



Experiência 6: Amostragem de Sinais Contínuos

28 de maio de 2012

Sumário

1	Introdução	2
2	Série de Fourier	2
2.1	Série de Fourier Trigonométrica	3
2.2	Série de Fourier Exponencial	3
2.3	Transformada de Fourier	4
3	A Amostragem de Sinais	5
4	Convolução e Função Impulso	7
5	Teorema da Amostragem	8
6	Sinais de Banda Ilimitada	11
7	Filtragem	11
7.1	Segurador de Ordem Zero	13
7.2	Filtro Passa-Baixa de 2a. Ordem	15
8	Experimentos	18
8.1	Sistema Retilíneo	19
8.1.1	Procedimento Experimental para o Sistema Retilíneo	21
8.2	Sistema Torcional	22
8.2.1	Procedimento Experimental para o Sistema Torcional	23
8.3	Emulador Industrial	24
8.3.1	Procedimento Experimental para o Emulador Industrial	25
8.4	Pêndulo Invertido	27
8.4.1	Procedimento Experimental para o Pêndulo	28
8.5	Levitador Magnético	29
8.5.1	Procedimento Experimental para o Levitador	30

1 Introdução

No contexto de comunicações e controle, amostrar um sinal contínuo $f(t)$ significa substituir o sinal por seus valores num conjunto discreto de pontos, ou seja, substituir $f(t)$ por $f(t_k)$, onde k pertence ao conjunto dos inteiros.

Quando os instantes de amostragem são igualmente espaçados, isto é, $t_k = kT$, a amostragem é chamada **periódica**, com período T . A frequência correspondente $f_s = 1/T$ é chamada **frequência de amostragem**.

Nesta experiência, apresenta-se a descrição matemática do processo de amostragem, que conduz ao célebre Teorema de Shannon, que trata da frequência mínima de amostragem. Alguns filtros, que têm por objetivo reconstruir o sinal contínuo $f(t)$ a partir da sequência de números $\{f(kT)\}$, são também apresentados.

2 Série de Fourier

Seja $f(t)$ uma função real da variável real t (associada com o tempo), contínua por partes em qualquer intervalo finito e periódica, com período T .

Exemplo 1 - Considere a função periódica *trem de pulsos*, descrita no primeiro período, $0 < t \leq T$, por:

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq \frac{\delta}{2}, \text{ e } T - \frac{\delta}{2} < t \leq T \\ 0, & \frac{\delta}{2} < t < T - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

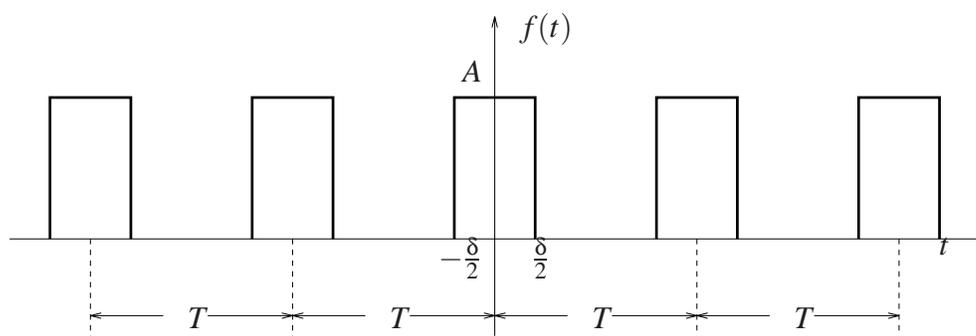


Figura 1: Trem de Pulsos

Funções com as propriedades descritas acima podem ser expandidas em uma soma infinita de termos em senos e cossenos ou de exponenciais, chamada de **Série de Fourier**.

2.1 Série de Fourier Trigonométrica

Uma função $f(t)$ periódica, com período $T = 2\pi/\omega_0$, contínua por partes, pode ser representada em termos de funções $\cos(n\omega_0 t)$ e $\sin(n\omega_0 t)$, n inteiro, da seguinte maneira:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (1)$$

onde (t_0 arbitrário)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

2.2 Série de Fourier Exponencial

Uma forma mais interessante de representação da função $f(t)$ é obtida em termos da soma de exponenciais $\exp(jn\omega_0 t)$, n inteiro:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(jn\omega_0 t) \quad (2)$$

onde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt \quad (3)$$

e $\exp(jn\omega_0 t) = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)$.

Pode-se mostrar que os coeficientes das séries de Fourier trigonométrica e exponencial estão relacionados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= F_0 \\ a_n &= F_n + F_{-n} \\ b_n &= j(F_n - F_{-n}) \\ F_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \end{aligned}$$

A expressão (2) fornece a representação de uma função real periódica em termos de funções exponenciais de “frequências” $0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \dots$, etc. Note que $\exp(jn\omega_0 t)$ e $\exp(-jn\omega_0 t)$ podem ser considerados *fasores* com fases definidas por $\pm n\omega_0 t$ que giram em sentidos opostos, e que somados fornecem uma função real de t , ou seja,

$$\exp(jn\omega_0 t) + \exp(-jn\omega_0 t) = 2 \cos(n\omega_0 t)$$

O coeficiente F_n representa a componente de frequência $n\omega_0$ existente na função $f(t)$. Este coeficiente é em geral um número complexo, podendo portanto ser descrito por sua magnitude e sua fase. As magnitudes e fases dos coeficientes F_n constituem, respectivamente, o espectro de magnitudes e o espectro de fases da representação frequencial da função real periódica $f(t)$.

Exemplo 2 - Considere a função periódica trem de pulsos do Exemplo 1. Da equação (3), tem-se

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} A \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{A\delta}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0\delta/2)}{(n\omega_0\delta/2)} \right]$$

Observe que $F_n = F_{-n}$ e que, portanto, $b_n = 0$, $a_0 = A\delta/T$ e $a_n = 2F_n$. Assim,

$$f(t) = \frac{A\delta}{T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega_0 t)$$

Note que F_n é real; seu espectro de magnitudes é mostrado na Fig. 2, para $\delta = 1/20, A = 5$ e $T = 1/4$. A envoltória em pontilhado corresponde à função $\sin(x)/x$.

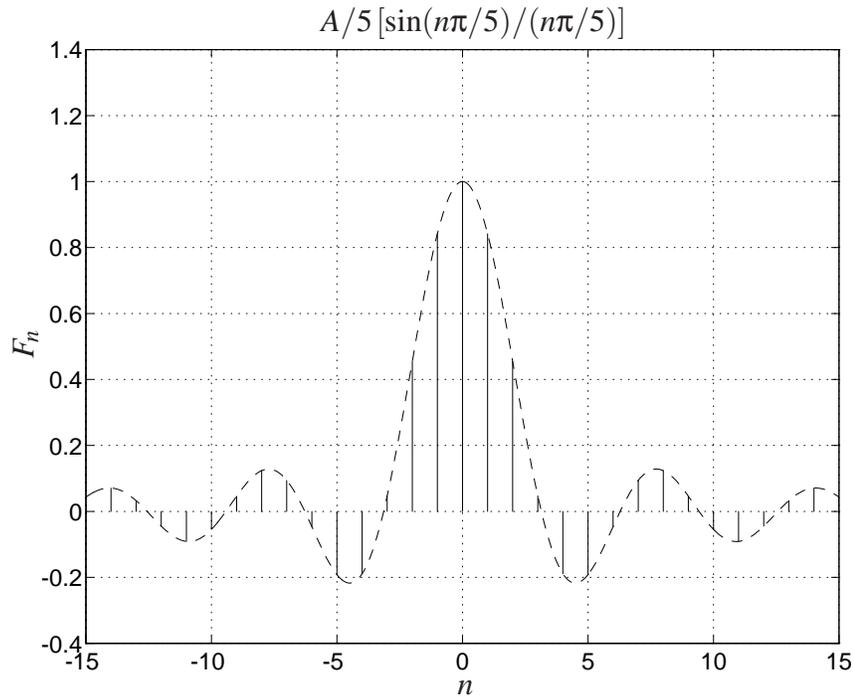


Figura 2: Espectro de magnitudes para $A = 5$.

2.3 Transformada de Fourier

Considere agora o problema de representação de uma função $f(t)$, contínua por partes, periódica ou não, em termos de funções exponenciais. Suponha que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Pode-se mostrar, neste caso, que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (4)$$

onde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (5)$$

A equação (4) corresponde à representação de $f(t)$ como uma soma contínua de funções exponenciais com frequências no intervalo $\omega \in [-\infty, +\infty]$.

A função $F(\omega)$ representa o espectro de frequências de $f(t)$ e é chamada **Função Densidade Espectral**. $F(\omega)$ corresponde à representação da função $f(t)$ no domínio frequencial. Note que na série de Fourier, o espectro de frequências existe somente nos pontos $\omega_n = n\omega_0$. Aqui, o espectro de frequências é definido para todos os valores de ω .

A equação (5) é conhecida como a Transformada de Fourier de $f(t)$ e a equação (4) como a Transformada Inversa de $F(\omega)$. Em geral, a função $F(\omega)$ é complexa, podendo portanto ser representada por sua magnitude $|F(\omega)|$ e sua fase $\Theta(\omega)$, ou seja,

$$F(\omega) = |F(\omega)| \exp(j\Theta(\omega))$$

Exemplo 3 - Seja a função exponencial

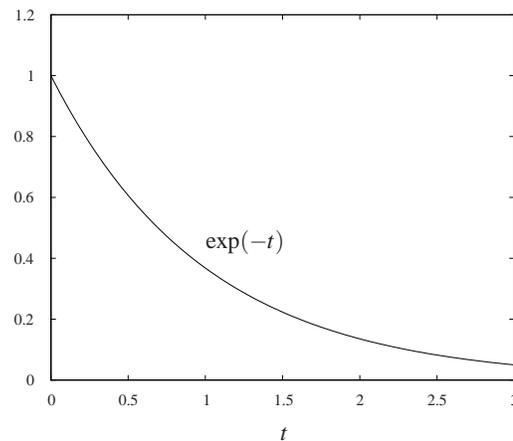


Figura 3: Função $f(t) = \exp(-t), t > 0$.

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , a > 0 , t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Daí,

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} \exp[-(a + j\omega)t] dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

Portanto

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \approx \frac{1}{\omega} , \omega \gg a ; \quad \Theta(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Na Fig. 4 estão traçados $|F(\omega)|$ e $\Theta(\omega)$. Note que as abcissas das figuras estão representando o eixo imaginário no plano complexo $s = \sigma + j\omega$; assim, os valores negativos no semi-eixo $\omega < 0$ representam o conjugado $\sigma - j\omega$, com $\sigma \equiv 0$.

