



UNICAMP – Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação
EA-619 Laboratório de Análise Linear

Experiência 4: Resposta em Freqüência: Método
e Aplicação em Identificação

2 de maio de 2016

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Pólos e Zeros de Funções Complexas	2
1.2	Transformada de Laplace	3
1.3	Função de Transferência	4
2	Resposta de um Sistema Linear à Entrada Senoidal	5
2.1	Diagramas de Bode	8
2.1.1	Traçado dos diagramas de Bode: exemplo	14
3	Resposta em Freqüência dos Equipamentos ECP	15
4	Identificação de Sistemas pelo Método Freqüencial	16
4.1	Resposta em Freqüência de Sistemas de 2a. Ordem	17
5	Roteiro	18
6	Procedimento de cálculo da relação de amplitudes e defasagem	19

1 Introdução

Quando aplica-se uma entrada senoidal a um sistema linear invariante no tempo, sua resposta em regime permanente será também senoidal de mesma freqüência, diferindo da entrada apenas em magnitude e fase. A resposta em freqüência de um sistema dinâmico é definida como a resposta em regime estacionário a uma entrada senoidal, em uma faixa de freqüência de interesse.

O método da resposta em freqüência é uma abordagem alternativa importante na análise e projeto de um sistema. Através desse método, pode-se determinar a função de transferência de um dado sistema linear, e também controlar sua faixa de passagem, de modo a minimizar os efeitos de ruídos.

1.1 Pólos e Zeros de Funções Complexas

Seja $G(s)$ uma função complexa da variável complexa $s = \sigma + j\omega$. Para cada s complexo, tem-se

$$G(s) = \text{Re}[G(s)] + j\text{Im}[G(s)]$$

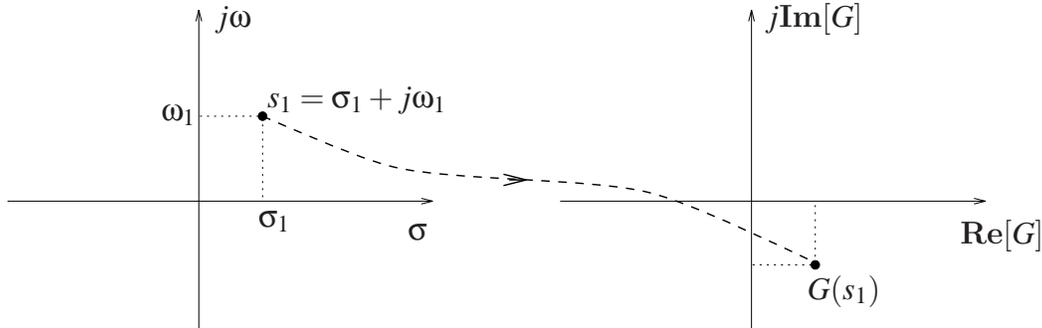


Figura 1: Função de variável complexa.

Definição 1. Uma função $G(s)$ da variável complexa s é **função analítica** em uma região do plano s se a função e todas as suas derivadas existirem na região.

Exemplo 1. A função

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

é analítica em todos os pontos do plano s , exceto em $s = 0$ e $s = -1$.

Definição 2. Se uma função $G(s)$ é analítica na vizinhança de s_i , diz-se que $G(s)$ tem um **pólo de ordem r** em s_i se o limite

$$\lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i)^r G(s)$$

tem um valor finito não nulo.

Exemplo 2. A função

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+3)^2}$$

tem um pólo simples (ordem 1) em $s = -1$ e um pólo de ordem 2 em $s = -3$.

Definição 3. Uma função $G(s)$ tem um **zero de ordem r** em s_i se $1/G(s)$ tem um pólo de ordem r em $s = s_i$. Alternativamente, s_i é um zero de $G(s)$ se $\lim_{s \rightarrow s_i} G(s) = 0$.

No exemplo anterior, a função $G(s)$ tem um zero em $s = -2$. Considerando-se os zeros no infinito, $G(s)$ tem também um zero de ordem 2 em $s = \infty$. Nesse sentido, dada uma função racional de s tem-se que o número de pólos é igual ao número de zeros.

1.2 Transformada de Laplace

Considere a função $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, expressa como

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} [\exp(j\omega_0 t) - \exp(-j\omega_0 t)] \quad (1)$$

pois, $\exp(j\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$. Calculando a transformada de Fourier, obtém-se que

$$F(\omega) = \frac{1}{2j} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[j(\omega_0 - \omega)t] dt - \int_0^{\infty} \exp[-j(\omega_0 + \omega)t] dt \right\}$$

Note que as integrais acima não convergem, pois as funções $\exp[j(\omega_0 - \omega)t]$ e $\exp[-j(\omega_0 + \omega)t]$ são periódicas e não se aproximam de nenhum limite.

Considere agora a seguinte modificação da transformada de Fourier

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt$$

onde $s = \sigma + j\omega$. Daí,

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) \sin(\omega_0 t) dt \quad (2)$$

e aplicando-se a forma (1), tem-se

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} \{ \exp[-(s - j\omega_0)t] - \exp[-(s + j\omega_0)t] \} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{2j\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right] \end{aligned}$$

e portanto

$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{para } \mathbf{Re}[s] = \sigma > 0 \quad (3)$$

Pode-se então definir um espectro de frequência $F(s)$ para todo s tal que $\mathbf{Re}[s] > 0$. A Fig. 2 mostra a região de convergência¹ da integral (2) e os pólos de $F(s)$.

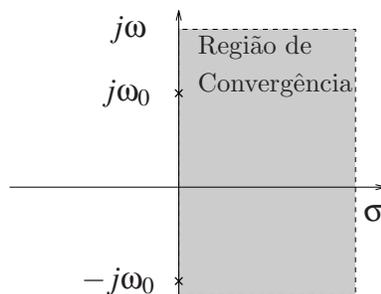


Figura 2: Plano Complexo e Região de Convergência.

¹O Teorema da Extensão Analítica valida esse resultado para todo o plano s (Ver Ogata na lista de Referências).

Considere agora a classe de funções $f(t)$ contínuas por partes, tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\sigma t) |f(t)| \rightarrow 0$$

para algum $\sigma > 0$ e $f(t) = 0$, para $t < 0$. Para essa classe de funções define-se a transformada de Laplace de $f(t)$ por

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt \quad (4)$$

Exemplo 3. Seja $f(t) = \exp(at)$, $t \geq 0$, a complexo. Então,

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{para } \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[a]$$

Pode-se mostrar que, se a função $f(t)$ tem derivada de ordem n , então a transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ é dada por

$$s^{(n)}F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (5)$$

onde $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ e $f^{(k)}(0)$ é a k -ésima derivada de $f(t)$ calculada no tempo $t = 0$.

1.3 Função de Transferência

Seja o sistema linear descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (6)$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$ são constantes reais e $n > m$. Além disso, supõe-se que

$$y(0) = y^{(1)}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = u(0) = u^{(1)}(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação (6) e usando (5), obtém-se

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s)$$

e daí

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

A função $G(s)$ é chamada de **função de transferência** de $U(s)$ para $Y(s)$. Esquemáticamente,

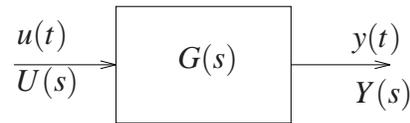


Figura 3: Função de Transferência.

