidos, e compare com os resultados de identificação por resposta temporal, indicando a consistência ou não dos dois experimentos.

### 5.5.2 Parâmetros da haste principal

1. Com o controlador desligado, destrave a haste principal. Coloque o contrapeso a  $10,0$  [cm] da base do pivot, o que corresponde a posicionar o seu centro de massa em  $\ell_{w2} = -13,75$  [cm] (configuração estável);
2. Implemente o controle da haste deslizante, conforme o passo 2 da seção 5.5.1;

3. Vá para o **Setup Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Commanded Position**, **Encoder #1** e **Encoder #2** como variáveis a adquirir, e especifique uma amostragem de dados a cada 35 ciclos;
4. Siga o procedimento indicado nos passos de 4 a 7 da seção 5.5.1 utilizando agora como referência para valores de amplitudes a curva da Fig. 21b;
5. Escolhendo a posição da haste deslizante **Encoder #2** como entrada e posição da haste principal **Encoder #1** como saída, utilize o programa `manipula.m` para obter a relação de amplitudes  $A_r$  e a defasagem  $\phi$  para cada uma das frequências medidas. Com essa escolha de entrada e saída, a função de transferência em questão é de 2a. ordem, envolvendo os parâmetros do pêndulo na seguinte forma:

$$\frac{\Theta(s)}{X_1(s)} = G_2(s) = -\frac{k_a}{k_x} \cdot \frac{m_1(\ell_0 s^2 - g)}{J^* s^2 + c_r s - g(m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c)} \quad (17)$$

onde  $c_r = 0,01439$  é o coeficiente de atrito da haste rotacional, e os outros parâmetros do pêndulo são apresentados na Tabela 2 da apostila da Experiência 4. Mostre a validade dessa função de transferência, a partir da funções de transferência linearizadas do pêndulo apresentadas na apostila da Experiência 5, equações (18) e (19), acrescentando o coeficiente de atrito  $c_r$  e os ganhos adequados para expressar  $\Theta(s)$  e  $X_1(s)$  em counts. Utilize o programa `compara.m` com a função de transferência obtida dos dados do experimento de resposta temporal, e os dados deste experimento, conforme explicado na seção 5.1.

6. A partir da frequência de ressonância obtida, calcule o momento de inércia  $J_0^*$  da haste principal, considerando a função de transferência em (17) e o fator de amortecimento desprezível.
7. Junte os gráficos necessários, o valor de  $J_0^*$  calculado, e compare com os resultados obtidos da identificação por resposta temporal e da Tabela 2 da Experiência 4, indicando a consistência ou não dos experimentos.

## 5.6 Identificação dos parâmetros do levitador magnético

### 5.6.1 Disco #1 em malha fechada

1. Com o controlador desligado, configure o levitador somente com o disco #1;
2. Ligue o controlador. Entre no menu **Set-up** e selecione **Set-up Sensor Calibrator**. Selecione **Calibrate Sensor** e **Apply Thermal Compensation**. Utilize os valores de  $e$ ,  $f$ ,  $g$  e  $h$ , determinados na **Experiência 2**, que se encontram disponíveis na configuração `Cal_2007.cfg`.
3. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** e defina **Ts=0.001768s**. Carregue o algoritmo **P.alg** através da opção **Load from disk**. Em seguida selecione **Edit Algorithm** e certifique-se de que o ganho do controlador proporcional é  $K_p = 0.55$ .

Em seguida selecione **Implement Algorithm**. O disco irá se mover para a altura de 2,0 [cm] mantendo-se nesta posição;

4. Vá para o **Setup Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Commanded Position** e **Variable Q10** como variáveis a adquirir, e especifique uma amostragem de dados a cada 2 ciclos;
5. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Sinusoidal**; em **Setup** selecione **Closed-Loop**. Faça medidas em frequências específicas na faixa de de 1 a 6 Hz, e para o ajuste da amplitudes oriente-se pela Tabela 1.

Tabela 1: Sugestão de amplitudes para o experimento.