3 A Amostragem de Sinais

O dispositivo que realiza a operação de amostragem é chamado **amostrador**. Basicamente, o amostrador converte um sinal contínuo num trem de pulsos modulados em amplitude.

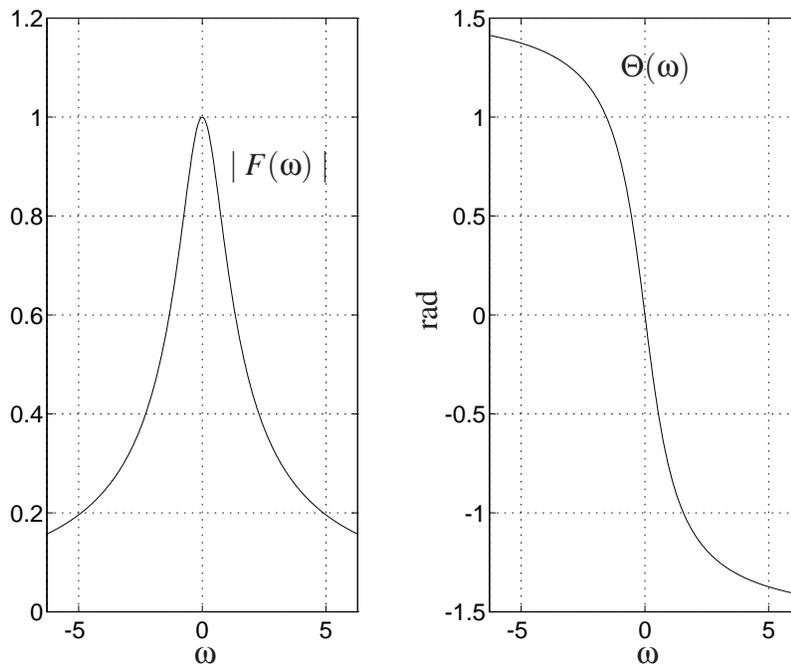


Figura 4: Módulo e fase de $F(\omega)$ - Exemplo 3.

A Fig. 5 mostra a representação simbólica de um amostrador periódico com período T e duração de amostragem igual a Δ . O intervalo de tempo Δ é aquele durante o qual a chave é fechada e o sinal $f(t)$ é rastreado. A saída do amostrador $f^*(t)$ é um trem de pulsos de largura Δ , cujas amplitudes são moduladas pelo sinal contínuo $f(t)$.

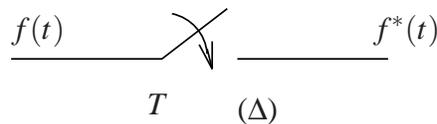


Figura 5: Processo de Amostragem.

A Fig. 6 mostra a representação simbólica do amostrador como um modulador de amplitude de pulsos. A saída do modulador $f^*(t)$ é igual ao produto $f(t)p(t)$, onde $p(t)$ é um trem de pulsos com período T e amplitude unitária, isto é

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT) - u(t - kT - \Delta), \quad \Delta < T \quad (6)$$

e $u(t)$ é a função degrau unitário.

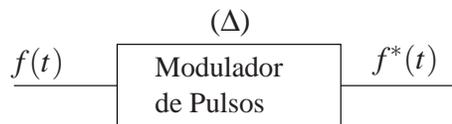


Figura 6: Amostrador em representação simbólica.

A Fig. 7 mostra formas de sinal típicas para $f(t)$, $p(t)$ e $f^*(t)$:

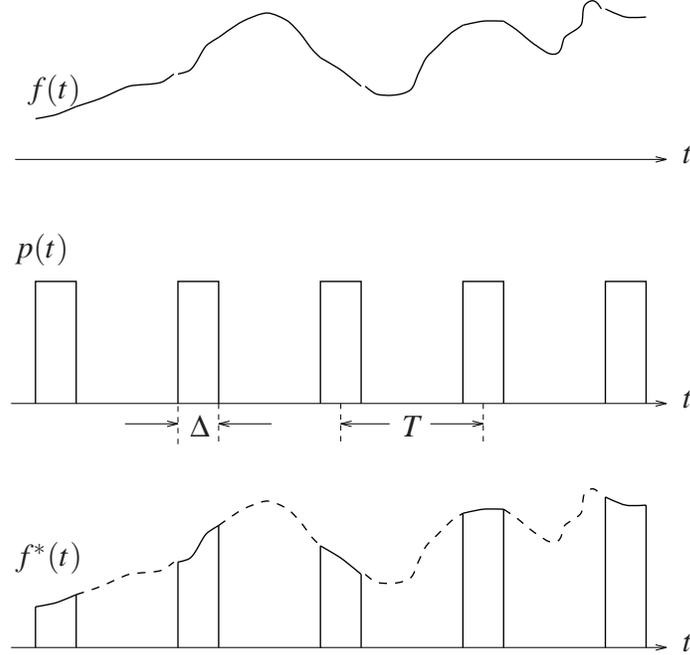


Figura 7: Sinal $f(t)$ e sinal amostrado.

4 Convolução e Função Impulso

Considere $f_1(t)$ e $f_2(t)$ duas funções contínuas da variável real t , e também a integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

A integral (7) define a **convolução** entre duas funções, e é representada simbolicamente por

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (8)$$

A convolução induz duas propriedades importantes apresentadas a seguir. Para facilitar a exposição, considere a notação

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad (9)$$

identificando a função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(\omega)$ (obviamente, $f(t)$ é a transformada inversa de $F(\omega)$).

Propriedade 1 - Convolução no domínio do tempo: se

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \quad ; \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega) \quad (10)$$

então

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (11)$$

Propriedade 2 - Convolução no domínio da frequência: se a relação (10) vale, então

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \quad (12)$$

A propriedade 1 afirma que a convolução de duas funções no domínio do tempo equivale à multiplicação das respectivas transformadas de Fourier no domínio da frequência. A propriedade 2 é simétrica em relação à propriedade 1.

Considere agora a seguinte função pulso:

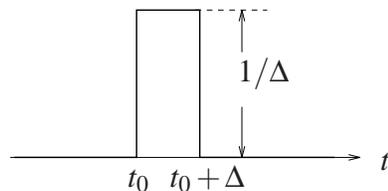


Figura 8: Pulso de área unitária.

$$\delta_{\Delta}(t-t_0) = \begin{cases} 0 & , t < t_0 \\ 1/\Delta & , t_0 \leq t < t_0 + \Delta \\ 0 & , t \geq t_0 + \Delta \end{cases} \quad (13)$$

Note que $\delta_{\Delta}(t-t_0)$ tem área unitária para qualquer valor de Δ . Quando Δ se aproxima de zero, a *função limite*

$$\delta(t-t_0) \triangleq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t-t_0) \quad (14)$$

é chamada de **função impulso**. Esta função possui a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (15)$$

e, se $f(t)$ é contínua em t ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (16)$$

Da expressão (16), pode-se concluir que a transformada de Fourier da função impulso é 1, ou seja

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1 \quad (17)$$

Considere agora $f(t)$ uma função contínua. De (16), obtém-se

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (18)$$

ou seja, a convolução de uma função contínua $f(t)$ com a função impulso $\delta(t)$ reproduz a própria função $f(t)$. Em outras palavras, o impulso é o elemento neutro da convolução.

5 Teorema da Amostragem

Suponha que a duração da amostragem é desprezível em relação ao período de amostragem T . Nesse caso, o amostrador pode ser aproximado por um **amostrador ideal**, que é aquele que

abre/fecha instantaneamente a cada T segundos. Nessas circunstâncias, o trem de pulsos $p(t)$ é substituído por um trem de impulsos

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (19)$$

Se $f(t)$ é contínua, então

$$f(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - kT)dt \quad (20)$$

A Fig. 9 ilustra a amostragem feita por um trem de impulsos.

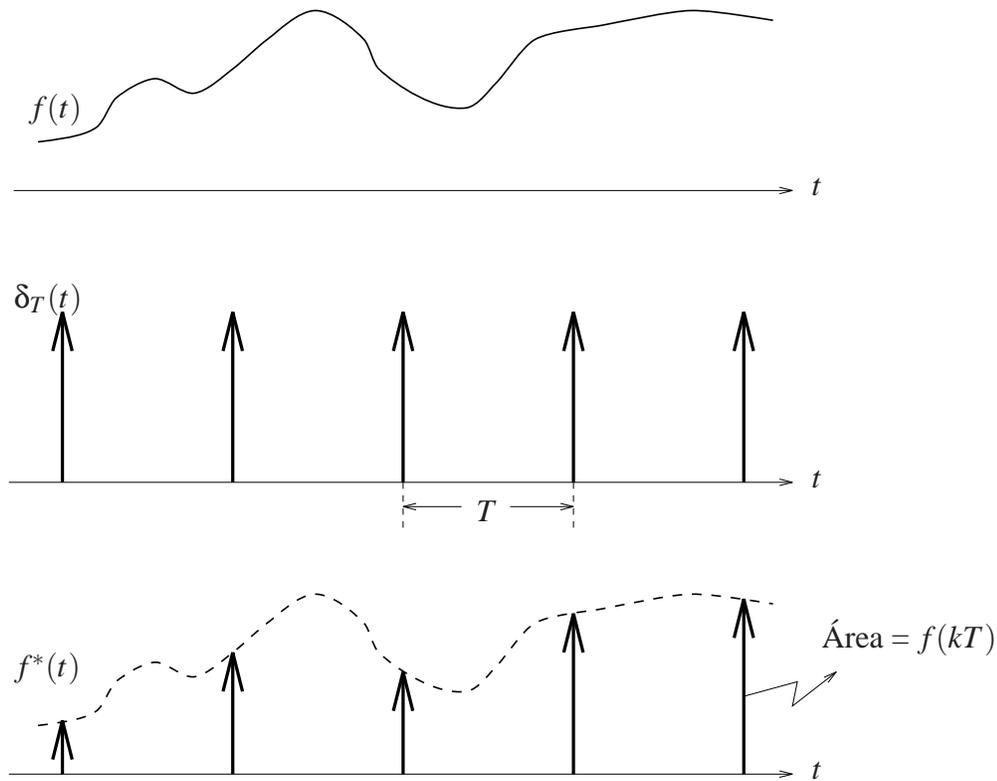


Figura 9: Amostragem por trem de impulsos.