Note que os pólos e zeros finitos de $G(s)$ são, respectivamente, as raízes dos polinômios $D(s)$ e $N(s)$. Observe que, a função de transferência:

- a) caracteriza unicamente um sistema linear invariante no tempo;
- b) é independente da entrada;
- c) é obtida supondo-se que todas as condições iniciais do sistema são nulas.

2 Resposta de um Sistema Linear à Entrada Senoidal

Seja um sistema linear invariante no tempo representado pela função de transferência $G(s) = N(s)/D(s)$. Para facilitar a exposição, suponha que os pólos de $G(s)$, s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são distintos com parte real negativa. Pode-se então escrever

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

Supondo que a entrada do sistema é $u(t) = A \sin(\omega t)$, a resposta em regime estacionário, isto é,

$$y_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

pode ser calculada. O sistema é assintoticamente estável (parte real dos pólos negativa) e as condições iniciais são nulas. Seja $U(s)$ a transformada de Laplace de $u(t) = A \sin(\omega t)$. Então, de (3), tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \left(\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - s_n} \end{aligned} \quad (7)$$

onde a e c_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são constantes e \bar{a} é o complexo conjugado de a . A transformada inversa de Laplace da equação (7) fornece (veja equação (4))

$$\begin{aligned} y(t) &= a \exp(-j\omega t) + \bar{a} \exp(j\omega t) + c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_2 t) + \cdots \\ &\quad \cdots + c_n \exp(s_n t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Como a parte real de s é por hipótese negativa, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(st) \rightarrow 0$. Se $G(s)$ tiver pólos de multiplicidade m_k , então $y(t)$ possuirá termos do tipo $t^{k_j} \exp(s_j t)$, $k_j = 0, 1, \dots, m_k - 1$. Como $\text{Re}[s_j] < 0$, tem-se também que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{k_j} \exp(s_j t) \rightarrow 0$. Portanto,

$$y_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \exp(-j\omega t) + \bar{a} \exp(j\omega t) \quad (8)$$

As constantes a e \bar{a} podem ser calculadas a partir de (7) da seguinte maneira:

$$a = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = +\frac{AG(j\omega)}{2j}$$

Como $G(s)$ é uma função complexa, tem-se

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \exp[j\phi(\omega)]$$

onde

$$\phi(\omega) = \arctan \left[\frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)} \right]$$

Analogamente,

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \exp[-j\phi(\omega)] = |G(j\omega)| \exp[-j\phi(\omega)]$$

e de (8), obtém-se

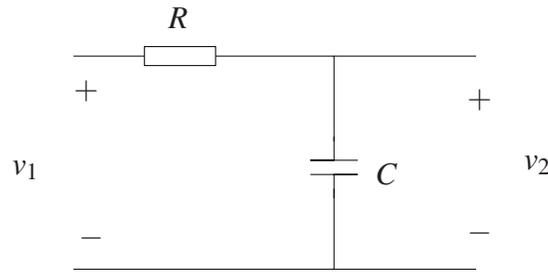
$$\begin{aligned} y_e(t) &= A |G(j\omega)| \frac{\exp[j(\omega t + \phi(\omega))] - \exp[-j(\omega t + \phi(\omega))]}{2j} \\ &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)) = B \sin(\omega t + \phi(\omega)) \end{aligned}$$

onde $B = A |G(j\omega)|$.

Concluindo, um sistema linear, assintoticamente estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal, possui em regime estacionário uma saída senoidal com a mesma frequência de entrada, porém com amplitude e ângulo de fase em geral distintos. Portanto, para uma entrada senoidal:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| &= & \text{Relação de amplitude entre a saída senoidal} \\ & & & \text{e a entrada senoidal.} \\ \phi(j\omega) & &= & \text{Defasagem da saída senoidal em relação à} \\ & & & \text{entrada senoidal.} \end{aligned}$$

A saída senoidal em regime estacionário pode ser obtida a partir das características da entrada senoidal (amplitude e frequência) e das características de $G(j\omega)$ (amplitude e fase). Alternativamente, a função de transferência de um sistema linear pode ser identificada levantando-se os gráficos da relação de amplitudes e ângulos de fase em função da frequência.

Figura 4: Circuito RC série.

Exemplo 4. Considere o circuito RC na Fig. 4. Tem-se que

$$v_1(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad ; \quad v_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

e tomando a transformada de Laplace das equações acima, obtém-se

$$V_1(s) = \left(R + \frac{1}{sC} \right) I(s) \quad ; \quad V_2(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Portanto

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$

que é a função de transferência do sistema. Daí,

$$G(j\omega) = \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) + 1} \quad , \quad \omega_1 = \frac{1}{RC} \quad (9)$$

e

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + 1}} \quad , \quad \phi(\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \quad (10)$$

Portanto, para uma entrada $v_1(t) = A \sin(\omega t)$,

$$v_2(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + 1}} \sin \left(\omega t - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \right)$$

De (9), tem-se que $G(j\omega) = a - jb$, onde

$$a = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} \quad , \quad b = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2}$$

e pode-se verificar que $a^2 + b^2 = a$, e daí $(a - 1/2)^2 + b^2 = 1/4$. Portanto, o lugar geométrico das partes real e imaginária de $G(j\omega)$ é um círculo de raio $1/2$ e centro em $(1/2, 0)$. De (10), tem-se que:

- a) para $\omega = 0$, $|G(j\omega)| = 1$ e $\phi(\omega) = 0$.
- b) para $\omega = \omega_1$, $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\phi(\omega) = -45^\circ$.
- c) para $\omega \rightarrow \infty$, $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ e $\phi(\omega) = -90^\circ$.

A Fig. 5 mostra o gráfico polar de $G(j\omega)$ em função da frequência ω .

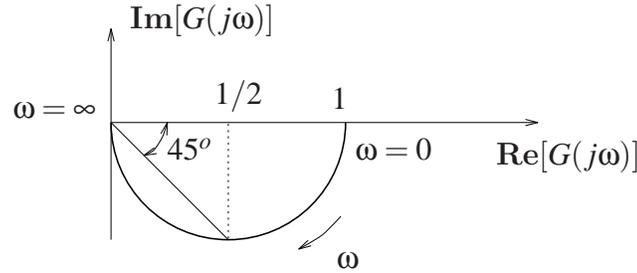


Figura 5: Gráfico polar de $G(j\omega)$.

O gráfico polar da Fig. 5 caracteriza um sistema linear cuja função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

onde o parâmetro τ pode ser identificado da seguinte forma: injeta-se um sinal senoidal na entrada, com frequência variável. A frequência correspondente a uma saída senoidal defasada de 45° da entrada é igual a $1/\tau$. Alternativamente, a frequência $1/\tau$ corresponde a uma relação de amplitudes entre saída e entrada de $1/\sqrt{2}$.