Frequência [Hz]	Amplitude [counts]
2,0	4.000
3,0	1.000
4,0	1.000
5,0	1.800

Esses pontos servem como referência para os valores de amplitudes, e estão localizados em torno da frequência de ressonância<sup>7</sup>;

6. Na opção **Frequency** selecione um conjunto de 6 a 8 valores de frequências diferentes na faixa indicada na na Tabela 1, concentrando as escolhas na região próxima à frequência de ressonância. Após detectar a frequência de ressonância adequadamente, selecione mais três frequências abaixo desta e três acima, dentro da faixa indicada. Para a escolha do número de períodos para execução do movimento, considere um valor suficientemente alto para que o sistema entre em regime, mas não tão longo, para que os arquivos a serem salvos não fiquem excessivamente grandes. Nestes experimentos os valores típicos são de 30 a 40 ciclos;
7. Retorne para o **Background Screen**, clicando sucessivamente **OK**. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders. Comande a execução do movimento com **Execute** no menu **Command**;
8. Através do **Plot** da curva de resposta, verifique se houve de fato tempo para o sistema entrar em regime permanente; caso não seja observado o comportamento de regime, aumente o número de ciclos no menu **Command**, **Trajectory**, **Sinusoidal** para valores próximos de 60 ciclos e descarte o ensaio anterior. Caso a resposta tenha atingido o regime permanente, salve esses dados num arquivo com extensão **txt**, através do menu **Data**, **Export Raw Data**. Dê um nome apropriado a esse arquivo que faça referência à *configuração utilizada* e a *frequência*

---

<sup>7</sup> Via de regra, escolha amplitudes suficientemente altas para que o movimento tenha grandes excursões que superem o *atrito de Coulomb*, mas não tão grandes para evitar que *comportamentos não-lineares* devido a não-hogeneidade do fluxo magnético, desbalanceamentos, etc. se tornem aparentes na resposta.

empregada neste ensaio, para uso posterior no programa `manipula.m`. Repita esse procedimento para todas as medidas efetuadas.

9. Após a finalização das medidas, utilize os arquivos de dados gravados como entrada para o programa `manipula.m`, escolhendo a posição comandada **Commanded Position** como sinal de entrada e a posição do disco #1 **Variable Q10** como sinal de saída. Obtenha a relação de amplitudes  $A_r$  e a defasagem  $\phi$  para cada uma das frequências medidas. Posteriormente utilize o programa `compara.m` para obter o gráfico com os resultados do experimento, conforme explicado na seção 5.1.
10. Através da frequência de ressonância  $\omega_r$  e máximo pico  $M_p$  medidos, determine o fator de amortecimento  $\xi_1$  e a frequência natural de oscilação  $\omega_{n1}$  através das expressões (12) e (13).
11. Considere  $K_p$  o ganho do controlador e a massa do disco #1  $m_1 = 123[\text{g}]$ . Da mesma forma que na experiência de identificação através da resposta temporal (Experiência 5, seção 10.2), use as seguintes relações para obter o valor de  $k_{hw}$  e do coeficiente de atrito  $c_1$

$$\omega_{n1}^2 = \frac{K_p k_{hw}}{m_1}, \quad 2\xi_1 \omega_{n1} = \frac{c_1}{m_1}.$$

### 5.6.2 Disco #1 sem compensação da força magnética

Neste experimento vamos implementar somente a compensação da não-linearidade do sensor de posição, mantendo a relação de interação não-linear dos campos magnéticos entre a bobina (atuador) e o disco magnético. Nesta situação, a interação magnética entre a bobina e o disco magnético provoca uma força de repulsão que se opõe a força peso, cuja resultante é uma força de reconstituição equivalente à de uma mola mecânica. Para operação com pequenos deslocamentos em torno de um ponto de operação, utilizando a linearização do atuador por série de Taylor, define-se uma “mola” cuja constante vamos denotar por  $k_1$ , e o levitador com um disco pode ser estudado como um sistema massa mola simples. Para a análise, utiliza-se inicialmente o modelo não-linear para um único disco:

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 = F u_{11}(y_1) - m_1 g$$

Para o estudo em questão, a expressão da força  $F u_{11}$  deve ser linearizada em torno do ponto de operação  $(u_{10}, y_{10})$ , usando a expansão em série de Taylor:

$$\begin{aligned} F u_{11} &\cong F u_{11}(u_{10}, y_{10}) + \frac{\partial F u_{11}}{\partial u_1}(u_{10}, y_{10})(u_1 - u_{10}) + \frac{\partial F u_{11}}{\partial y_1}(u_{10}, y_{10})(y_1 - y_{10}) \\ &= \frac{u_1}{a(100y_{10} + b)^4} - \frac{400u_{10}}{a(100y_{10} + b)^5} y_1 + \frac{400u_{10}y_{10}}{a(100y_{10} + b)^5} \end{aligned}$$

Assim, adotando-se  $u_{10}$  de tal forma que

$$\frac{400u_{10}y_{10}}{a(100y_{10} + b)^5} = m_1 g \quad (18)$$

o modelo linearizado fica:

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + \frac{400u_{10}}{a(100y_{10} + b)^5} y_1 = \frac{u_1}{a(100y_{10} + b)^4} \quad (19)$$

De modo que a frequência de ressonância do sistema linearizado é tal que:

$$\omega_n^2 = \sqrt{\frac{400u_{10}}{a(100y_{10} + b)^5} \cdot \frac{1}{m_1}}$$

- **Determinação de  $k_1$  (Efeito de mola entre a bobina #1 e o disco #1).**

Para estas medidas a configuração é idêntica à anterior, ou seja somente o disco #1 estará presente :

1. Adote a altura  $y_{10}$  de equilíbrio do disco #1 como 2,0 [cm] e calcule através da expressão (18) o valor da corrente  $u_{10}$  [A] necessária para levar o disco ao equilíbrio. Utilize o comando `solve` do Matlab para este cálculo da seguinte forma:  
`u0=solve('400*u0*y0/(a*(100*y0+b)^5)=m1*g', 'u0')`, introduzindo os valores numéricos das constantes;

2. No menu **File** carregue os parâmetros de calibração do sensor. Através da opção **Load Settings** carregue o arquivo `cal_2007.cfg`. Entre no menu **Setup, Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor**  $Y_{cal} = a/Y_{raw} + f/\sqrt{Y_{raw}} + g + h * Y_{raw}$  e habilite a opção **Apply Thermal Compensation**;

3. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** e defina **Ts=0.001768s**. Carregue o algoritmo **MA.alg** através da opção **Load Algorithm**. Usando a opção **Edit**, introduza no algoritmo o valor calculado de  $u_{10}$  na unidade counts (= Ampère  $\times 10^4$ ). Em seguida selecione **Implement Algorithm**. O disco deve se mover para a altura de 2,0 [cm] mantendo-se nesta posição;

**Observação:** Nesta situação o sistema levitador opera sem a compensação do atuador e sem controle; somente a compensação da força peso está sendo utilizada para manter o disco a altura de 2,0 [cm]. Para pequenos deslocamentos, a interação magnética entre o disco e a bobina pode ser considerada como um efeito de mola.

4. Entre no menu **Data** a seguir **Setup Data Acquisition** e selecione **Commanded Position, Control Effort** e **Variable Q10**;
5. Repita os passos de 5 a 8 utilizados no experimento anterior, considerando agora a Tabela 2 como referência para as amplitudes;
6. A partir da frequência de ressonância e do valor de pico obtidos determine o valor de  $k_1$  e compare com o valor teórico conforme expressão (19).

Tabela 2: Sugestão de amplitudes para o experimento.

Frequência [Hz]	Amplitude [counts]
2,0	2.000
3,0	1.400
4,0	1.800
5,0	3.000

## Reposta em Frequência usando Matlab

Além da parte experimental, inclua no relatório a solução dos problemas a seguir.