Teorema 1 - Teorema da Amostragem

Uma função contínua $f(t)$ com transformada de Fourier $F(\omega)$, tal que $F(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$, é unicamente determinada por seus valores em intervalos uniformes de tempo T tais que

$$T \leq \frac{1}{2f_m} \quad ; \quad f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \quad (21)$$

Esboço da prova:

Seja $F(\omega)$ a transformada de Fourier de $f(t)$ tal que $F(\omega) = 0$, para $|\omega| \geq \omega_m$

A função $f(t)$ é amostrada a cada T segundos, usando-se o trem de impulsos $\delta_T(t)$ dado por (19). Seja $\omega_s = 2\pi/T$. A transformada de Fourier de $\delta_T(t)$ é dada por

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) \quad (22)$$

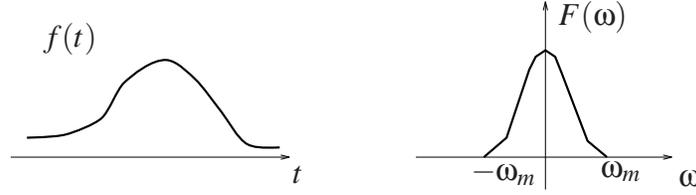


Figura 10: Função $f(t)$ e seu espectro $F(\omega)$.

onde

$$\delta\omega_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (23)$$

Note que $\delta\omega_s$ é um trem de impulsos (em frequência) com período ω_s (veja Fig. 11).

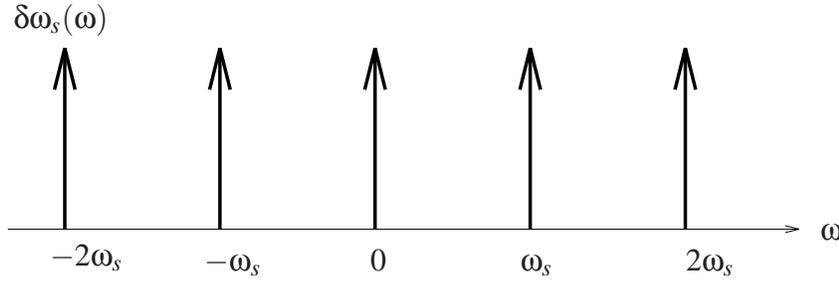


Figura 11: Trem de impulsos com período ω_s .

Seja $f^*(t)$ a função $f(t)$ amostrada a cada T segundos. Então,

$$f^*(t) = f(t) \delta_T(t) \quad (24)$$

Pela propriedade 2 da convolução (12), tem-se

$$f^*(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_s \delta\omega_s(\omega)] = F_s(\omega) \quad (25)$$

Desenvolvendo,

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \left[F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \quad (26)$$

e portanto

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (27)$$

A Fig. 12 mostra $f^*(t)$ e sua transformada de Fourier $F_s(\omega)$.

Note que a função $F(\omega)$ se repete periodicamente a cada ω_s rad/s, e que a repetição se dá sem sobreposição se

$$\omega_s \geq 2\omega_m \quad \text{ou seja,} \quad T \leq \frac{1}{2f_m} \quad (28)$$

Portanto, se a função $f(t)$ é amostrada com período $T \leq 1/2f_m$, o espectro $F(\omega)$ pode ser recuperado a partir de $F_s(\omega)$, usando-se um filtro passa-baixa, como indicado na Fig. 12.

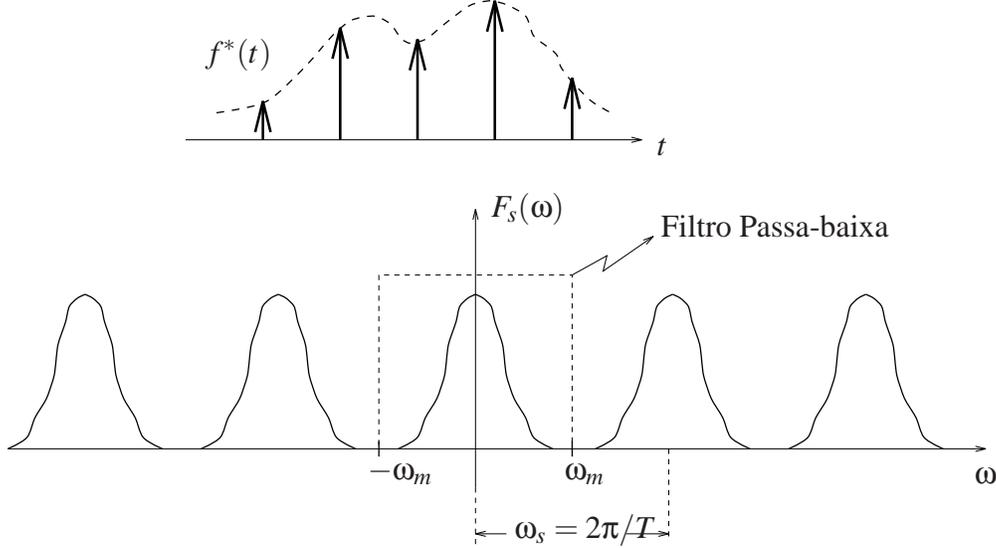


Figura 12: Função $f(t)$ e sua transformada.

6 Sinais de Banda Ilimitada

Sinais de banda limitada não existem na prática. Pode-se mostrar que se $F(\omega) = 0$ para $|j\omega| \geq \omega_m$, então a transformada inversa $f(t)$ existe para todos os instantes de tempo t negativos, concluindo-se daí que um sinal de banda limitada existe no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Reciprocamente, um sinal $f(t)$ que só existe para $t \geq 0$ não pode ter banda limitada.

Portanto, uma superposição de espectros sempre existe, mas para todos os sinais de importância prática, $|F(\omega)|$ diminui com o aumento da frequência ω e a maior parte da informação está contida num certo intervalo de frequências. O erro ao se ignorar frequências acima de um certo valor é desprezível.

Considere um sinal qualquer, de banda ilimitada (ou seja, não existe ω_m tal que $F(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$). Suponha que o sinal $f(t)$ seja amostrado com uma frequência $\omega_s = 2\omega_0$, onde ω_0 é uma frequência tal que $|F(\omega)|$ é desprezível para $|j\omega| \geq \omega_0$. A Fig. 13 mostra o espectro $F(\omega)$ e o espectro do sinal amostrado $F_s(\omega)$.

Note que a superposição de espectros ocorre de fato. Recuperando-se o sinal $f(t)$ através de um filtro passa-baixa, frequências que estavam originalmente fora da banda limitada por ω_0 aparecem na saída do filtro, contribuindo em frequências mais baixas. Por exemplo, a componente de frequência $\omega_0 + \Delta$ aparece como uma componente de frequência $\omega_0 - \Delta$. Essa situação não é desejável, e para se evitar esse efeito, é comum fazer primeiro uma pré-filtragem de $F(\omega)$, para se eliminar as contribuições nas frequências ω tais que $|j\omega| > \omega_0$, e somente então se realizar a amostragem.

7 Filtragem

O objetivo aqui é determinar a função de transferência de um filtro ideal com frequência de corte ω_m , como indicado na Fig. 12. A Fig. 14 a seguir mostra a representação simbólica do filtro, o sinal amostrado na entrada $f^*(t)$, a saída $c(t)$ e suas respectivas transformadas.

Em geral, um sinal transmitido através de um filtro sofre um atraso no tempo. Diz-se que o sinal obtido na saída do filtro não apresenta distorção se $c(t) = f(t - t_0)$, ou seja, obtém-se

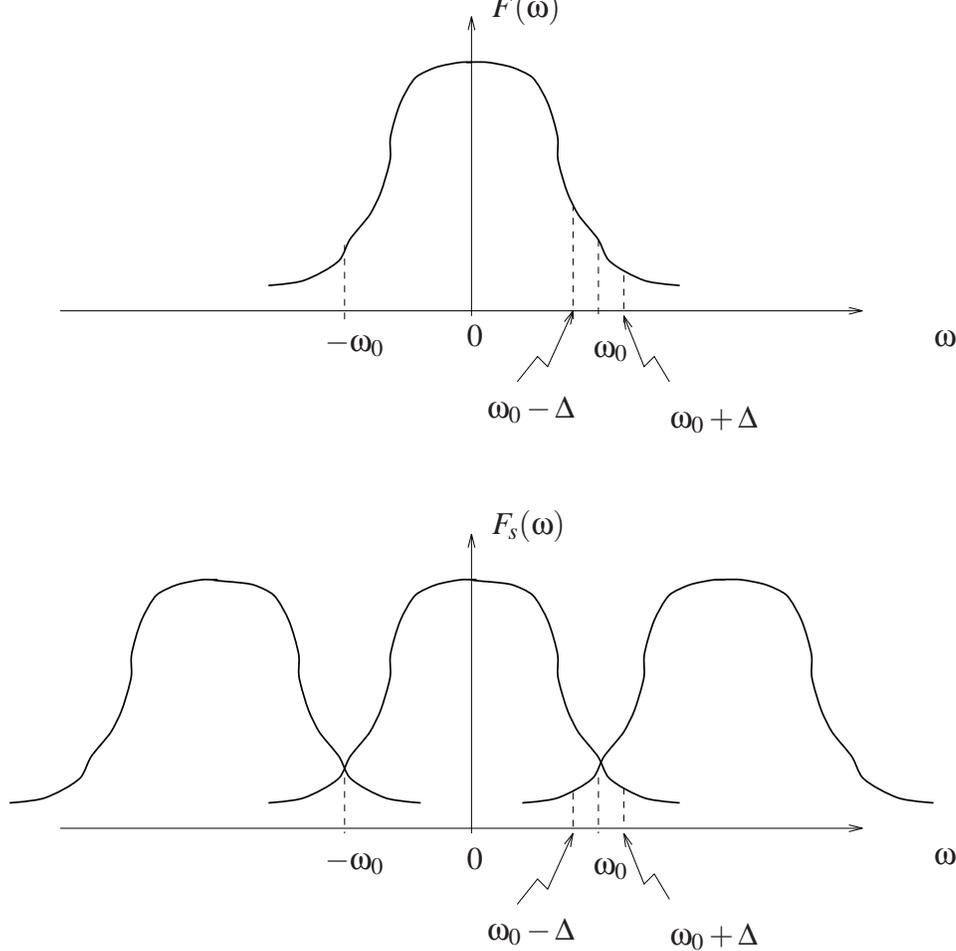


Figura 13: Espectro $F(\omega)$ e $F_s(\omega)$.