2.1 Diagramas de Bode

São gráficos logarítmicos usados na determinação da resposta em frequência de um sistema. Esses gráficos podem também ser utilizados na identificação da função de transferência de um sistema linear.

Seja $G(s)$ a função de transferência de um sistema linear. Então,

$$G(j\omega) = |G(\omega)| \exp[j\phi(\omega)]$$

é a função de transferência no domínio da frequência. Define-se

$$\text{Ganho Logarítmico} = 20 \log |G(j\omega)|$$

com unidade em decibéis (dB).

Os Diagramas de Bode consistem de um gráfico do ganho logarítmico em dB (Diagrama de Magnitude), e de um gráfico da fase $\phi(\omega)$ (Diagrama de Fase), ambos em função da frequência ω .

Exemplo 5. A função de transferência do circuito RC da Fig. 4 é

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \quad , \quad \tau = RC$$

e seu ganho logarítmico é dado por

$$20\log | G(j\omega) | = 20\log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \right) = -10\log (1 + (\omega\tau)^2)$$

Para frequências bem pequenas, isto é, $\omega \ll 1/\tau$, tem-se

$$20\log | G(j\omega) | = -10\log(1) = 0 \text{ dB}$$

Para frequências bem grandes, isto é, $\omega \gg 1/\tau$, tem-se

$$20\log | G(j\omega) | = -20\log(\omega\tau)$$

Quando $\omega = 1/\tau$ (chamada de *frequência de corte*),

$$20\log | G(j\omega) | = -10\log(2) \approx -3 \text{ dB}$$

O ângulo de fase do sistema é dado por

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

Considerando-se agora uma escala logarítmica de frequência, em lugar da escala linear, tem-se para $\omega\tau \gg 1$

$$20\log | G(j\omega) | = -20\log(\omega\tau)$$

e portanto, se o eixo horizontal é $\log \omega$, a curva assintótica para $\omega \gg 1/\tau$ é uma reta, como mostrado na Fig. 6.

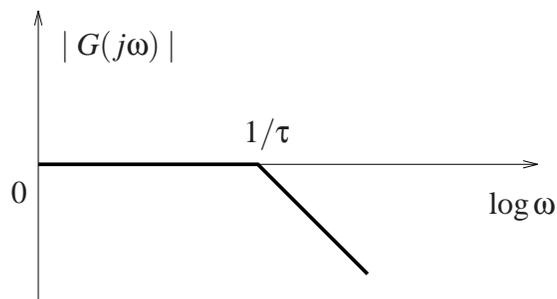


Figura 6: Diagrama de Magnitude.

Note que uma variação unitária em $\log \omega$ corresponde a uma variação de -20 dB em ganho. Mas uma variação unitária em $\log \omega$ corresponde a uma década de variação em ω , ou seja, de 1 a 10, de 10 a 100, etc. Diz-se então que a inclinação da reta é de -20 dB/década.

Ao invés de décadas, algumas vezes a unidade *oitava* é usada para representar a separação entre duas frequências. As frequências ω_1 e ω_2 são separadas por uma oitava se $\omega_1/\omega_2 = 2$. Nesse caso,

$$20 \log |G(j\omega_2)| - 20 \log |G(\omega_1)| = 20 \log \left(\frac{\omega_2 \tau}{\omega_1 \tau} \right) = -20 \log(2) = -6 \text{ dB}$$

e portanto a inclinação da reta é de -6 dB/oitava.

Seja agora $G(j\omega)$ a função de transferência no domínio da frequência de um sistema linear. Então, $G(j\omega)$ pode ser escrita na forma

$$G(j\omega) = \frac{k_b \prod_{i=1}^Q (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^M (1 + j\omega\tau_m) \prod_{k=1}^R \left[1 + (2\xi_k/\omega_{nk}) j\omega + (j\omega/\omega_{nk})^2 \right]}$$

A função de transferência anterior inclui Q zeros, N pólos na origem, M pólos reais e R pares de pólos complexos conjugados. Tomando o logaritmo da magnitude de $G(j\omega)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log(k_b) + 20 \sum_{i=1}^Q \log |1 + j\omega\tau_i| - 20 \log |(j\omega)^N| \\ &\quad - 20 \log \sum_{m=1}^M |1 + j\omega\tau_m| - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \left(\frac{2\xi_k}{\omega_{nk}} j\omega \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

e portanto o gráfico do ganho logarítmico pode ser obtido adicionando-se os gráficos devidos a cada um dos fatores.

O ângulo de fase é descrito como

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^Q \arctan(\omega\tau_i) - N \times 90^\circ - \sum_{m=1}^M \arctan(\omega\tau_m) - \sum_{k=1}^R \arctan \left(\frac{2\xi_k \omega_{nk} \omega}{\omega_{nk}^2 - \omega^2} \right)$$

que corresponde à soma dos ângulos de fase devidos a cada fator individual.

As características assintóticas do Diagrama de Bode de cada um dos fatores distintos que ocorrem numa função de transferência são descritas a seguir.

a) Ganho constante k_b

Ganho Logarítmico = $20 \log(k_b)$ = constante em dB

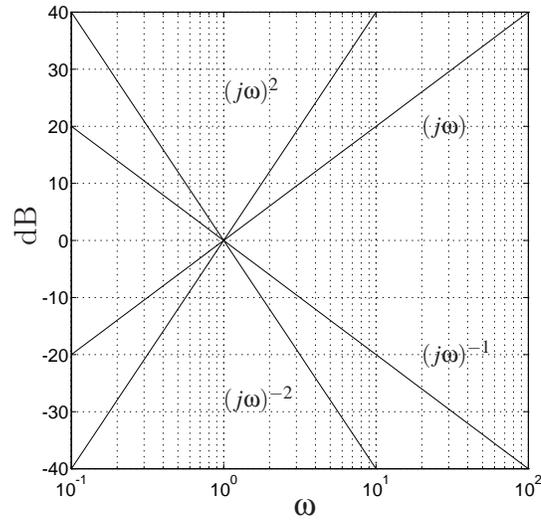
Ângulo de fase = 0

b) Zeros ou Pólos na origem: $(j\omega)^{\pm N}$ (Veja figuras 7.a e 7.b)

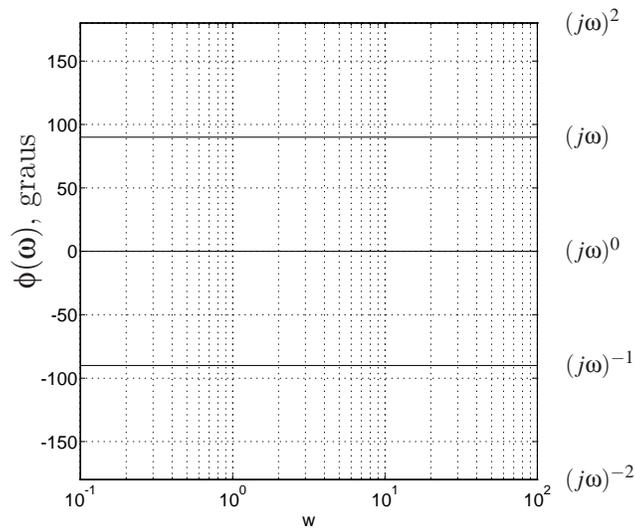
$$\text{Ganho Logarítmico} = 20 \log |(j\omega)^{\pm N}| = \pm 20N \log |j\omega|$$

$$\text{Inclinação das curvas de magnitude} = \pm 20N \text{ dB/década}$$

$$\hat{\text{Ângulo de fase}} = \pm 90N$$



(a)



(b)

Figura 7: Diagrama de Magnitude (a) e de Fase (b) para $(j\omega)^{\pm N}$.

c) Zeros ou Pólos Reais: $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$ (Veja Fig. 8)

$$\text{Ganho Logarítmico} = 20 \log |(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}| = \pm 10 \log (1 + \omega^2\tau^2)$$

Assíntota para $\omega \ll 1/\tau$ é igual a 0 dB

Assíntota para $\omega \gg 1/\tau$ é igual a $\pm 20 \log \omega \tau$, com inclinação de ± 20 dB/década.