1. Obtenha graficamente a resposta em frequência do sistema

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2u(t)$$

Faça um programa Matlab de forma a traçar os diagramas de resposta em frequência para diferentes valores do fator de amortecimento  $\xi$  e frequência natural de oscilação  $\omega_n$ .

Considere as rotinas Matlab:

- `tf` cria função de transferência:

$$g = \text{tf}([5 \ 0], [1 \ 3 \ 2]) \quad \text{cria a f.t. } G(s) = \frac{5s}{s^2 + 3s + 2}.$$

- `bode` plota os diagramas de módulo e fase.

`bode(g)` ou `bode(g, {w1, w2})` com `w1` e `w2` em [rad/s].

- Considere ainda:

`for` para criar a variação do parâmetro desejado;

`plot`, `hold on`, `clf` e `figure(n)` para manipulação das figuras.

Plote através dos comandos de manipulação de figuras todas as respostas na mesma figura para os casos

a)  $\omega_n = 2$  e  $\xi$  variando na forma `0.05:0.35:2`

b)  $\xi = 0.1$  e  $\omega_n$  e variando na forma `1:0.5:4`

Responda então aos seguintes itens.

- (a) Os comportamentos obtidos são compatíveis com os esperados teoricamente
- (b) Compare a frequência de ressonância ( $\omega_r$ ) e o pico de ressonância ( $M_p$ ) obtidos graficamente no caso  $\xi = 0.4$ , com os valores teóricos de  $\omega_r$  e  $M_p$  indicados em (11).

2. Identifique o sistema cujos Diagramas de Bode são dados na Fig. 22.

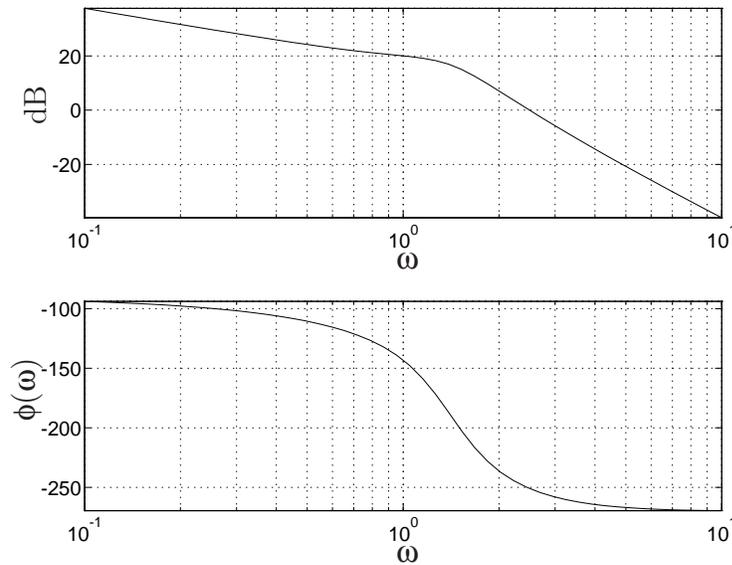


Figura 22: Diagramas de módulo e fase.

3. Considerando a planta ECP escolhida, trace os diagramas de Bode correspondentes para as funções de transferências das configurações indicadas a seguir. Utilize os valores numéricos obtidos pelo grupo na experiência de resposta temporal (experiência 5).

**Emulador** ( $G_1$ ) Disco de carga sem massa. ( $G_2$ ) Discos acoplados com as polias  $n_{pd} = 24$  e  $n_{pl} = 36$ .

$$G_1(s) = \frac{k_{\text{amp}}k_t k_e}{s(J_{dd}s + c_1)}, \quad G_2(s) = \frac{k_{\text{amp}}k_t k_e}{s(J_d^*s + c_d^*)}$$

com

$$J_d^* = J_{dd} + \frac{J_{pi}}{(g_r')^2} + \frac{J_{dl}}{(g_r)^2}, \quad c_d^* = c_1 + \frac{c_2}{g_r^2}$$

Note que  $k_{\text{amp}}k_t k_e = k_{hw}/k_s k_c$ .