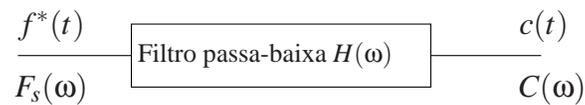


Figura 14: Representação simbólica do filtro.

o próprio sinal $f(t)$ com um atraso de t_0 . Como

$$C(\omega) = H(\omega)F_s(\omega) \quad (29)$$

então fazendo

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp[j\Theta(\omega)] \quad , \quad \Theta(\omega) = -\omega t_0 \quad (30)$$

com

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (31)$$

obtem-se

$$C(\omega) = F_s(\omega) \exp(-j\omega t_0) \quad (32)$$

A função de transferência $H(\omega) = |H(\omega)| \exp[j\Theta(\omega)]$ é mostrada na Fig. 15.

Seja $h(t)$ a resposta ao impulso do filtro passa-baixa $H(\omega)$ da Fig. 15.

Pode-se mostrar que

$$h(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \left[\frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega(t - t_0)} \right] \quad (33)$$

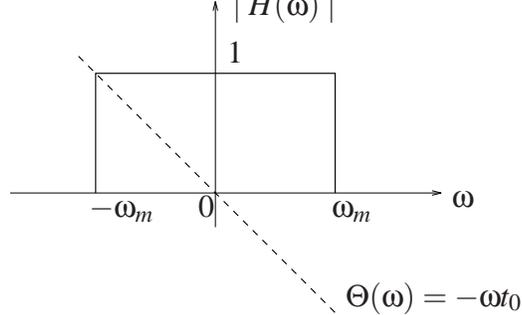


Figura 15: Função de transferência do filtro.

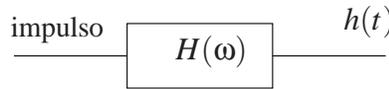


Figura 16: Resposta ao impulso do filtro.

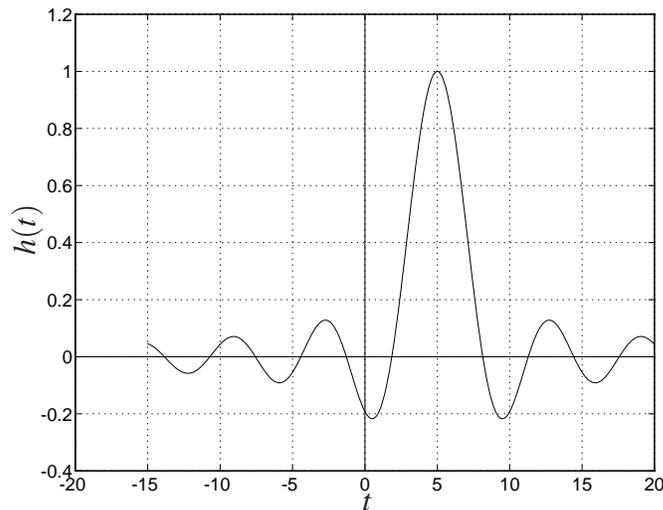


Figura 17: Resposta ao impulso do filtro ($t_0 = 5$).

Note que $h(t)$ existe para valores negativos de t , um resultado bastante estranho levando-se em conta que o impulso foi aplicado no instante $t = 0$. Na prática, um filtro com as características dadas por (31) não pode ser construído. Constrõem-se filtros com características aproximadas das do filtro ideal. A seguir, dois tipos de filtro são apresentados.

7.1 Segurador de Ordem Zero

Esse tipo de filtro é muito usado em sistemas controlados por computador.

Considere a seqüência de números $\{f(kT)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, correspondente ao sinal $f(t)$ amostrado a cada T segundos. Deseja-se reconstruir $f(t)$, $t \geq 0$, a partir das amostras disponíveis até o instante t . Ou seja, o sinal $f(t)$ entre duas amostras consecutivas nos instantes kT e $(k+1)T$ deve ser estimado usando-se $f(kT)$, $f((k-1)T)$, \dots , $f(0)$.

Supondo que $f(t)$ possui derivadas até ordem n , pode-se estimar $f(t)$ no intervalo $kT \leq$

$t < (k+1)T$ através da série de Taylor

$$f_k(t) \simeq f(kT) + f^{(1)}(kT)(t - kT) + \dots + \frac{f^{(n)}(kT)}{n!}(t - kT)^n \quad (34)$$

onde

$$f^{(n)}(kT) = \left. \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right|_{t=kT} \quad (35)$$

Um valor aproximado para a primeira derivada de $f(t)$ é dado por

$$f^{(1)}(kT) = \frac{1}{T} \{f(kT) - f[(k-1)T]\} \quad (36)$$

e, analogamente, para a segunda derivada de $f(t)$

$$f^{(2)}(kT) = \frac{1}{T^2} \{f(kT) - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T]\} \quad (37)$$

Analisando-se somente o primeiro termo da série (34), conclui-se que o polinômio que extrapola o valor de $f(t)$ no intervalo $kT \leq t < (k+1)T$ é de ordem zero. O dispositivo que mantém o sinal constante no intervalo de duração T , ou seja,

$$f_k(t) = f(kT) \quad , \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (38)$$

é chamado de **segurador de ordem zero**. A relação (38) define a resposta ao impulso do segurador de ordem zero, que é mostrada na Fig. 18.

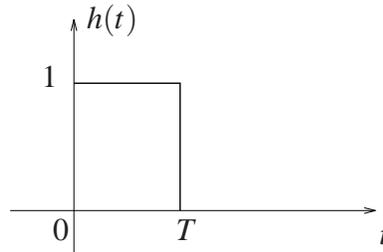


Figura 18: Resposta ao impulso do segurador de ordem zero.

A Fig. 19 mostra sinais típicos de entrada e saída do segurador de ordem zero.

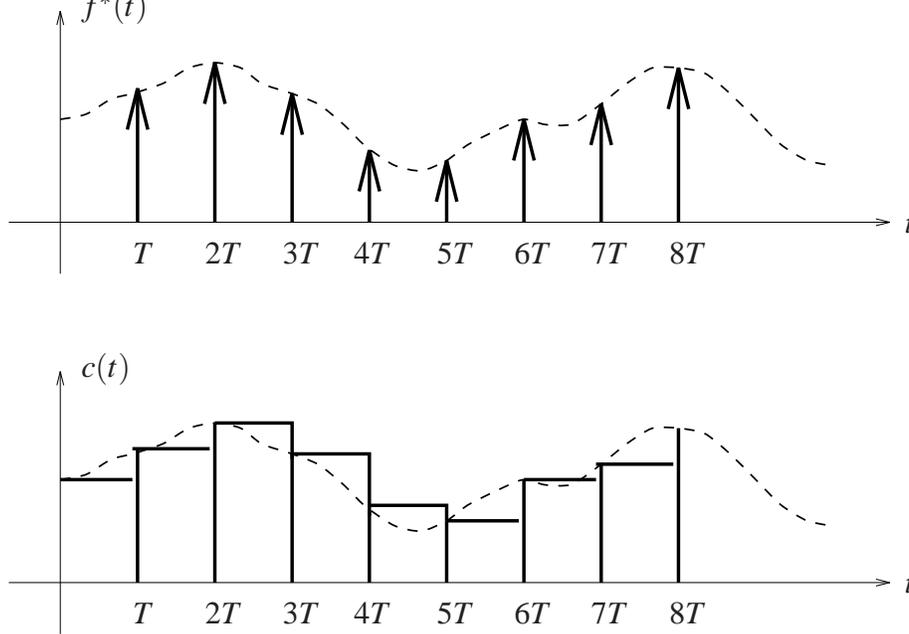


Figura 19: Sinais de entrada e saída do segurador de ordem zero.

Ainda na Fig. 18, segue-se que a resposta ao impulso do segurador de ordem zero é dada por

$$h(t) = u(t) - u(t - T) \quad (39)$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário. A função de transferência do segurador de ordem zero é dada pela transformada de Fourier de $h(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{j\omega} = \exp(-j\omega T/2) \left(\frac{\exp(j\omega T/2) - \exp(-j\omega T/2)}{j\omega} \right) \\ &= \frac{T \sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \exp(-j\omega T/2) \end{aligned} \quad (40)$$

Mas $T = 2\pi/\omega_s$, onde ω_s é a frequência de amostragem em rad/s. Então,

$$H(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \left[\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{(\pi\omega/\omega_s)} \right] \exp(-j\pi\omega/\omega_s) \quad (41)$$

As características de amplitude e fase do segurador de ordem zero são mostradas na Fig. 20.

Note que o segurador de ordem zero comporta-se essencialmente como um filtro passa-baixa. Comparado com um filtro ideal, ao invés de cortar bruscamente em $\omega_s/2$, o ganho é zero em $\omega = \omega_s$ e $|G(\omega)| = 0.636$ para $\omega = \omega_s/2$. A precisão do segurador de ordem zero como dispositivo extrapolador depende bastante da frequência de amostragem, como pode ser visualizado na Fig. 19.

7.2 Filtro Passa-Baixa de 2a. Ordem

Considere o filtro passa-baixa mostrado na Fig. 21.

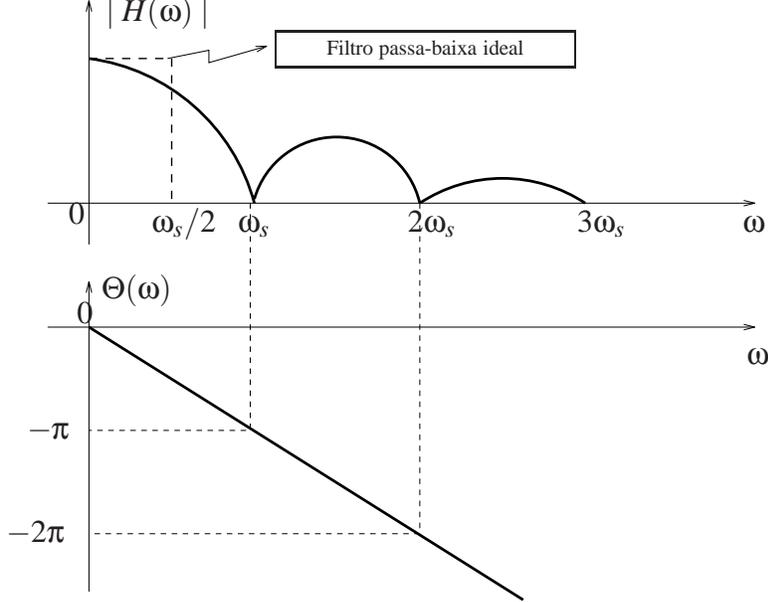


Figura 20: Amplitude e fase do segurador de ordem zero.