A interseção das assíntotas ocorre quando $-20 \log(\omega \tau) = 0$ dB, ou seja, ocorre na frequência de corte $\omega = 1/\tau$.

Ganho Logarítmico em $\omega = 1/\tau$ é igual a ± 3 dB

Ângulo de fase = $\pm \arctan(\omega \tau)$

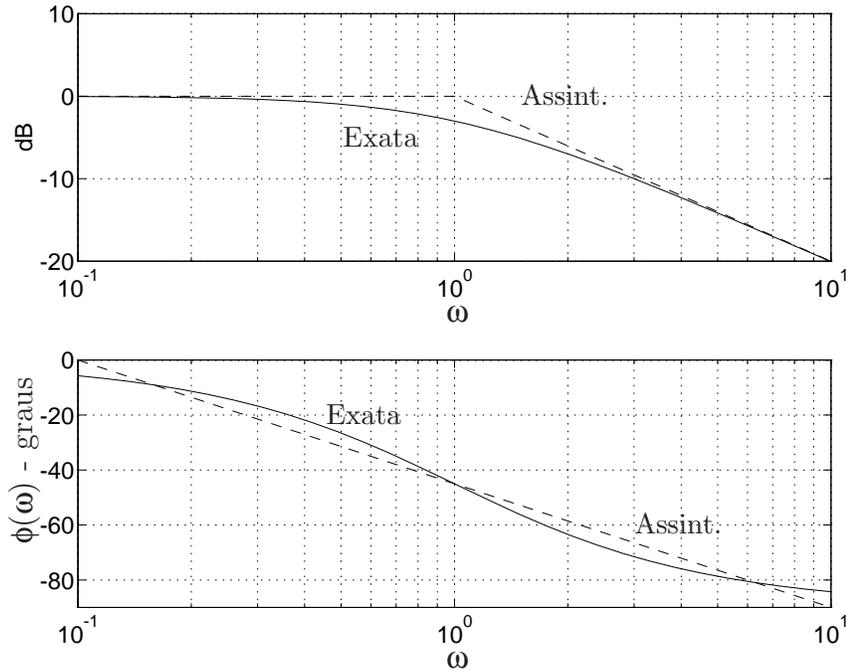


Figura 8: Diagramas de Bode para $(1 + j\omega\tau)^{-1}$, $\tau = 1$.

d) Zeros ou Pólos Conjugados: $[1 + (2\xi/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

O fator quadrático para um par de zeros ou pólos complexos conjugados pode ser escrito na forma $[1 + j2\xi u - u^2]^{\pm 1}$, onde $u = \omega/\omega_n$.

Ganho Logarítmico = $\pm 10 [\log((1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)]$

Ângulo de fase = $\pm \arctan\left(\frac{2\xi u}{1 - u^2}\right)$

Para $u \ll 1$ ($u = \omega/\omega_n$; $\omega \ll \omega_n$)

Assíntota = 0 dB, Ângulo de fase $\rightarrow 0$

Para $u \gg 1$

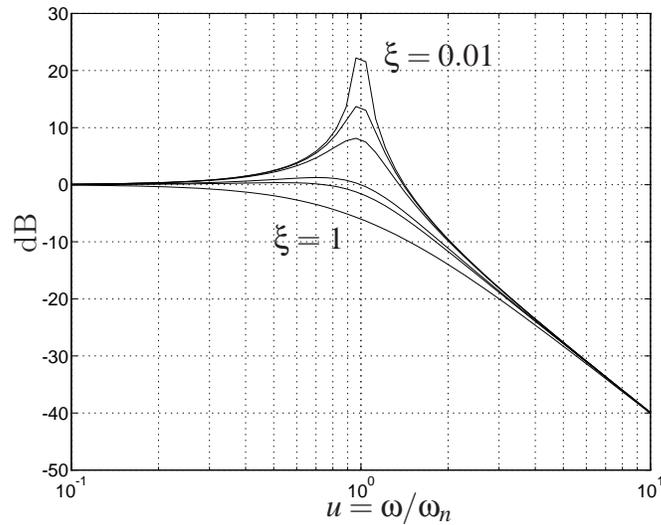
Assíntota = $\pm 10 \log u^4 = \pm 40 \log u$

Inclinação da assíntota = ± 40 dB/década

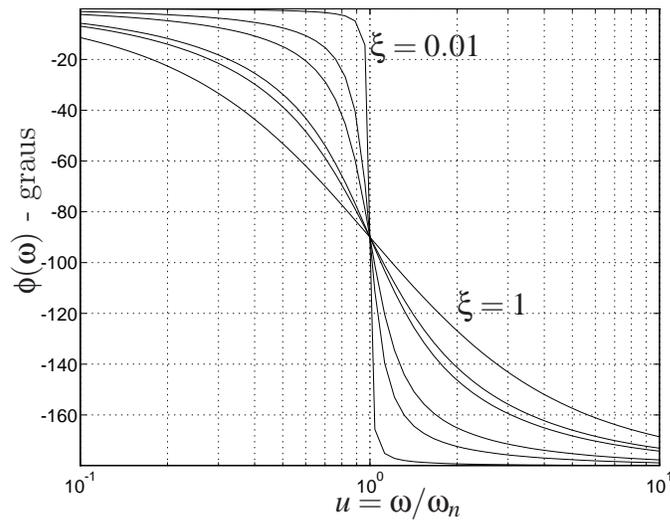
Ângulo de fase $\rightarrow \mp 180^\circ$

A interseção das assíntotas ocorre em $\omega/\omega_n = 1$

O Diagrama de Bode de um fator quadrático devido a um par de pólos complexos conjugados é mostrado na Fig. 9.



(a)



(b)

Figura 9: Diagrama de Magnitude (a) e de Fase (b) para $[1 + (2\xi/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$.

Para um par de pólos complexos conjugados, o valor máximo da resposta em frequência M_p ocorre na frequência de ressonância ω_r , onde

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \text{válidos para } \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \quad (11)$$

2.1.1 Traçado dos diagramas de Bode: exemplo

Seja a função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0.1\omega)}{j\omega(1 + j0.5\omega)[1 + j0.6(\omega/50) + (j\omega/50)^2]}$$

Os seguintes fatores podem ser identificados:

- Um ganho constante $K = 5$.
- Um pólo na origem.
- Um pólo em $s = -2$.
- Um zero em $s = -10$.
- Um par de pólos complexos conjugados com $\omega_n = 50$ e $\xi = 0.3$.