**Retilíneo** ( $G_1$ ) Carro #1 sem massa com a mola média. ( $G_2$ ) Carro #2 sem massa com a mola média.

$$G_i(s) = \frac{k_{\text{amp}}k_t k_e k_{mp} k_{ep}}{m_i s^2 + c_i s + k_i}$$

$i = 1, 2$ . Note que  $k_{\text{amp}}k_t k_e k_{mp} k_{ep} = k_{hw}/k_s k_c$ .

**Torcional** ( $G_1$ ) Disco#1 sem massa. ( $G_3$ ) Disco#3 sem massa.

$$G_i(s) = \frac{k_{\text{amp}}k_t k_e k_p}{J_i s^2 + c_i s + k_i}$$

<sup>8</sup>Como  $c_2$  não foi medido adote o valor  $c_2 = 0.05$  N-s/m.

$i = 1, 3$ . Note que  $k_{\text{amp}}k_t k_e k_p = k_{hw}/k_s k_c$ .

**Pêndulo** ( $G_1$ ) Haste deslizante sem pesos “orelha”, haste principal travada. ( $G_2$ ) Função de transferência  $\Theta(s)/X(s)$  entre as hastes principal e deslizante, em dois casos  $\ell_t = 10[\text{cm}]$  ( $\ell_{w2} = -13,75[\text{cm}]$ ) e  $\ell_t = 11[\text{cm}]$  ( $\ell_{w2} = -14,75[\text{cm}]$ ).

$$G_1(s) = \frac{k_f k_x}{s(m_{1o}s + c_1)}, \quad G_2(s) = -\frac{k_f k_a m_1 (\ell_0 s^2 - g)}{J^* s^2 - g(m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c)}$$

**Levitador** ( $G_1(s)$ ) Disco e bobina #1 com compensação das não-linearidades do medidor e da força magnética.

$$G_1(s) = \frac{k_{hw}}{s(m_1 s + c_1)}$$

Note que  $k_{hw} = 100$ .

Tabela 3: Elementos de Ganho do Sistema.

Elemento	Função de Transferência	Valor
Encoder	$G_e(s) = k_e$	$\frac{16.000}{2\pi}$ (Count/Rad.)
Conversão de Pulsos	$G_s(s) = k_s$	32 (DACcount/Count)
Conversor DA	$G_c(s) = k_c$	$\frac{10}{32.768}$ (Volt/DACcount)
Amplificador Servo	$G_a(s) = k_{\text{amp}}$	* (Ampère/Volt)
Motor	$G_t = k_t$	* (Newton-m/Ampère)

\* O produto  $k_{\text{amp}}k_t$  foi medido na experiência 5.

Tabela 4: Ganhos para o Pêndulo Invertido

Elemento	Função de Transferência	Valor
Ganho combinado: CAD/Amplificador/Motor/Roldana	$G_f(s) = k_f$	0,0013 (N/DACcount)
Encoder da Haste Deslizante	$G_x(s) = k_x$	50.200 (Counts/m)
Encoder da Haste Principal	$G_a(s) = k_a$	2.546 (Counts/rad)
Conversão de Pulsos	$G_s(s) = k_s$	32 (DACcount/Counts)

## Referências

- [1] Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*, 2a. Edição, Prentice-Hall do Brasil, 1993.

- 
- [2] Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A., *Feedback Control of Dynamic Systems*, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1990.
  - [3] Soderström, T., Stoica, P., *System Identification*, Prentice Hall, 1987.
  - [4] Manual for Model 220 – Industrial Emulator/Servo Trainer, ECP, 1995.
  - [5] Manual for Model 210/210a – Rectilinear Control System, ECP, 1998.
  - [6] Manual for Model 205/205a – Torcional Control System, ECP, 1997
  - [7] Manual for Model 505 – Inverted Pendulum, ECP, 1994.
  - [8] Manual for Model 730 – Magnetic Levitation System, ECP, 1999.