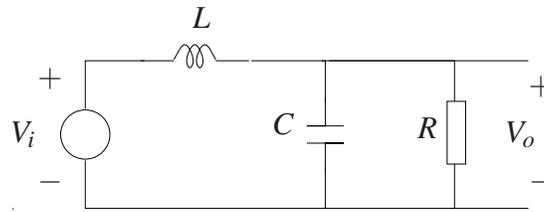


Figura 21: Filtro de segunda ordem RLC .

A função de transferência do filtro é dada por

$$H(\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega L/R + 1} = \frac{1/LC}{-\omega^2 + j\omega/RC + 1/LC} \quad (42)$$

Do denominador de (42), colocado na forma padrão para um sistema de segunda ordem, vem

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \xi = \frac{1}{2R} \sqrt{L/C} \quad (43)$$

Fazendo $R = \sqrt{L/C}$, obtém-se

$$\xi = 1/2 \quad ; \quad \left| H(\omega) \right|_{\omega=\omega_n} = 1 \quad (44)$$

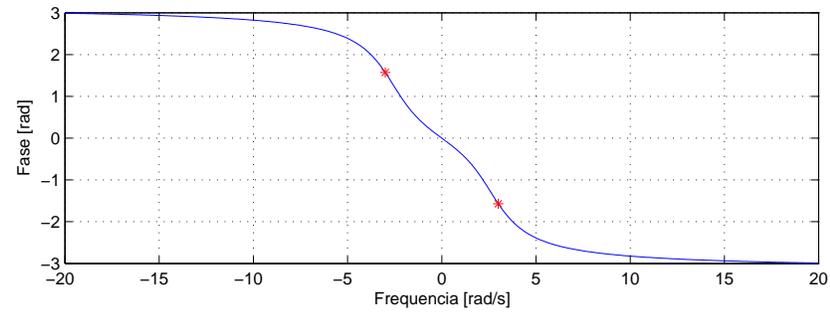
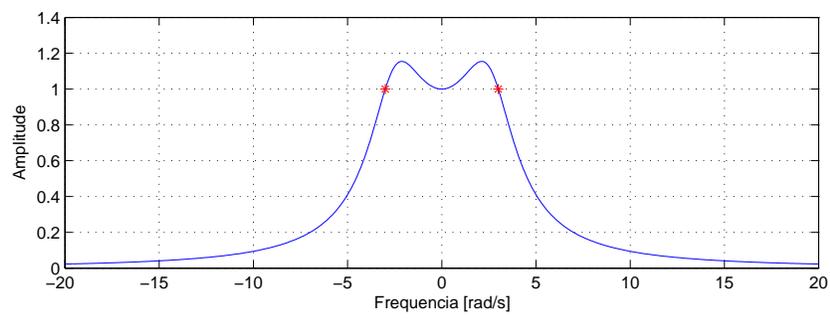
e

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_n + \omega_n^2} \quad (45)$$

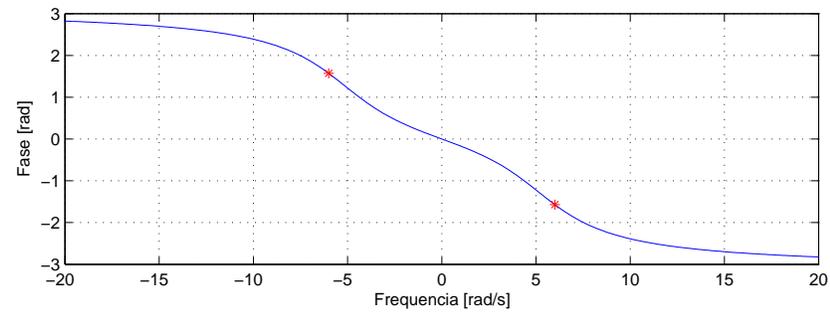
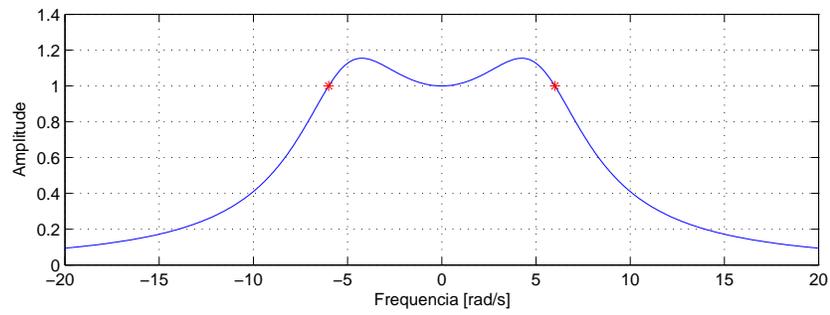
A transformada inversa de $H(\omega)$, que é a resposta ao impulso do filtro, é dada por

$$h(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega_n \exp(-\omega_n t/2) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t\right) \quad (46)$$

As Figs. 22 (a) e (b) mostram as características de amplitude e de fase de $H(\omega)$, e a Fig. 23 mostra as respostas impulsivas $h(t)$.



(a) $\omega_n = 3$



(b) $\omega_n = 6$

Figura 22: Características de Resposta em Freqüência do Filtro *RLC*.

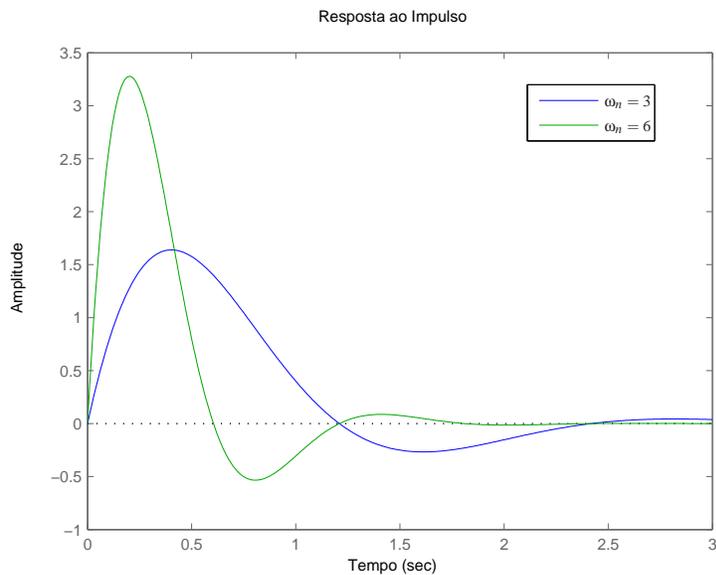


Figura 23: Resposta ao Impulso dos Filtros *RLC*.

Note que a resposta ao impulso é semelhante à resposta ao impulso do filtro ideal, porém inicia-se em $t = 0$.

8 Experimentos

O objetivo desta experiência é ilustrar a validade do teorema da amostragem procedendo-se a filtragem de um sinal amostrado através de um sistema mecânico cuja dinâmica é ajustada para aproximá-lo de um filtro ideal.

Conforme visto na experiência anterior, um sistema de 2ª ordem com $\xi = 1/2$ se comporta aproximadamente como um filtro passa-baixas com frequência de corte igual à frequência natural do sistema ω_n . Cada um dos sistemas mecânicos ECP pode ser configurado desta maneira, com a ajuda de controladores do tipo PD, e ser utilizado como filtro passa-baixas (FPB).

A idéia central desta experiência pode ser resumida como segue. Inicialmente gera-se um sinal com composição espectral limitada em frequência¹. O sinal é então amostrado com uma certa taxa de amostragem e armazenado num arquivo com extensão “.trj” o qual pode ser utilizado como sinal de referência para os sistemas ECP (através da opção “user defined” no menu “trajectory”). Finalmente uma filtragem será realizada pelos sistemas mecânicos ECP configurados como sistemas de segunda ordem, visando recuperar o sinal original. Duas questões relativas a este problema surgem. É possível recuperar o sinal original a partir das amostras? Se sim, como? O teorema da amostragem estabelece condições para que este tipo de sinal possa ser amostrado sem que haja perda de informação. De acordo com os resultados teóricos apresentados na experiência anterior, isto ocorrerá somente se duas condições se verificarem:

¹Sabe-se que um sinal limitado no tempo é necessariamente ilimitado no domínio da frequência. Contudo é possível que o espectro deste sinal seja aproximadamente limitado (isto é, desprezível para frequências acima de um certo valor) e que seu limite superior seja conhecido.

- O sinal original for amostrado numa frequência f_s superior ao dobro do limitante superior de seu conteúdo espectral f_0 , ou seja, $f_s > 2f_0$;
- O sinal amostrado for filtrado por um FPB (realizado por um sistema ECP) cuja frequência de corte f_n seja delimitada por: $f_0 < f_n < f_s - f_0$.

Um exemplo de sinal amostrado e adequadamente recuperado por um FPB de 2^a ordem é dado pelo exercício de simulação B-1-a proposto na experiência 9. A Fig. 24 apresenta o espectro do sinal amostrado e a resposta do filtro para aquele exercício.