Primeiramente, desenhe os ganhos logarítmicos de cada fator conforme a Fig. 10.

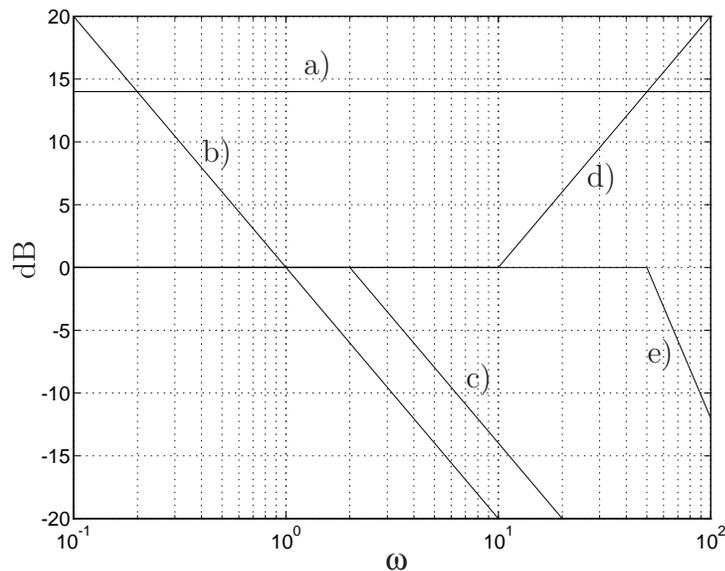


Figura 10: Ganhos Assintóticos dos pólos e zeros.

O ganho de magnitude assintótico total é obtido adicionando-se os diversos ganhos individuais (Figs. 11 e 12).

As características de fase de cada fator, assim como a fase total (obtida a partir da soma das fases de cada fator), são mostradas na Fig. 13.

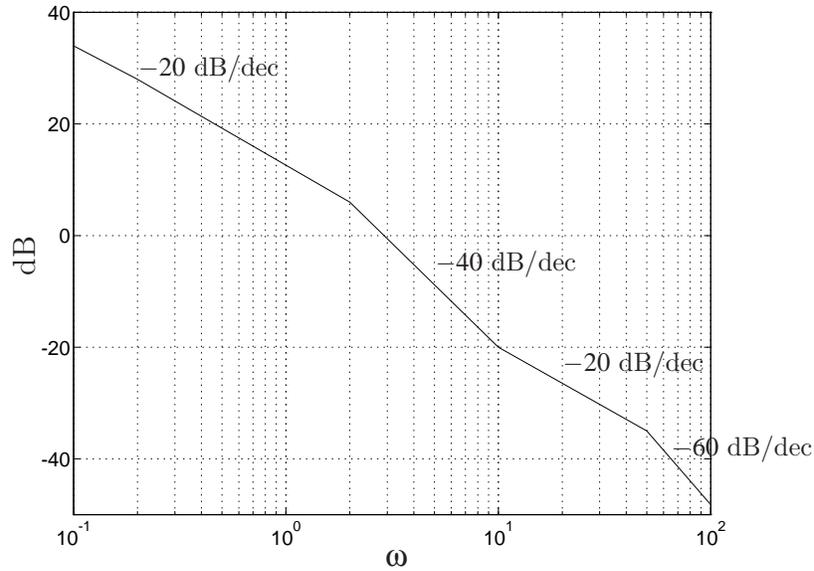


Figura 11: Ganho assintótico.

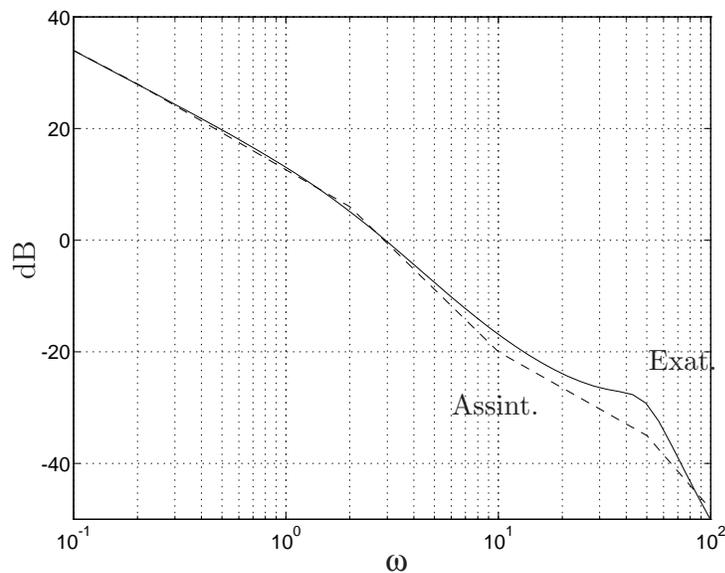


Figura 12: Ganhos assintótico e exato.

3 Resposta em Frequência dos Equipamentos ECP

O objetivo dessa experiência é a identificação dos parâmetros desconhecidos dos modelos dos sistemas ECP, utilizando a técnica de resposta em frequência e a comparação com os valores obtidos anteriormente através da técnica da resposta temporal da experiência 5. Como na identificação via resposta temporal, sempre que possível adota-se configurações

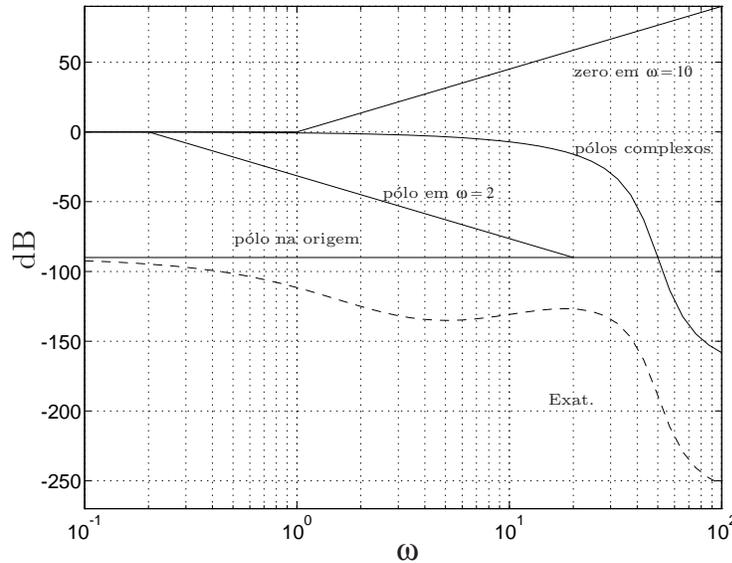


Figura 13: Característica da Fase.

para o sistema ECP que reproduzam sistemas de 2a. ordem sub-amortecidos.