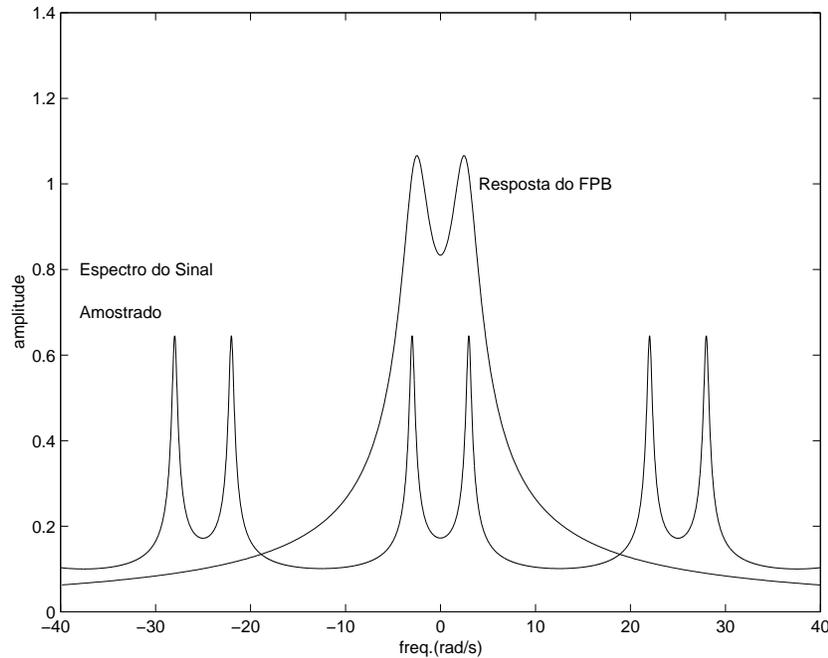


Figura 24: Espectro de um sinal amostrado e a resposta de um FPB de segunda ordem.

Em resumo, a presente experiência consistirá em utilizar o sinal amostrado (armazenado no arquivo .trj) como referência para algum sistema ECP configurado como FPB. Deseja-se obter na saída um sinal aproximadamente igual ao sinal original (antes de ser amostrado). Um sinal típico utilizado como referência nesta experiência é dado pela Fig. 25.

Os sinais utilizados tem a forma geral $x(t) = Ke^{-\sigma t} \cos(\omega_d t)$ e são amostrados com uma frequência conhecida ω_s . O formato “.trj” é descrito a seguir. A primeira linha deve conter o número correspondente ao número de linhas do arquivo. Cada linha seguinte deve conter um número correspondente a um valor da função desejada. Ao selecionar a opção “trajectory” seguida de “user defined” no software “ECP-Executive” o usuário deve definir um valor “segment time” (expresso em milissegundos) que corresponde ao tempo em que cada valor definido no arquivo será mantido.

Nas seções seguintes será mostrado como cada dispositivo ECP pode ser configurado como um sistema de segunda ordem, com função de transferência aproximadamente igual a de um filtro passa-baixas.

8.1 Sistema Retilíneo

Considere o sistema retilíneo configurado como sistema de segunda ordem, isto é, com apenas um carro ligado ao segundo carro por uma mola e com o segundo carro imobilizado, conforme

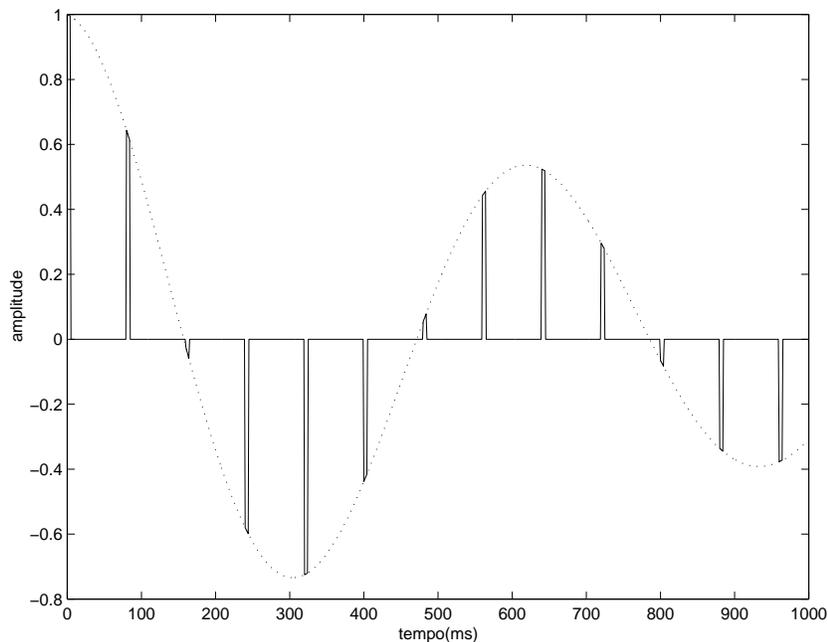


Figura 25: Sinal amostrado armazenado em arquivo “.trj”.

a Fig. 26.

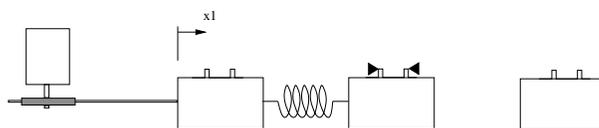


Figura 26: Diagrama do sistema retilíneo com o carro 2 travado.

A função de transferência deste sistema é dada por:

$$F(s) = \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} \quad (47)$$

onde:

m_1 : é a massa do carro;

c_1 : é o coeficiente de atrito viscoso do carro;

k_1 : é a constante da mola;

k_{hw} : é o ganho de hardware do sistema.

Considere agora, o sistema anterior controlado por um controlador PD com ”velocity feedback” com o parâmetro $k_i = 0$, conforme a Fig. 30 e $F(s)$ descrito pela equação (47).

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

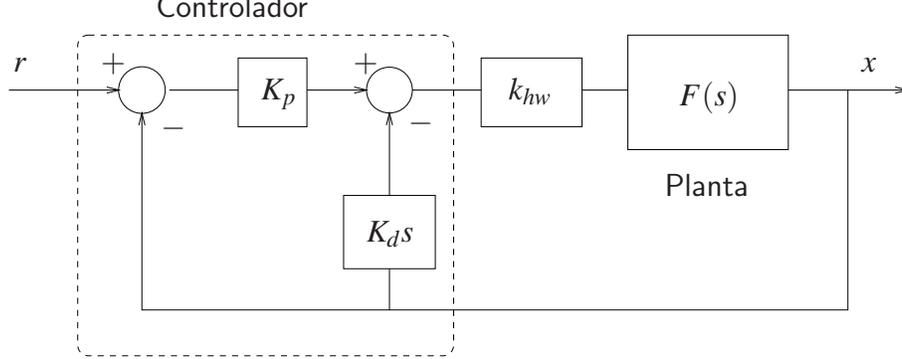


Figura 27: Diagrama de blocos do sistema com controlador PD com “velocity feedback”.

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw}k_p}{m_1s^2 + (c_1 + k_{hw}k_d)s + (k_1 + k_{hw}k_p)} \quad (48)$$

Para que este sistema se comporte aproximadamente como um filtro de segunda ordem, deve-se calcular os parâmetros k_p e k_d de modo que o coeficiente de amortecimento seja $1/2$ e que a frequência natural de oscilação seja igual à frequência de corte desejada para o filtro. Para que isto aconteça deve-se fazer:

$$k_p = \frac{m_1\omega_n^2 - k_1}{k_{hw}} \quad (49)$$

e

$$k_d = \frac{m_1\omega_n - c_1}{k_{hw}} \quad (50)$$

8.1.1 Procedimento Experimental para o Sistema Retilíneo

Deseja-se analisar o comportamento do sistema retilíneo quando excitado por sinais amostrados com frequência de amostragem distintas

1. Com o controlador desligado, trave o segundo carro utilizando uma chave apropriada (Fig. 26). Conecte o primeiro e o segundo carro utilizando uma mola de dureza fraca . **Importante:** não trave o segundo carro utilizando diretamente os conectores nos batentes. Utilize as porcas disponíveis para travá-lo;
2. Fixe quatro massas de 500g sobre o primeiro carro;
3. Para os valores de $\omega_n = 7$ e 30 rd/s, calcule os ganhos k_p e k_d do controlador **PD with Velocity Feedback**, de acordo com as equações (49) e (50) respectivamente. Adote os seguinte valores:

$$k_{hw} = 14732, \quad m_1 = 2.778\text{kg (com pesos)}, \quad c_1 = 3.9189\text{N-s/m}, \quad k_1 = 175\text{N/m}$$

Importante: Os valores dos ganhos k_p e k_d devem ser menores do que $0,1$ e $0,04$ respectivamente.

4. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina **Ts=0.00442s** para **Continuous Time**. No menu **Set-up**, selecione **PI with Velocity Feedback** e entre com os valores k_p e k_d calculados no passo anterior ($k_i = 0$). Selecione **Implement Algorithm** e **OK**.
5. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **User Defined**. Realize os seguintes ajustes:
 - (a) Selecione **Close Loop Trajectory**,
 - (b) Selecione **Segment Time: 10** (msec),
 - (c) Selecione **Trajectory Filename: c:/ea619/apostilas/exp6/fun1ret.w_7.ws_64.trj**
Onde o sinal f_1 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \text{sen}(7t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 64 \text{ rd/s}$$

- (d) Não habilite a opção interpolação por spline.
6. Vá para o **Set-up Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Encoder #1** e **Commanded Position** como variáveis para aquisição; especifique uma amostragem a cada 2 ciclos. Selecione **OK** para sair. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders;
7. Selecione **Execute** no menu **Command**. No comando **Set up Plot** selecione **Command Position** no eixo da direita e **Encoder 1 Position** no eixo esquerdo. Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP.
8. Repita o experimento utilizando agora o sinal no arquivo:

c:/ea619/apostilas/exp6/fun2ret.w_7.ws_16.trj

Onde o sinal f_2 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \text{sen}(7t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 16 \text{ rd/s}$$

Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP. Se necessário refaça o cálculo dos parâmetros do controlador PD.

8.2 Sistema Torcional

A utilização do sistema torcional configurado como sistema de segunda ordem é muito semelhante ao caso anterior. Retire os discos 2 e 3.

A função de transferência deste sistema é dada por:

$$F(s) = \frac{k_{hw}}{J_1 s^2 + c_1 s} \quad (51)$$

onde:

J_1 : é o momento de inércia do disco 1;

c_1 : é o coeficiente de atrito viscoso do disco 1;

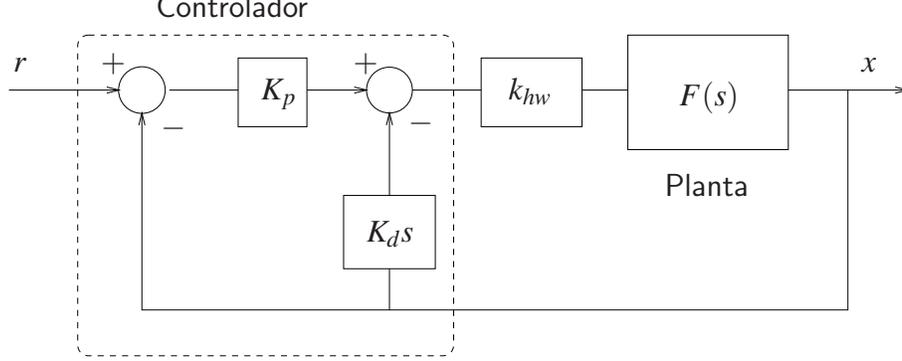


Figura 28: Diagrama de blocos do sistema com controlador PD com “velocity feedback”.

k_{hw} : é o ganho de hardware do sistema.

Considere agora, o sistema anterior controlado por um controlador PD com “velocity feedback” com o parâmetro $k_i = 0$, conforme a Fig. 28 e $F(s)$ dado pela equação (51).

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw}k_p}{J_1s^2 + (c_1 + k_{hw}k_d)s + k_{hw}k_p} \quad (52)$$

Para que este sistema se comporte aproximadamente como um filtro de segunda ordem, deve-se calcular os parâmetros k_p e k_d de modo que o coeficiente de amortecimento seja $\frac{1}{2}$ e que a frequência natural de oscilação seja igual à frequência de corte desejada para o filtro. Para que isto aconteça deve-se fazer:

$$k_p = \frac{J_1\omega_n^2}{k_{hw}} \quad (53)$$

e

$$k_d = \frac{J_1\omega_n - c_1}{k_{hw}} \quad (54)$$

8.2.1 Procedimento Experimental para o Sistema Torcional

Deseja-se analisar o comportamento do sistema torcional quando excitado por sinais amostrados com frequência de amostragem distintas

1. Fixe quatro massas de 500g sobre o disco inferior na distância de 9 cm;
2. Para os valores de $\omega_n = 5$ e 30 rd/s, calcule os ganhos k_p e k_d do controlador **PD with Velocity Feedback**, de acordo com as equações (53) e (54) respectivamente. Adote os seguinte valores:

$$c_1 = 0.0076394\text{N-s/m}, J_1 = 0.0187 \text{ N/m (com pesos) e } k_{hw} = 17.6$$

Importante: Os valores dos ganhos k_p e k_d devem ser menores do que 0.2.

3. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina **Ts=0.00442s** para **Continuous Time**. No menu **Set-up**, selecione **PI with Velocity Feedback** e entre com os valores k_p e k_d calculados no passo anterior ($k_i = 0$). Selecione **Implement Algorithm** e **OK**.
4. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **User Defined**. Realize os seguintes ajustes:
 - (a) Selecione **Close Loop Trajectory**,
 - (b) Selecione **Segment Time: 10 (msec)**,
 - (c) Selecione **Trajectory Filename: c:/ea619/apostilas/exp6/fun1_tor_w_7_ws_64.trj**
Onde o sinal f_1 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \text{sen}(7t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 64 \text{ rd/s}$$

- (d) Não habilite a opção interpolação por spline.
5. Vá para o **Set-up Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Encoder #1** e **Commanded Position** como variáveis para aquisição; especifique uma amostragem a cada 2 ciclos. Selecione **OK** para sair. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders;
6. Selecione **Execute** no menu **Command**. No comando **Set up Plot** selecione **Command Position** no eixo da direita e **Encoder 1 Position** no eixo esquerdo. Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP.
7. Repita o experimento utilizando agora o sinal no arquivo:

c:/ea619/apostilas/exp6/fun2_tor_w_7_ws_64.trj

Onde o sinal f_2 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \text{sen}(7t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 8 \text{ rd/s}$$

Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP. Se necessário refaça o cálculo dos parâmetros do controlador PD.

8.3 Emulador Industrial

Uma particularidade deste sistema é que o momento de inércia total do sistema é composto pelo momento de inércia do disco de atuação somado ao momento de inércia refletido do disco de carga.

A função de transferência deste sistema é na configuração a ser utilizada é dada por:

$$F(s) = \frac{k_{hw}}{J^*s^2 + c^*s} \quad (55)$$

onde:

J^* : é o momento de inércia total refletido sobre o eixo do motor;

c^* : é o coeficiente de atrito viscoso;

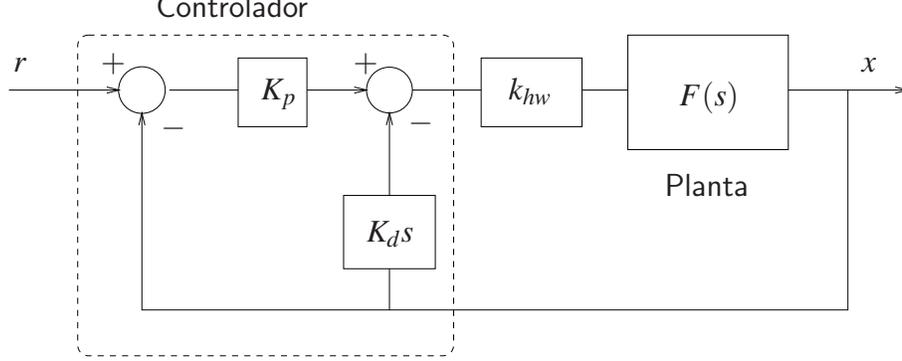


Figura 29: Diagrama de blocos do sistema com controlador PD com “velocity feedback”.

k_{hw} : é o ganho de hardware do sistema.

Considere agora, o sistema anterior controlado por um controlador PD com “velocity feedback” com o parâmetro $k_i = 0$, conforme a Fig. 29 com $F(s)$ dado pela equação (55).

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw}k_p}{J^*s^2 + (c^* + k_{hw}k_d)s + (k_{hw}k_p)} \quad (56)$$

Para que este sistema se comporte aproximadamente como um filtro de segunda ordem, deve-se calcular os parâmetros k_p e k_d de modo que o coeficiente de amortecimento seja $\frac{1}{2}$ e que a frequência natural de oscilação seja igual à frequência de corte desejada para o filtro. Para que isto aconteça deve-se fazer:

$$k_p = \frac{J^* \omega_n^2}{k_{hw}} \quad (57)$$

e

$$k_d = \frac{J^* \omega_n - c^*}{k_{hw}} \quad (58)$$

8.3.1 Procedimento Experimental para o Emulador Industrial

Deseja-se analisar o comportamento do sistema emulador industrial quando excitado por sinais amostrados com frequência de amostragem distintas.

1. Com o controlador desligado, desconecte o disco 2, e deixe o disco 1 sem carga.
2. Para os valores de $\omega_n = 5$ e 30 rd/s, calcule os ganhos k_p e k_d do controlador **PD with Velocity Feedback**, de acordo com as equações (57) e (58) respectivamente. Adote os seguinte valores:

$$J^* = 4 \times 10^{-4} \text{ N/m}, k_{hw} = 5,77 \text{ e } c^* = 3,3 \times 10^{-4} \text{ N-s/m}$$

Importante: Os valores dos ganhos k_p e k_d devem ser menores do que 0.2 e 0.05 respectivamente.

3. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina $T_s=0.001768s$ para **Continuous Time**. No menu **Set-up**, selecione **PI with Velocity Feedback** e entre com os valores k_p e k_d calculados no passo anterior ($k_i = 0$). Selecione **Encoder #2** e **OK**. Selecione **Implement Algorithm** e **OK**.
4. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **User Defined**. Realize os seguintes ajustes:
 - (a) Selecione **Close Loop Trajectory**,
 - (b) Selecione **Segment Time: 10 (msec)**,
 - (c) Selecione **Trajectory Filename: c:/ea619/apostilas/exp6/fun1_emu.w.7_ws.64_alpha001.trj**
Onde o sinal f_1 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \text{sen}(7t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 64 \text{ rd/s}$$

- (d) Não habilite a opção interpolação por spline.
5. Vá para o **Set-up Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Encoder #2** e **Commanded Position** como variáveis para aquisição; especifique uma amostragem a cada 6 ciclos. Selecione **OK** para sair. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders;
 6. Selecione **Execute** no menu **Command**. No comando **Set up Plot** selecione **Command Position** no eixo da direita e **Encoder 2 Position** no eixo esquerdo. Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP.
 7. Repita o experimento utilizando agora o sinal no arquivo:
c:/ea619/apostilas/exp6/fun2_emu.w.7_ws.16_alpha001.trj
Onde o sinal f_2 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \text{sen}(7t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 16 \text{ rd/s}$$

Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP. Se necessário refaça o cálculo dos parâmetros do controlador PD.

8.4 Pêndulo Invertido

Considere o pêndulo invertido com a haste principal travada; a função de transferência deste sistema é dada por:

$$F(s) = \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + c_1 s} \quad (59)$$

onde:

m_1 : é a massa da haste deslizante com os pesos “orelha”;

c_1 : é o coeficiente de atrito viscoso da haste deslizante;

k_{hw} : é o ganho de hardware do sistema, definido pelo produto $k_s k_f k_x$;

Considere agora, o sistema anterior controlado por um controlador PD com “velocity feedback” com o parâmetro $k_i = 0$, conforme a Fig. 30 e $F(s)$ descrito pela equação (59).

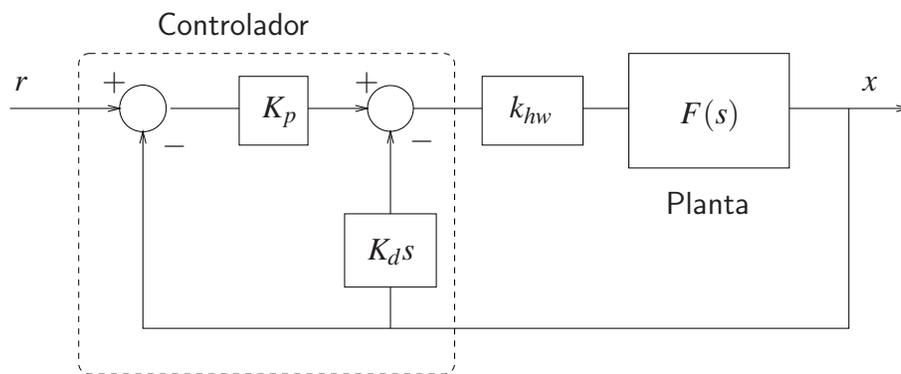


Figura 30: Diagrama de blocos do sistema com controlador PD com “velocity feedback”.