Algumas propriedades fundamentais da resposta em frequência de sistemas de 2a. ordem levemente amortecidos serão usadas para obter indiretamente parâmetros como massas ou momentos de inércias, constantes de mola e coeficientes de atrito viscoso a partir de medidas da planta quando esta se encontra em configurações clássicas do tipo massa-mola, inércia-mola, ou configurações que utilizem controlador proporcional para “simular”o efeito de força de reconstituição de uma mola.

Assim como na resposta temporal a máxima sobre-elevação e a frequência de oscilação da resposta caracterizam um sistema de 2a. ordem sub-amortecido, na resposta em frequência um sistema pouco amortecido apresentará um pico na resposta, na frequência de ressonância característica, e esses dados o caracterizam.

Na próxima seção serão indicados os procedimentos de identificação baseados na resposta em frequência de sistemas de 2a. ordem, explicitando o método de medidas que será empregado experimentalmente.

4 Identificação de Sistemas pelo Método Freqüencial

Podemos afirmar que um sistema linear, assintoticamente estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal, possui em regime estacionário uma saída senoidal com a mesma frequência de entrada, porém com amplitude e ângulo de fase em geral distintos. Além disso, se $G(s)$ é a função de transferência desse sistema, para uma entrada senoidal

de frequência ω , tem-se

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| &= & \text{Relação de amplitude entre a saída senoidal} \\ & & & \text{e a entrada senoidal.} \\ \angle G(j\omega) &= \phi(j\omega) &= & \text{Defasagem da saída senoidal em relação à entrada senoidal.} \end{aligned}$$

A saída senoidal em regime estacionário pode ser obtida a partir das características da entrada senoidal (amplitude e frequência) e das características de $G(j\omega)$ (amplitude e fase). Alternativamente, a função de transferência de um sistema linear pode ser identificada levantando-se os gráficos da relação de amplitudes e ângulos de fase em função da frequência.

4.1 Resposta em Frequência de Sistemas de 2a. Ordem

Considere a função de transferência do sistema de 2a. ordem descrita na forma

$$G(s) = \frac{k_{hw}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se $0 \leq \xi < \sqrt{2}/2$, os pólos do sistema são complexos conjugados e diz-se que esse tipo de sistema é sub-amortecido e sua resposta em frequência apresenta um pico de ressonância. Identificar o sistema de 2a. ordem consiste em determinar experimentalmente os parâmetros ξ e ω_n , considerando que o ganho de hardware k_{hw} seja conhecido.

Os seguintes passos devem ser realizados para a identificação experimental:

1. Submete-se o sistema a uma entrada senoidal com amplitude conhecida escolhendo frequências dentro da faixa de sua utilização. Em regime permanente, se o sistema de 2a. ordem for sub-amortecido, este irá apresentar um pico na frequência de ressonância ω_r , dado por

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (12)$$

e o valor de pico na frequência ω_r normalizado (M_p) é dado por

$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (13)$$

vide a apostila da experiência 6. Para a utilização das equações acima, lembre-se que é preciso que ocorra ressonância, e portanto

$$1 - 2\xi^2 > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < \xi < \sqrt{2}/2$$

2. O valor de ξ pode ser obtido diretamente da medida de M_p .
3. O valor da frequência ω_n pode ser obtido da medida de ω_r e do valor de ξ calculado no passo anterior.

5 Roteiro

1. Usando o conceito de resposta em frequência e os valores de m (ou J), K_p e c do experimento anterior, calcule a resposta em regime permanente de seu sistema quando a entrada for $\cos(\omega_n t)$. O que você observa em relação à fase da saída? Como isso se reflete na parte real da resposta em frequência? O objetivo dessa questão é estabelecer a relação entre a função de transferência e a resposta em frequência.
2. Verifique seu resultado experimentalmente. Refaça os ajustes do ECP usados no experimento anterior. Para gerar a entrada desejada, entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Sinusoidal**. Em **Set-up** selecione **Closed-Loop**, e determine uma amplitude de entrada que produza amplitudes na saída suficientemente altas para que o movimento tenha grandes excursões que superem o atrito de Coulomb (ou atrito seco), mas não tão grandes para evitar que comportamentos não-lineares devido a saturação, desbalanceamentos, etc. se tornem aparentes na resposta. Para a escolha do número de períodos para execução do movimento, considere um valor suficientemente alto para que o sistema entre em regime, mas não tão longo, para que os arquivos a serem salvos não fiquem excessivamente grandes. Para comparar a entrada e a saída, mostre o **Encoder # 1 Position** em um eixo e o **Command Position** em outro.
3. Baseado no diagrama de Bode de um sistema de segunda ordem, mostrado na figura 9, página 13 e na diferença de fase observada entre a entrada e a saída de seu resultado experimental, a frequência de ressonância do sistema é igual, maior ou menor do que o valor de ω_n estimado no experimento anterior? O objetivo dessa questão é mostrar como a fase está fortemente relacionada à frequência de ressonância de um sistema de segunda ordem.
4. No Matlab, usando os comandos `tf` e `bode`, trace o diagrama de Bode de seu sistema com realimentação com os parâmetros estimados no experimento anterior. Usando o diagrama de Bode, determine a resposta em regime permanente quando a entrada for $\cos(10t)$. Sobre o uso de decibéis, qual o ganho em dB quando uma **amplitude** aumenta dez vezes? Sabendo que quando uma amplitude dobra então ela aumenta 6 dB, qual o ganho em dB quando uma amplitude aumenta cinco vezes. O objetivo dessas questões é interpretar o que o diagrama de Bode mostra, bem como “brincar” com logaritmos.
5. Verifique experimentalmente seu diagrama de Bode, usando uma entrada **Sine Sweep**. Qual o valor experimental da frequência de ressonância?
6. Sendo $\hat{\omega}_n$ a frequência de ressonância estimada no item anterior (com entrada **Sine Sweep**), gere agora a resposta a uma entrada senoidal de frequência $\hat{\omega}_n$. Qual a resposta em frequência (amplitude e fase) nessa frequência? Baseado em (11), o valor de ξ estimado na experiência anterior é maior, menor ou igual ao que seria estimado pela resposta em frequência? O objetivo dessa questão é chamar a atenção

para a possibilidade de estimar os parâmetros usando também a resposta em frequência. Evidentemente, um procedimento mais preciso do que uma varredura de frequências seria necessário para estimar a frequência de ressonância e os ganhos nessa frequência.

7. Sendo $\hat{\omega}_n$ a frequência de ressonância estimada no item anterior (com entrada **Sine Sweep**), gere agora as respostas a entradas senoidais de frequências $\hat{\omega}_n/5$ e $5\hat{\omega}_n$. O que você observa sobre as defasagens e ganhos de amplitude nesses casos?
8. Para finalizar, vamos retomar o conceito de polos dominantes, agora no domínio da frequência. Assim, considere dois sistemas de primeira ordem em cascata. O primeiro possui polo em $\lambda_1 = -50$, o segundo possui polo em $\lambda_2 = -1$. Em outras palavras, os sistemas são regidos pelas equações

$$\dot{z} - \lambda_1 z = u(t)$$

e

$$\dot{y} - \lambda_2 y = z(t).$$

Trace o diagrama de Bode de cada sistema.² O que ocorre se aproximarmos o primeiro sistema por um ganho?

6 Procedimento de cálculo da relação de amplitudes e defasagem

Para executar as medidas necessárias à identificação do sistema é preciso medir a relação de amplitudes entre entrada e saída senoidais e a defasagem entre esses dois sinais. Num ensaio experimental, sabemos que as medidas não serão exatas devido a imprecisões seja no sinal de entrada que está sendo injetado, seja na própria medida devido a imperfeições do medidor. É muito provável que esses sinais sejam imperfeitos devido a presença de ruídos, de interferências de diversas naturezas, de efeito de quantização dos sinais, etc. No ensaio que pretende-se executar, é possível que o resultado de observação de um sinal senoidal tenha semelhança com a curva plotada na Fig. 14.

Fazer medidas de amplitudes e defasagens entre sinais como os da Fig. 14 é evidentemente muito difícil, e uma vez que as medidas não iriam apresentar a precisão desejada. Para melhorar a qualidade das medidas, faremos um tratamento numérico desses sinais, de acordo com o diagrama da Fig. 15.

Considere um sistema linear e assintoticamente estável, com entrada

$$u(t) = A_0 \text{sen}(\omega t),$$

cujas saída é um sinal senoidal com ruído y que possa ser escrito na forma:

$$y(t) = \bar{y}(t) + e(t)$$

²Observe que a resposta em frequência da cascata é o produto das respostas.

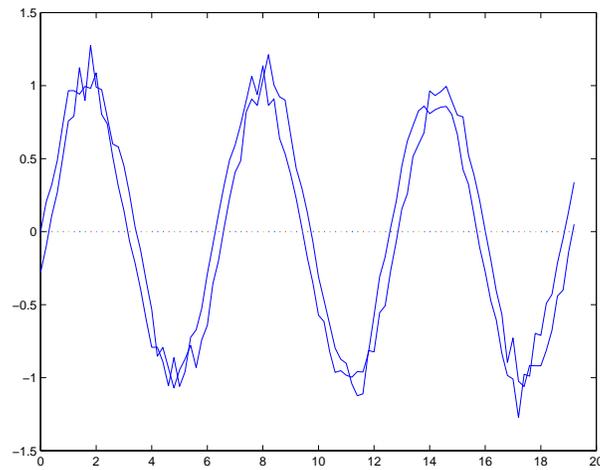


Figura 14: Sinais senoidais com ruído.

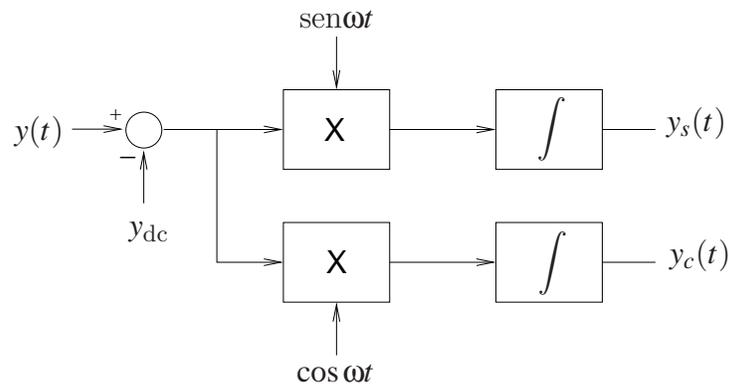


Figura 15: Tratamento de sinal senoidal y para obtenção da amplitude e fase.

onde $\bar{y}(t) = B_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$ é o sinal exato, e $e(t)$ é o sinal causador da imprecisão ou de ruído, isto é $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$. Segundo o diagrama da Fig. 15, para se eliminar os efeitos das imperfeições do sinal, procede-se como a seguir:

1. Considerando um número k de ciclos do sinal, extrai-se o valor médio (valor dc) do sinal $y(t)$, definindo-se

$$y_{dc} = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} y(t) dt = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} e(t) dt$$

Assim

$$y(t) - y_{dc} = B_0 \text{sen}(\omega t + \phi) + \bar{e}(t)$$

onde o sinal $\bar{e}(t)$ tem valor médio nulo.

2. Calcula-se agora a integral dos produtos do sinal e os sinais seno e cosseno de

frequência ω :

$$\begin{aligned} y_s\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) &= \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} [B_0 \text{sen}(\omega t + \phi) + \bar{e}(t)] \text{sen} \omega t \, dt \\ &= \frac{B_0}{2} \cos \phi - \frac{B_0 \omega}{4k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \cos(2\omega t + \phi) \, dt + \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \bar{e}(t) \text{sen} \omega t \, dt \end{aligned} \quad (14)$$

Analogamente,

$$y_c\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) = \frac{B_0}{2} \text{sen} \phi - \frac{B_0 \omega}{4k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \text{sen}(2\omega t + \phi) \, dt + \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^{2k\pi/\omega} \bar{e}(t) \cos \omega t \, dt \quad (15)$$

As expressões acima podem ser simplificadas após algumas considerações. Note que a segunda integral nas expressões (14) e (15) é nula e a terceira apresenta como integrando o produto de dois sinais de média nula (\bar{e} e seno ou cosseno), dividida pelo intervalo de integração, dado por $2k\pi/\omega$. Consequentemente o valor da última integral em (14) e (15) deve ser desprezível, o que nos permite expressar:

$$y_s\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) \approx \frac{B_0}{2} \cos \phi, \quad \text{e} \quad y_c\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) \approx \frac{B_0}{2} \text{sen} \phi \quad (16)$$

Podemos afirmar que estas aproximações serão mais precisas quanto maior for o intervalo de integração $2k\pi/\omega$, ou equivalentemente o número de ciclos. Com hipóteses gerais sobre o sinal aleatório $\bar{e}(t)$ ³ é possível concluir que a terceira integral em (14) e (15) tendem a zero quando k tende a infinito.

Das expressões em (16), podemos avaliar a relação de amplitudes A_r e a defasagem ϕ como

$$A_r = \frac{B_0}{A_0} = \frac{2\sqrt{y_s^2 + y_c^2}}{A_0}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y_c}{y_s}\right)$$

Para exemplificar e detalhar o procedimento a ser usado no laboratório, considere a observação típica do comportamento do sinal de excitação e de saída de um dos equipamentos do laboratório. A Fig. 16 mostra um destes ensaios, capturados graficamente através da opção do software **Data, Export Raw Data**.

Após o transitório inicial do sistema, ele entra em regime indicado pelo valor constante de amplitude da saída. Para fazermos o cálculo explicado anteriormente é preciso selecionar no segundo gráfico o início do que consideramos o comportamento de regime permanente senoidal, e um número inteiro de ciclos até o final do conjunto de dados. Isso é feito através do programa Matlab `manipula.m` com a seguinte entrada de dados:

■ `manipula`

```

Nome do arquivo com os dados (.txt)      > tor_f20.txt
Frequencia utilizada (em Hz)            > 2.0
Coluna de dados com o sinal de entrada  > 3

```

³ $t \rightarrow e(t)$ deve ser um processo ergódico.