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw} k_p}{m_1 s^2 + (c_1 + k_{hw} k_d) s + k_{hw} k_p} \quad (60)$$

Para que este sistema se comporte aproximadamente como um filtro de segunda ordem, deve-se calcular os parâmetros k_p e k_d de modo que o coeficiente de amortecimento seja $1/2$ e que a frequência natural de oscilação seja igual à frequência de corte desejada para o filtro. Para que isto aconteça deve-se fazer:

$$k_p = \frac{m_1 \omega_n^2}{k_{hw}} \quad (61)$$

e

$$k_d = \frac{m_1 \omega_n - c_1}{k_{hw}} \quad (62)$$

8.4.1 Procedimento Experimental para o Pêndulo

Deseja-se analisar o comportamento da haste deslizante quando excitada por sinais amostrados com frequência de amostragem distintas.

1. Desligue o controlador fixe os pesos “orelhas” na haste deslizante. Trave a haste principal do pêndulo utilizando um calço no contrapeso. A haste deslizante deve estar na posição central.
2. Para os valores de $\omega_n = 10$ e 65 rd/s, calcule os ganhos k_p e k_d do controlador **PD with Velocity Feedback**, de acordo com as equações (61) e (62) respectivamente. Adote os seguinte valores:

$$m_1 = 0.216\text{kg}, \quad c_1 = 0.225 \text{ N-s/m}, \quad \text{e} \quad k_{hw} = 2088$$

Importante: Os valores dos ganhos k_p e k_d devem ser menores do que 0,4 e 0,04 respectivamente.

3. Com o controlador ligado, entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina **Ts=0.00442s** para **Continuous Time**. No menu **Set-up**, selecione **PI with Velocity Feedback** e entre com os valores k_p e k_d calculados no passo anterior ($k_i = 0$). Selecione **Encoder #2** e **OK**. Selecione **Implement Algorithm** e **OK**.
4. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **User Defined**. Realize os seguintes ajustes:
 - (a) Selecione **Close Loop Trajectory**,
 - (b) Selecione **Segment Time: 10** (msec),
 - (c) Selecione **Trajectory Filename: C:/ea619/apostilas/fun_w_8_alpha_01_ws_65.trj**
Onde o sinal f_1 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \sin(8t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 65 \text{ rd/s}$$

- (d) Não habilite a opção interpolação por spline.
5. Vá para o **Set-up Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Encoder #2** como variável para aquisição; especifique uma amostragem a cada 2 ciclos. Selecione **OK** para sair. Selecione **Zero Position** no menu **Utility** para zerar as posições dos encoders;
 6. Selecione **Execute** no menu **Command**. No comando **Set up Plot** selecione **Command Position** no eixo da direita e **Encoder 2 Position** no eixo esquerdo. Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP.
 7. Repita o experimento utilizando agora o sinal no arquivo:
C:/ea619/apostilas/fun_w_8_alpha_01_ws_16.trj
Onde o sinal f_2 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,01t) \sin(8t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 16 \text{ rd/s}$$

Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP. Se necessário refaça o cálculo dos parâmetros do controlador PD.

8.5 Levitador Magnético

Considere o levitador magnético somente com o disco #1. A função de transferência deste sistema é dada por:

$$F(s) = \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + c_1 s} \quad (63)$$

onde:

m_1 : é a massa do disco magnético;

c_1 : é o coeficiente de atrito viscoso;

k_{hw} : é o ganho de hardware do sistema.

Considere agora, o sistema anterior controlado por um controlador PD com "velocity feedback" com o parâmetro $k_i = 0$, conforme a Fig. 31 e $F(s)$ descrito pela equação (63).

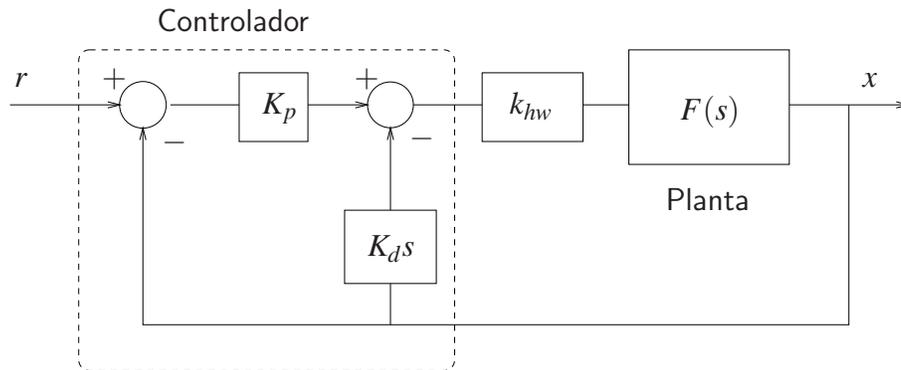


Figura 31: Diagrama de blocos do sistema com controlador PD com "velocity feedback".

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw} k_p}{m_1 s^2 + (c_1 + k_{hw} k_d) s + k_{hw} k_p} \quad (64)$$

Para que este sistema se comporte aproximadamente como um filtro de segunda ordem, deve-se calcular os parâmetros k_p e k_d de modo que o coeficiente de amortecimento seja $1/2$ e que a frequência natural de oscilação seja igual à frequência de corte desejada para o filtro. Para que isto aconteça deve-se fazer:

$$k_p = \frac{m_1 \omega_n^2}{k_{hw}} \quad (65)$$

e

$$k_d = \frac{m_1 \omega_n - c_1}{k_{hw}} \quad (66)$$

8.5.1 Procedimento Experimental para o Levitador

Deseja-se analisar o comportamento do disco #1 do levitador quando excitado por sinais amostrados com frequência de amostragem distintas.

1. No menu **File** carregue os parâmetros de calibração do sensor. Através da opção **Load Settings** carregue o arquivo `ca1_2007.cfg`. Entre no menu **Setup, Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor** $Y_{cal} = a/Y_{raw} + f/\sqrt{Y_{raw} + g + h * Y_{raw}}$ e habilite a opção **Apply Thermal Compensation**;
2. Para os valores de $\omega_n = 18, 25$ e 35 rd/s, calcule os ganhos k_p e k_d do controlador PD, de acordo com as equações (65) e (66) respectivamente. Adote os seguintes valores:

$$m_1 = 0.123\text{kg}, \quad c_1 = 0.40 \text{ N-s/m}, \quad \text{e} \quad k_{hw} = 104.6$$

Importante: Os valores dos ganhos k_p e k_d devem ser menores do que 2 e 0,04 respectivamente.

3. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** e defina **Ts=0.001768s**. Carregue o algoritmo **exp6.alg** através da opção **Load from disk**. Em seguida selecione **Edit Algorithm** e ajuste os ganhos k_p e k_d de acordo com os valores calculados no item anterior. Em seguida selecione **Implement Algorithm**. O disco irá se mover para a altura de 2.5 [cm] mantendo-se nesta posição;
4. Vá para o **Setup Data Acquisition** no menu **Data** e selecione **Commanded Position** e **Variable Q10** como variáveis a adquirir, e especifique uma amostragem de dados a cada 2 ciclos;
5. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **User Defined**. Realize os seguintes ajustes:

- (a) Selecione **Trajectory Filename:** `c:/ea619/apostilas/exp6/fun1_lev.trj`

Onde o sinal f_1 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,1t) \text{sen}(20t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 126 \text{ rd/s}$$

- (b) Selecione **Segment Time:** 10 (msec),
- (c) Não habilite a opção interpolação por spline.

6. Selecione **Execute** no menu **Command**. No comando **Set up Plot** selecione **Command Position** no eixo da direita e a variável **Q10** no eixo esquerdo. Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP.
7. Repita o experimento utilizando agora o sinal no arquivo:

`c:/ea619/apostilas/exp6/fun2_lev.trj`

Onde o sinal f_2 é o sinal amostrado:

$$f(t) = \text{cte} \exp(-0,1t) \text{sen}(20t), \quad \text{frequência de amostragem } \omega_s = 32 \text{ rd/s}$$

Verifique a qualidade do sinal recuperado na saída do sistema ECP. Se necessário refaça o cálculo dos parâmetros do controlador PD.

Relatório

Amostragem Utilizando os Equipamentos ECP

1. Com base nos resultados e figuras obtidas, estabeleça quando foi possível recuperar o sinal original.
2. Analise a influência da frequência de amostragem e a frequência de corte do filtro no sinal da saída do sistema.
3. Compare os resultados obtidos com os previstos pela análise.

Amostragem Usando Matlab

Considere o diagrama a seguir.

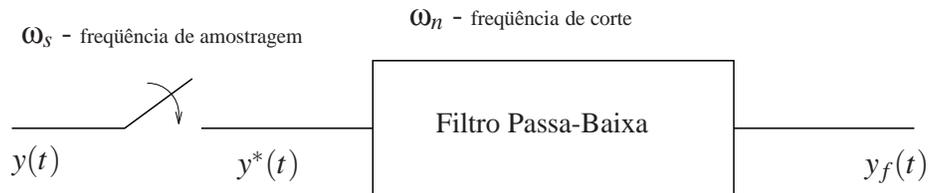


Figura 32: Esquema de Filtragem.

1. Simule a situação indicada no diagrama da Fig. 32 para a função $y(t) = \exp(-t/10) \sin(3t)$, nos seguintes casos (unidades em rad/s):
 - a) $\omega_s = 25$, $\omega_n = 6$.
 - b) $\omega_s = 25$, $\omega_n = 3$.
 - c) $\omega_s = 4$, $\omega_n = 3$.
 - d) $\omega_s = 4$, $\omega_n = 6$.Para cada caso, obtenha os gráficos de $y^*(t)$ e $y_f(t)$; plote-os simultaneamente com $y(t)$.
2. Com base nas curvas obtidas para cada caso, explique a semelhança (ou diferença) entre o sinal original e os sinais filtrados. Qual a influência da frequência de amostragem? E da frequência de corte do filtro?
3. Simule a situação indicada no diagrama quando $y(t)$ é uma onda quadrada de período $T = 2$, nos seguintes casos (unidades em rad/s):
 - a) $\omega_s = 150$, $\omega_n = 12$.
 - b) $\omega_s = 150$, $\omega_n = 3$.Para cada caso, obtenha os gráficos de $y^*(t)$ e $y_f(t)$; plote-os simultaneamente com $y(t)$.
4. É possível recuperar uma onda quadrada? Por quê? Explique os resultados obtidos no item B-3.

Referências

- [1] Lathi, B. P., *Communication Systems*, John Wiley, 1968.
- [2] Kuo, B. C., *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart and Wiston, 1980.