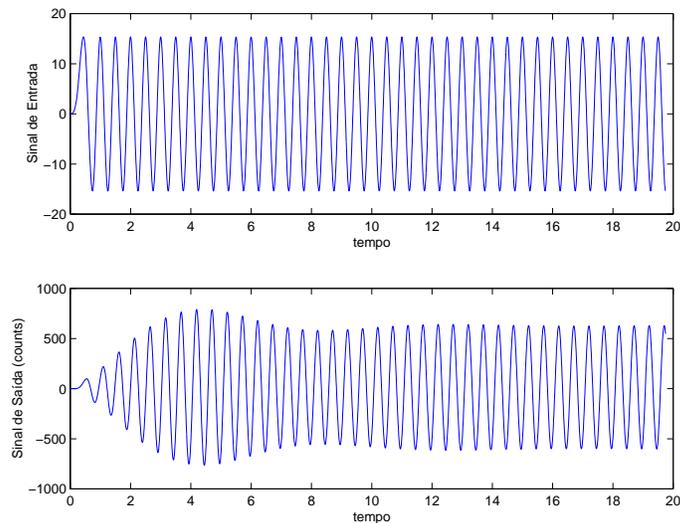


Figura 16: Sinais de entrada e de saída típicos de um sistema ECP.

```

Coluna de dados com o sinal de saída          :> 4
Nome do arquivo para guardar a frequência (f), a
fase (fi), a relação de amplitudes (Ar), e a
amplitude dos sinais de saída (Bo) (extensão .txt) :> meu_result.txt

```

Onde:

- `tor_f2_0.txt` é o nome do arquivo gravado com os dados do ensaio utilizando o recurso de **Export Raw Data** do software. As 3 linhas iniciais deste arquivo devem estar “comentadas” para uso do Matlab (símbolo `%` no início das linhas).

Importante: O nome do arquivo gravado deve fazer referência à frequência utilizada no ensaio, para uso no programa `compara.m`. No exemplo acima a frequência utilizada foi 2 Hz, especificada na segunda linha da entrada de dados.

- As colunas de dados de entrada/saída declaradas se referem às colunas do arquivo `tor_f20.txt`. Verifique a ordem definida no arquivo de dados do seu ensaio, ou seja, *anote as colunas com os sinais de entrada e de saída*.
- O arquivo `meu_result.txt`, nesse exemplo, irá guardar o resultado desejado de forma cumulativa, isto é, os dados de frequência f , relação de amplitude A_r , defasagem ϕ e amplitude de saída B_0 serão gravados nesse arquivo numa nova linha, se o arquivo existir; caso contrário, cria-se o arquivo e grava-se os dados. O nome utilizado pode ser qualquer, com extensão `txt`.

Os dados carregados são passados para uma função Matlab chamada `defasagem.m`, que apresenta a seguinte estrutura de chamada:

```
[fi,Ar,Bo]=defasagem(A,f,ce,cs)
```

A é o nome do arquivo de dados já presentes no *workspace* do Matlab, f, ce e cs são respectivamente, as frequências dos sinais, e as colunas dos sinais de entrada e saída. Retorna então os dados de defasagem, relação de amplitudes e o valor de amplitude de saída a partir da realização do cálculo esquematizado na Fig. 15.

Para a comparação e verificação de consistência dos resultados obtidos com a resposta temporal e a resposta freqüencial, os diagramas de Bode devem ser construídos. Para sobrepor os resultados graficamente utilize a rotina `compara.m` da seguinte maneira:

1. Utilizando os valores dos parâmetros obtidos anteriormente através da resposta temporal, construa a função de transferência apropriada para o ensaio através do comando `tf`. Suponha que o nome dado seja `g1`.
2. Supondo que `g1` esteja disponível no *workspace* do Matlab, utilize o programa `compara.m` da seguinte forma:

■ `compara`

```
Entre com a fun\c{c}\~{a}o de transfer\^{e}ncia do sistema,
ela j\^{a} deve estar dispon\^{i}vel utilizando o comando "tf",
verifique se o ensaio foi feito com ou sem controle.
Nome da fun\c{c}\~{a}o de transfer\^{e}ncia pr\^{e}-definida    :> g1
Nome do arquivo onde est\~{a}o os valores de freq\^{u}\^{e}ncia (f), fase (fi),
e rela\c{c}\~{a}o de amplitudes (Ar) (extens\~{a}o .txt)    :> meu_result.txt
Freq\^{u}\^{e}ncias m\^{i}nima e m\^{a}xima para os diagramas de Bode.
Entre com fmin na forma fmin=10^n1 [Hz]    :> 0.1
Entre com fmax na forma fmin=10^n2 [Hz]    :> 10
```

A figura com o diagrama de Bode correspondente será criada. Se os resultados estiverem adequados, o resultado deve ser parecido com o da Fig. 17. O Matlab não determina corretamente a fase de sistemas de fase não-mínima, e a rotina `compara_pendulo.m` é específica para o pêndulo que tem essa característica.

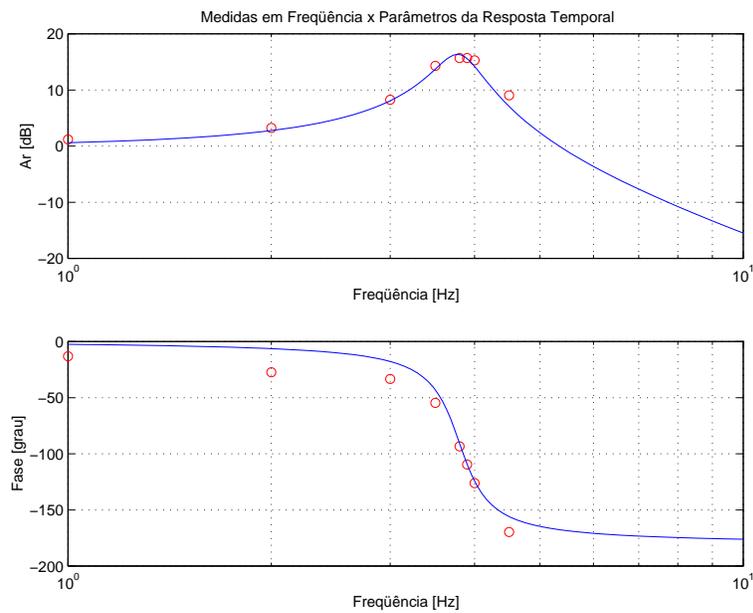


Figura 17: Resultado comparado do experimentos: resposta temporal e resposta em frequência.

Referências

- [1] Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*, 2a. Edição, Prentice-Hall do Brasil, 1993.
- [2] Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A., *Feedback Control of Dynamic Systems*, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1990.
- [3] Soderström, T., Stoica, P., *System Identification*, Prentice Hall, 1987.
- [4] Manual for Model 220 – Industrial Emulator/Servo Trainer, ECP, 1995.
- [5] Manual for Model 210/210a – Rectilinear Control System, ECP, 1998.
- [6] Manual for Model 205/205a – Torcional Control System, ECP, 1997
- [7] Manual for Model 505 – Inverted Pendulum, ECP, 1994.
- [8] Manual for Model 730 – Magnetic Levitation System, ECP, 1999.